BUKU SEKOLAH ELEKTRONIK bse

MATEMATIKA

Sekolah Menengah Kejuruan (SMK)

Kelompok Penjualan dan Akuntansi

untuk kelas X sepuluh

To'ali

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

MATEMATIKA Sekolah Menengah Kejuruan Kelas X To'ali

Matematika X

Sekolah Menengah Kejuruan
(SMK)

Kelompok
Penjualan dan Akuntansi
Untuk kelas X

To'ali

Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional

Matematika X
Sekolah Menengah Kejuruan
Kelompok Penjualan dan Akuntansi

Penulis : To'ali

Ukuran Buku : 17,6 x 25 cm

510.07
TOA To'ali
m Matematika X : Sekolah Menengah Kejuruan
Kelompok Penjualan dan Akuntansi / To'ali. – Jakarta:
x, 163 hlm.: ilus.; 25 cm.
Bibliografi hlm.163
Indeks hlm. 160-162
ISBN 979-462-870-0

1. Matematika – Studi dan Pengajaran
I. Judul

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

Diperbanyak oleh ...

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2008, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui *website* Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 12 Tahun 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para pendidik dan peserta didik di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional tersebut, dapat diunduh *(down load),* digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga peserta didik dan pendidik di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Selanjutnya, kepada para peserta didik kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juni 2008
Kepala Pusat Perbukuan

KATA PENGANTAR

Puji syukur pada Allah SWT yang telah memberikan rahmat begitu besar pada kita semua, sehingga, buku matematika SMK untuk kelas X Kelompok Penjualan dan Akuntansi Sekolah Menengah Kejuruan dapat terselesaikan dengan baik.

Buku ini disusun berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia No. 22 dan 23 Tahun 2006 yang tertuang dalam Standar Isi dan Standar Kompetensi Lulusan untuk Satuan Pendidikan Dasar dan Menengah. Selain memuat uraian yang berisikan pengembangan standar kompetensi dan kompetensi dasar, buku ini juga berisikan konsep-konsep dasar matematika yang dapat digunakan pada kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengan Penjualan dan Akuntansi.

Tiap bab berisi teori yang harus dipahami secara benar oleh peserta didik dan disertai dengan contoh-contoh soal yang relevan dengan teori tersebut. Selain itu terdapat juga soal-soal yang didasarkan pada konsep dan teori yang dibahas sebagai alat uji untuk mengukur kemampuan peserta didik dalam penguasaan materi tersebut.

Dalam mengembangkan buku ini, penulis berupaya agar materi yang disajikan sesuai dengan kebutuhan kompetensi yang harus dicapai pada kelas X bidang Penjualan dan Akuntansi Sekolah Menengah Kejuruan. Oleh karenanya, selain dari hasil pemikiran dan pengalaman penulis sebagai guru matematika pada SMK Bisnis dan Manajemen, materi yang dikembangkan juga diperkaya dengan referensi-referensi lain yang sesuai.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang mendukung buku ini dapat diterbitkan. Mudah-mudahan buku ini dapat bermanfaat bagi peserta didik dalam mengembangkan kemampuan matematikanya. Namun demikian penulis menyadari bahwa buku ini masih perlu dikembangkan terus. Sehingga saran dari berbagai pihak pengguna buku ini sangat diharapkan.

Penulis

DAFTAR ISI

PETUNJUK PENGGUNAAN BUKU

A. Deskripsi Umum

Materi yang tercakup pada matematika SMK Kelompok Penjualan dan Akuntansi kelas X terdiri atas 4 standar kompetensi yaitu:

1. **Memecahkan masalah berkaitan dengan konsep operasi bilangan riil**
2. **Memecahkan masalah berkaitan sistem persamaan dan pertidaksamaan linier dan kuadrat**
3. **Memecahkan masalah berkaitan dengan konsep matriks**
4. **Menyelesaikan masalah program linier**

Setelah mempelajari buku ini, kompetensi yang diharapkan adalah peserta didik dapat menerapkan konsep sistem bilangan riil, konsep Persamaan dan Pertidaksamaan, konsep Matriks dan Program Linear dalam menunjang program keahlian kelompok Penjualan dan Akuntansi.

Pendekatan yang digunakan dalam menyelesaikan buku ini adalah menggunakan pende-katan peserta didik aktif melalui berbagai metode, seperti pemberian tugas, diskusi pemecahan masalah, dan presentasi. Guru merancang pembelajaran yang memberikan kesempatan seluas-luasnya kepada peserta didik untuk berperan aktif dalam membangun konsep secara mandiri ataupun bersama-sama.

B. Prasyarat Umum

Standar kompetensi yang terdapat pada uraian-uraian materi mempunyai hubungan satu sama lainnya tetapi penguasaan kompetensinya tidak berurutan. Sehingga dalam mempelajari buku ini tidak harus berurutan sesuai dengan daftar isi. Namun demikian setiap satu standar kompetensi harus dikuasai secara tuntas baru dapat pindah pada standar kompetensi yang lain. Walaupun begitu, sangat disarankan agar menguasai kompetensi yang paling mendasar yaitu memecahkan masalah berkaitan dengan konsep operasi bilangan riil, baru pindah pada kompetensi lainnya.

C. Cara Menggunakan Buku

1. Penjelasan untuk Peserta Didik

   a. **Bacalah buku ini mulai dari kata pengantar, petunjuk penggunaan buku kemudian pahami benar isi dari setiap babnya**
   b. **Kerjakan semua tugas-tugas yang ada dalam buku ini agar kompetensi kalian berkembang sesuai standar.**

c. **Buatlah rencana belajar untuk mempelajari buku ini dan konsultasikan rencana kalian tersebut dengan gurumu.**
d. **Lakukan kegiatan belajar untuk mendapatkan kompetensi sesuai dengan rencana kegiatan belajar yang telah kalian susun.**
e. **Setiap mempelajari satu subkompetensi, harus di mulai dari menguasai pengetahuan pendukung (uraian materi), membaca rangkumannya dan mengerjakan soal latihan baik melalui bimbingan guru ataupun tugas di rumah.**
f. **Dalam mengerjakan soal-soal latihan kalian jangan melihat kunci jawaban terlebih dahulu, sebelum kalian menyelesaikan soal-soal tersebut.**
g. **Setiap menyelesaikan satu standar kompetensi, selesaikan uji kemampuan untuk menghadapi ujian yang diberikan oleh guru.**

2. Peranan Guru
   a. **Membantu peserta didik dalam merencanakan proses belajar.**
   b. **Membimbing peserta didik dalam menyelesaikan tugas-tugas/latihan yang dijelaskan dalam tahap belajar.**
   c. **Membantu peserta didik dalam memahami konsep dan menjawab pertanyaan mengenai proses belajar peserta didik.**
   d. **Membantu peserta didik dalam menentukan dan mengakses sumber tambahan lain yang diperlukan untuk belajar.**
   e. **Mengorganisasikan kegiatan belajar kelompok jika diperlukan.**
   f. **Melaksanakan penilaian.**
   g. **Menjelaskan kepada peserta didik mengenai bagian yang perlu untuk dibenahi dan merundingkan rencana pembelajaran selanjutnya.**
   h. **Mencatat pencapaian kemajuan peserta didik dengan memberikan evaluasi. Pemberian evaluasi kepada peserta didik diharapkan diambil dari soal-soal Uji Kemampuan yang tersedia.**

D. Pengukuran Kemampuan

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi dapat digunakan rumus berikut:

1. Soal pilihan ganda

$$\textbf{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{jumlah jawaban yang benar}}{\text{jumlah soal}} \textbf{ X 100 \%}$$

2. soal essay

$$\textbf{Tingkat pengusaan} = \frac{\text{skor yang diperoleh}}{\text{skor maksimum}} \text{ x 100\%}$$

Arti tingkat penguasaan yang kalian capai :

90% - 100% = baik sekali
76% - 89% = baik

60% - 75% = sedang
< 60% = kurang

Jika soal terdiri dari pilihan ganda dan essay, tingkat pengusaan total adalah jumlah tingkat pengusaan pada soal pilihan ganda dan essay

Jika anda mencapai tingkat penguasaan 60% ke atas, anda dapat meneruskan materi yang membahas kompetensi dasar berikutnya, tetapi sangat disarankan agar pengusaan yang belum tuntas juga tetap dipelajari lagi agar seluruh kompetensi dasar dapat terkuasai secara baik.

Jika tingkat penguasaan kalian di bawah 60%, kalian harus mengulangi materi tersebut terutama yang belum dikuasai.

1

SISTEM BILANGAN RIIL

Sumber: Art & Gallery

Standar kompetensi sistem bilangan riil terdiri atas empat kompetensi dasar. Dalam penyajian pada buku ini, setiap kompetensi dasar memuat tujuan, uraian materi, dan latihan. Rangkuman diletakkan pada setiap akhir bahasan suatu kompetensi dasar. Kompetensi dasar pada bab ini adalah *operasi pada bilangan riil, operasi pada bilangan berpangkat, operasi pada bilangan irasional,* dan *konsep logaritma*. Standar kompetensi ini digunakan sebagai kemampuan dasar untuk mempelajari kompetensi-kompetensi yang lain. Sebelum mempelajari kompetensi ini ingatlah kembali tentang penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat, penjumlahan dan pengurangan pecahan, desimal dan persen.
Perhatikan gambar 1-1 di bawah ini:

Gambar 1-1 Alat-alat elektronik di pasar swalayan

Gambar 1-1 di samping merupakan alat-alat elektronik yang dijual di pasar swalayan. Kegiatan jual beli di pasar tersebut membutuhkan pengetahuan tentang persen, rugi atau laba, diskon dan perhitungan bilangan riil lainnya. Oleh karena itu pengetahuan tentang operasi bilangan riil sangat dibutuhkan pada kehidupan sehari-hari di rumah, di tempat kerja di pasar maupun di tempat lainnya. Pernahkah kalian bayangkan bagaimana menghitung bunga maupun jumlah simpanan di suatu bank?

Perhitungan bunga di bank menggunakan operasi bilangan berpangkat, dan masih banyak lagi kegunaan dari sistem bilangan riil.

Pada setiap akhir kompetensi dasar, tercantum soal-soal latihan yang disusun dari soal-soal yang mudah hingga soal-soal yang sulit. Latihan soal ini digunakan untuk mengukur kemampuan kalian terhadap kompetensi dasar ini. Artinya setelah mempelajari kompetensi dasar ini secara mandiri dengan bimbingan guru sebagai fasilitator, ukurlah sendiri kemampuan kalian dengan mengerjakan soal-soal latihan tersebut.

Untuk melancarkan kemampuan kalian agar lebih baik dalam mengerjakan soal, disarankan semua soal dalam latihan ini dapat dikerjakan di sekolah dengan bimbingan guru maupun di rumah.

Untuk mengukur standar kompetensi lulusan tiap peserta didik, di setiap akhir kompetensi dasar, guru akan memberikan evaluasi apakah kalian layak atau belum layak mempelajari standar kompetensi berikutnya. Kalian dinyatakan layak jika kalian dapat mengerjakan soal 60% atau lebih soal-soal evaluasi yang akan diberikan guru.

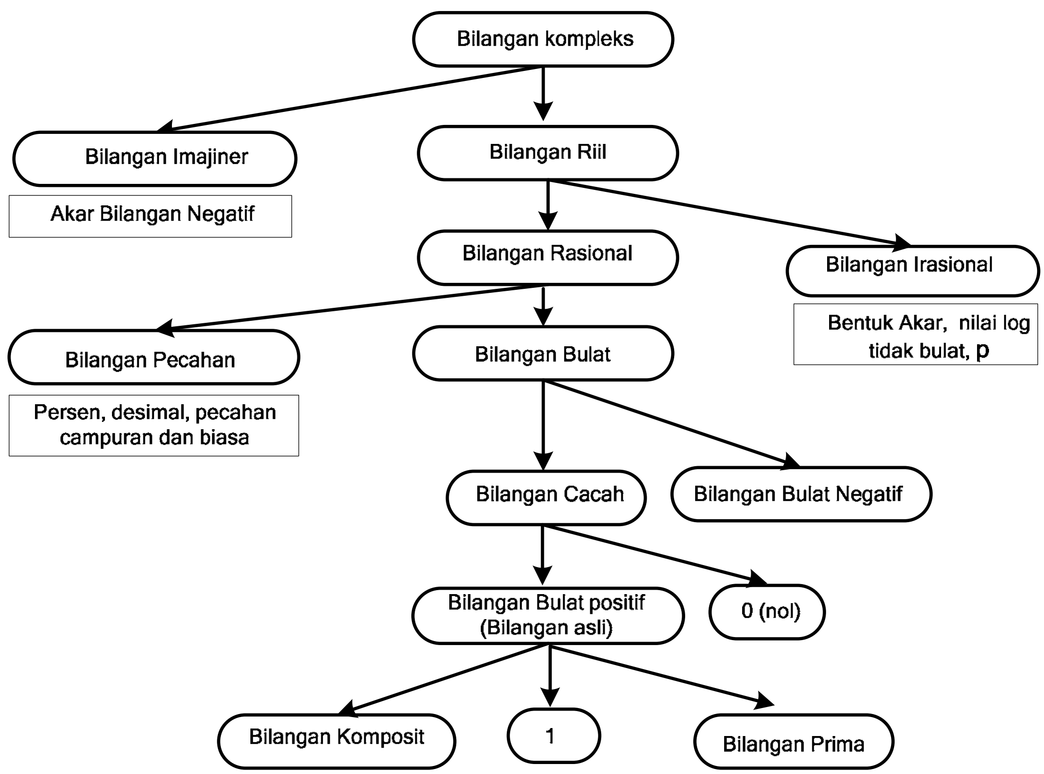
A. Operasi pada Bilangan Riil

Setelah mempelajari materi pada kompetensi dasar ini, kalian diharapkan dapat:

- membuat skema bilangan riil,
- mengoperasikan dua atau lebih bilangan bulat,
- mengoperasikan dua atau lebih bilangan pecahan,
- mengonversikan pecahan ke persen atau sebaliknya,
- mengonversikan pecahan ke desimal atau sebaliknya,
- mengonversikan persen ke desimal atau sebaliknya,
- mengoperasikan bilangan pecahan dengan bilangan bulat,
- menyelesaikan soal yang mengandung perbandingan senilai,
- menyelesaikan soal yang mengandung perbandingan berbalik nilai,
- menyatakan ukuran yang sebenarnya jika ukuran pada gambar dan skalanya diketahui, atau sebaliknya, dan
- menyatakan perbandingan ke dalam bentuk persen.

1. Skema Bilangan

Sebelum membahas operasi pada bilangan riil, perhatikan peta konsep bilangan di bawah ini.



Gambar 1-2 Peta konsep bilangan

Keterangan:

- Contoh bilangan imajiner $\sqrt{-1}$ = biasanya dilambangkan dengan i , $\sqrt{-2}$, dan seterusnya.
- Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$ dengan b ≠ 0
- Bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$ atau bilangan yang banyaknya desimal tidak terhingga.
- Bilangan cacah adalah bilangan positif ditambah nol.
- Bilangan prima adalah bilangan yang hanya mempunyai dua faktor.
- Bilangan komposit adalah bilangan yang memiliki faktor lebih dari dua.

Contoh 1

Beberapa bilangan irasional, yaitu $\sqrt{2}$ = 1,42... ; log 3 = 0, 477... ; π = 3,14.... dll

Ada bilangan yang memiliki banyaknya desimal tak terhingga, namun merupakan bilangan rasional, yaitu bilangan desimal berulang.
Desimal berulang dinotasikan dengan tanda garis (bar) di atas angka yang berulang.

Contoh 2

Beberapa bilangan desimal berulang, yaitu:

0,666. . . . = $0,\overline{6}$

2,363636. . . . = $2,\overline{36}$

5,125252525. . . . = $5,1\overline{25}$

Untuk mengubah desimal berulang menjadi pecahan, gunakanlah cara berikut:

Berulang 1 penyebutnya 9, berulang 2 penyebutnya 99 dan seterusnya.

Contoh 3

Ubahlah bilangan desimal berulang di bawah ini menjadi pecahan.

a. 0,333333. . . .
b. 0,777777. . . .
c. 0,181818. . . .
d. 0,022222. . . .
e. 2,111111. . . .
f. 0,549549. . . .

Jawab:

a. 0,333333. . . . = $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

b. 0,777777. . . . = $\frac{7}{9}$

c. 0,181818. . . . = $\frac{18}{99} = \frac{2}{11}$

d. 0,022222. . . . = $\frac{2}{90} = \frac{1}{45}$

e. 2,111111. . . . = $2\frac{1}{9}$

f. 0,549549. . . . = $\frac{549}{999} = \frac{61}{111}$

2. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan

Sifat-sifat yang berlaku pada operasi penjumlahan yaitu:

- Komutatif : $a + b = b + a$

  Misalkan :10 + (-3) = -3 +10
  7 = 7

- Asosiatif $(a + b) + c = a + (b + c)$

  Misalkan: $(2 + 7) + 5 = 2 + (7 + 5)$
  $9 + 5 = 2 + 12$
  $14 = 14$
- Memiliki elemen netral penjumlahan, yaitu 0
- Memiliki invers penjumlahan. Invers penjumlahan dari a adalah -a

Contoh 4
Invers penjumlahan dari 2 adalah -2, invers penjumlahan dari -5 adalah 5

Untuk penjumlahan dan pengurangan pada bilangan pecahan, berlaku rumus berikut:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

Contoh 5

a. $\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{2+3}{8}=\frac{5}{8}$

b. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{2\times5+3\times3}{3\times5}=\frac{10+9}{15}=\frac{19}{15}$

c. $\frac{1}{7}-\frac{2}{5}=\frac{1\times5-2\times7}{7\times5}=\frac{5-14}{35}=-\frac{9}{35}$

d. $2\frac{1}{5}-1\frac{3}{7}=\frac{11}{5}-\frac{10}{7}=\frac{77-50}{35}=\frac{27}{35}$

3. Operasi Perkalian dan Pembagian

Pada perkalian dan pembagian bilangan riil berlaku rumus berikut:

a x b = ab	a x (- b) = - (ab)	(-a) x b = - (ab)	(-a) x (-b) = ab
a : b = $\frac{a}{b}$	a : (-b) = - ($\frac{a}{b}$)	(-a) : b = - ($\frac{a}{b}$)	(-a) : (-b) = $\frac{a}{b}$

Contoh 6

a. 2 x 5 = 10

b. -4 x -3 = 12

c. 60 : -5 = - 12

d. -12 : -6 = 2

Sifat-sifat pada operasi perkalian dan pembagian adalah sebagai berikut.

- Komutatif dan Asosiatif berlaku juga pada operasi perkalian, yakni.
  - o Komutatif, a x b = b x c
  - o Asosiatif, (a x b) x c = a x (b x c) ; a, b, c $\in$ R
- Memiliki unsur identitas/elemen netral, yaitu 1
- Memiliki invers perkalian

Contoh 7

a. Invers perkalian dari 2 adalah $\frac{1}{2}$.

b. Invers perkalian dari $\frac{2}{3}$ adalah $\frac{3}{2}$.

c. Invers perkalian dari $-\frac{3}{5}$ adalah $-\frac{5}{3}$.

d. Invers perkalian dari $2\frac{1}{3}$ adalah $\frac{3}{7}$.

Untuk perkalian dan pembagian pecahan berlaku rumus berikut:

$$\frac{a}{b} \text{ x } \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Contoh 8
Hukum asosiatif perkalian
(5 x 7) x -2 = 5 x (7 x (-2))
35 x -2 = 5 x -14
-70 = -70

Contoh 9
Perkalian dan pembagian pecahan:

a. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

b. $\frac{5}{12} : \frac{2}{3} = \frac{5}{12} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

c. $2\frac{1}{5} \times 1\frac{3}{7} = \frac{11}{5} \times \frac{10}{7} = \frac{110}{35} = \frac{22}{7}$

Untuk perkalian dengan penjumlahan atau pengurangan berlaku sifat distributif, yaitu:

A x (B + C) = (A x B) + (A x C
A x (B – C) = (A x B) – (A x C)

Contoh 10
a. 2 x (5 + 8) = (2 x 5) + (2 x 8) = 10 + 16 = 26
b. 6 x (10 – 4)= (6 x 10) – (6 x 4) = 60 – 24 = 36

Catatan
Jika menyelesaikan operasi bilangan riil yang terdiri atas mutlioperasi, maka harus diselesaikan berdasarkan hierarki operasi bilangan riil, yaitu selesaikan dahulu operasi dalam kurung, pangkat, kali atau bagi kemudian jumlah atau kurang.

Contoh 11.
a. 2 + 3 x 5 = 2 + 15 = 17 bukan 5 x 5 = 25
b. 10 – 4 : 2 x 5 = 10 – 2 x 5 = 0 bukan 6 : 10 atau 10 – 4 : 10 = 10 : 0,4

4. Mengonversikan Pecahan ke Persen atau Sebaliknya

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \text{x} 100\ \% \qquad p\ \% = \frac{p}{100}$$

Contoh 12
Konversikan ke bentuk persen:

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{40}$ c. $\frac{7}{8}$

Jawab:

a. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 100\% = 50\ \%$

b. $\frac{1}{40} = \frac{1}{40} \times 100\% = 2{,}5\ \%$

c. $\frac{7}{8} = \frac{7}{8} \times 100\% = 87{,}5\ \%$

Contoh 13
Konversikan ke bentuk pecahan:
a. 1,5 % b. 25%

Jawab:

a. $1{,}5\ \% = \frac{1{,}5}{100} = \frac{15}{1.000} = \frac{3}{200}$

b. $25\ \% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

5. Mengkonversikan Pecahan ke Desimal atau sebaliknya

$\frac{a}{b}$ dihitung dengan a dibagi b

Contoh 14
Konversikan ke bentuk desimal

a. $\frac{1}{8}$ b. $\frac{2}{5}$ c. $\frac{1}{40}$

Jawab:

a. $\frac{1}{8}$

$$
\begin{array}{r}
8\overline{)10} = 0{,}125 \\
\underline{8}\ - \\
20 \\
\underline{16}\ - \\
40 \\
\underline{40}\ - \\
0
\end{array}
$$

b. dengan cara yang sama $\frac{2}{5} = 0{,}4$

c. dengan cara yang sama $\frac{1}{40} = 0{,}025$

Contoh 15

Konversikan ke bentuk pecahan:

a. 0,45 b. 0,0025 c. 0,272727....

Jawab:

a. $0,45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$

b. $0,0025 = \frac{25}{10.000} = \frac{1}{400}$

c. $0,272727... = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$

6. Contoh-Contoh Soal Aplikasi

Contoh 16

Dita membeli kalkulator seharga Rp250.000,00, kemudian ia menjualnya dengan harga Rp300.000,00. Berapa persen keuntungan yang diperoleh Dita?

Jawab:

Untung = Harga jual – Harga beli

= Rp300.000,00 – Rp250.000,00 = Rp50.000,00

Persentase keuntungan $= \frac{\text{untung}}{\text{harga Beli}} \times 100\%$

$= \frac{50.000}{250.000} \times 100\% = 20\%$

Contoh 17

Tentukan nilainya pada soal-soal berikut:

a. 12% dari Rp400.000,00

b. $\frac{2}{7}$ dari Rp140.000,00

c. 0,7777... dari Rp81.000.000,00

Jawab:

a. 12% dari Rp400.000,00 = $\frac{12}{100} \times 400.000 = \frac{4.800.000}{100}$ = Rp48.000,00

b. $\frac{2}{7}$ dari Rp140.000,00 = $\frac{2}{7} \times 140.000$ = Rp40.000,00

c. 0,7777... dari Rp81.000.000,00 = $\frac{7}{9} \times 81.000.000$ = Rp63.000.000,00

Contoh 18

Harga barang setelah diskon 25% adalah Rp337.500,00. Tentukan harga barang sebelum diskon.

Jawab:

Harga barang setelah diskon 25% menjadi 75% sehingga diperoleh skema sebagai berikut:

	Harga barang		persentase
Sebelum diskon :	x	$\longrightarrow$	100%
Sesudah diskon :	Rp337.500,00	$\longrightarrow$	75%

$$\frac{x}{337.500} = \frac{100}{75}$$

$$x = \frac{337.500 \times 100}{75} = 450.000$$

Jadi, harga barang sebelum diskon adalah Rp450.000,00

Contoh 19

Pak Abdullah akan menjual berasnya sebanyak 50 karung dengan berat per karung 50 kg. Ia akan menjualnya melalui seorang komisioner bernama Pak Yassin dengan kesepakatan tarra 2% , rafaksi 10% dan komisi 20%. Jika beras dijual Rp3.000,00 per kg. Tentukan:

a. Hasil komisi yang diterima Pak Yassin.

b. Hasil penjualan yang diterima Pak Abdullah.

Jawab:

a. Berat bruto = 50 x 50 kg = 2.500 kg
Tarra = 2% x 2.500 kg = 50 kg _
Netto = 2.450 kg
Rafaksi = 10% x 2.450 kg = 245 kg _
Berat bersih setelah rafaksi = 2.205 kg
Hasil penjualan sebelum komisi = 2.205 kg x Rp3.000,00 = Rp6.615.000,00
Komisi yang diperoleh Pak Yassin = 20 % x Rp6.615.000,00 = Rp1.323.000,00
Keterangan:
% tarra = % berat pembungkus
Rafaksi = penyusutan
Bruto = berat kotor
Netto = berat bersih

b. Hasil penjualan yang diterima Pak Abdullah = Rp6.615.000,00 – Rp1.323.000,00
= Rp5.292.000,00

Contoh 20

Seorang sales alat-alat elektronik akan mendapatkan bonus mingguan 7,5% jika omset penjualannya antara Rp5.000.000,00 sampai dengan Rp10.000.000,00; akan mendapat bonus 10% jika omsetnya antara Rp10.000.000,00 sampai dengan Rp20.000.000,00; dan akan mendapat bonus 15% jika omsetnya di atas Rp20.000.000,00. Jika gaji tetapnya tiap bulan Rp1.750.000,00 dan hasil penjualannya pada bulan Mei 2007 sebagai berikut:

minggu pertama omsetnya Rp7.500.000,00
minggu kedua omsetnya Rp28.000.000,00
minggu ketiga omsetnya Rp Rp3.000.000,00
dan minggu keempat omsetnya Rp17.000.000,00.
Tentukan gaji dan bonus yang akan diterima karyawan tersebut pada awal Juni 2007.

Gambar 1-3 Situasi toko elektronik

Jawab:

Bonus minggu pertama = 7,5% x Rp7.500.000,00 = Rp 562.500,00
Bonus minggu kedua = 15% x Rp28.000.000,00 = Rp4.200.000,00
Bonus minggu ketiga = 0% x Rp3.000.000,00 = Rp 0
Bonus minggu keempat = 10% x Rp17.000.000,00 = Rp1.700.000,00 +
Bonus total yang diterima sales = Rp6.462.500,00
Jadi, jumlah gaji dan bonusnya pada awal Juni 2007
= Rp6.462.500,00 + Rp1.750.000,00 = Rp8.212.500,00.

Contoh 21

Seorang miliader meninggal dunia dan akan mewariskan hartanya kepada ketiga anaknya dengan pembagian sebagai berikut. Anak pertama mendapatkan jatah 30%, anak kedua dengan jatah 0,2222...., anak ketiga dengan jatah $\frac{1}{5}$ dan sisanya disumbangkan kepada beberapa yayasan sosial. Harta yang ditinggalkan sebesar Rp18 miliar. Berapa jatah masing-masing anak dan yang disumbangkan kepada yayasan sosial tersebut?

Jawab:

Jatah anak pertama = 30% x Rp18 miliar = Rp5,4 miliar

Jatah anak kedua = 0,222... x Rp18 miliar = $\frac{2}{9}$ x Rp18 milyar = 4 miliar

Jatah anak ketiga = $\frac{1}{5}$ x Rp 18 miliar = Rp3,6 miliar

Harta yang disumbangkan ke yayasan = Rp18 miliar – (Rp 5,4 + Rp 4 + Rp3,6) miliar
= Rp5 miliar atau
= $(1 - 30\% - 0{,}222... - \frac{1}{5})$ x Rp 18 miliar
= $(1 - \frac{3}{10} - \frac{2}{9} - \frac{1}{5})$ x Rp18 miliar
= $\left(\frac{90 - 27 - 20 - 18}{90}\right)$ x Rp18 miliar = Rp5 miliar

LATIHAN 1

1. Ubahlah menjadi bentuk persen dan pecahan.
   a. 0,45
   b. 0,28
   c. 0,025
   d. 0,025
   e. 0,0015
   f. 2,12

2. Ubahlah menjadi bentuk persen dan desimal.
   a. $\frac{3}{16}$
   b. $\frac{5}{16}$
   c. $\frac{3}{20}$
   d. $\frac{7}{8}$
   e. $\frac{6}{50}$
   f. $1\frac{3}{80}$
   g. $\frac{9}{4}$
   h. $\frac{9}{8}$
   i. $2\frac{17}{40}$

3. Ubahlah menjadi pecahan:
   a. 0,888...
   b. 1,363636...
   c. 0,222.....
   d. 0,121212....
   e. 0,630630...
   f. 0,0272727...
   g. 1,02222...
   h. 0,0363636...
   i. 0,05555....
   j. 2,121212...

4. Selesaikan soal-soal berikut.
   a. 128 + (-39)
   b. 8 + (-7)
   c. - 6 – 9
   d. -12 x 5
   e. 28 : -4
   f. -138 + (-80) + 50
   g. 57 – (-24) – 21
   h. 8 : 2 x 5 + 3
   i. 4 – 3 x 2
   j. 5 – 4 + 8 + (-3)

5. Selesaikan soal-soal berikut.
   a. $2\frac{1}{5} + 3\frac{1}{2}$
   b. $1\frac{5}{8} + \frac{3}{4}$
   c. $\frac{5}{8} \times \frac{2}{9}$
   d. $3\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{2}$
   e. $5\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2}$
   f. $3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{6}$
   g. $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}$
   h. $\frac{5}{6} - \frac{4}{7} + 2\frac{1}{2}$
   i. $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3}$
   j $2\frac{1}{5} : 1\frac{3}{7}$
   k. $3\frac{1}{6} + 2\frac{3}{7}$
   l. $4\frac{2}{5} - 3\frac{3}{8} + 1\frac{5}{2} - \frac{3}{3}$

6. Badru meninggal dunia dan hartanya sebesar Rp120.000.000,00 akan diwariskan kepada 4 anaknya. Ketiga anaknya masing-masing akan mendapatkan $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ dan $\frac{1}{5}$ dari harta warisannya. Sisanya diberikan kepada anaknya yang keempat. Berapakah warisan yang diperoleh mereka masing-masing?

7. Neni akan menjual berasnya sebanyak 75 karung dengan @ 60 kg, melalui seorang komisioner bernama Bahlul dengan ketentuan sebagai berikut. Tarra 1%, rafaksi 5% dan komisi 10%. Jika harga beras Rp4.000,00 tiap kg, tentukan:
   a. komisi yang diterima Bahlul,
   b. hasil penjualan yang diterima Neni.

8. Harga kalkulator setelah diskon 7% adalah Rp60.450,00. Tentukan harga kalkulator sebelum diskon.

9. Usman mengikuti suatu multilevel marketing (MLM) dengan ketentuan sebagai berikut.
   - Akan menerima bonus 3% jika omset < Rp5.000.000,00.
   - Bonus 5% jika Rp5.000.000,00 $\leq$ omset < Rp50.000.000,00.
   - Bonus 10% jika omset Rp50.000.000,00 lebih.
   - Bonus kerajinan 6% dari omset,

Pada bulan Januari, Februari, dan Maret omset Usman berturut-turut Rp3.500.000,00; Rp18.000.000,00; dan Rp50.000.000,00. Tentukan total bonus yang diterima Usman selama tiga bulan tersebut.

10. Seorang pedagang buah membeli mangga 1,5 kwintal dengan harga Rp5.000,00 per kg, 80 kg dengan harga Rp3.500,00 per kg, dan sisanya dijual dengan harga Rp2.000,00 per kg. Untung atau rugikah pedagang tersebut dan berapa untung atau ruginya?

11. Pak Pohan membeli 51 buku kwitansi dan mendapatkan diskon 15%. Jika Pak Pohan harus membayar ke kasir sebesar Rp306.000,00, berapa harga sebuah buku kwitansi tersebut sebelum diskon?

12. Badu, Tono, dan Deni akan membuka usaha bersama dengan nama “Grosir Alat Tulis” dengan modal masing-masing: Rp6.000.000,00; Rp9.000.000,00; dan Rp5.000.000,00. Pada akhir tahun pertama grosirnya mendapatkan Sisa Hasil Usaha (SHU) sebesar Rp30.000.000,00 dan pembagian SHU berdasarkan persentase modalnya dengan ketentuan 20% dari SHU digunakan untuk penambahan modal usaha. Berapa SHU yang diterima Badu, Tono dan Deni pada akhir tahun pertama?

13. Seorang pedagang berhasil menjual dagangannya Sebesar Rp280.000,00. Jika pedagang tersebut untung 12 %, tentukan harga beli barang tersebut.

14. Seorang karyawan mendapat bonus sebesar 12,5% dari gajinya karena rajin. Gaji karyawan semula Rp800.000,00, berapa gaji karyawan setelah mendapat bonus?

15. Badu menabung di bank sebesar Rp2.500.000,00. Jika bank memberikan bunga 6,5% setahun, tentukan uang Badu setelah satu tahun.

7. Perbandingan Senilai

Perbandingan disebut sebagai perbandingan senilai jika dua perbandingan nilainya sama, yaitu

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} \text{ atau } a \times b_1 = a_1 \times b$$

Contoh 22

Lima liter minyak mempunyai massa 4 kg dan 10 liter minyak mempunyai massa 8 kg. Perbandingan antara kuantitas minyak dan massanya dituliskan sebagai:

5 : 10 = 4 : 8 atau 1 : 2 = 1 : 2

Contoh 23

Perbandingan panjang dan lebar suatu bangunan adalah 3 : 2. Jika lebarnya 8 m, tentukan panjang dari bangunan tersebut.

Jawab:

$\frac{p}{\ell} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{p}{8} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow p = \frac{3 \times 8}{2} \Leftrightarrow p = 12$ m

Jadi, panjang bangunan adalah 12 m.

8. Perbandingan Berbalik Nilai

Perbandingan disebut perbandingan berbalik nilai jika dua perbandingan harganya saling berbalikan. Perbandingan berbalik nilai dapat dirumuskan dengan:

$$\frac{a}{b} = \frac{b_1}{a_1} \text{ atau } a \times a_1 = b \times b_1$$

Contoh 24

Suatu mobil berjalan sejauh (S) 120 km dalam waktu (t) 4 jam pada kecepatan (v) 30 km/jam. Bila kecepatannya 60 km/jam, maka jarak tersebut ditempuh dalam waktu 2 jam. Artinya, jika kecepatan mobil dilipatkan dengan suatu bilangan maka waktu yang diperlukan untuk menempuh jarak yang sama dibagi sesuai dengan bilangan kelipatannya.

Contoh 25

Suatu pekerjaan dapat diselesaikan oleh 3 pekerja selama 15 hari. Tentukan banyak pekerja yang harus ditambahkan agar pekerjaan dapat diselesaikan dalam waktu 5 hari.

Jawab:

Pekerja	Waktu	*(perbandingan berbalik nilai)*
3 orang	15 hari	
x	5 hari	

$\frac{3}{x} = \frac{5}{15} \Leftrightarrow x = \frac{3 \times 15}{5} \Leftrightarrow x = 9$

Jadi, pekerja yang perlu ditambahkan adalah (9 – 3) = 6 orang.

Contoh 26

Harga jual mesin ketik elektrik adalah Rp862.500,00. Jika dari harga penjualan tersebut mendapatkan untung 15%, tentukan harga belinya.

Jawab:

Harga jual setelah untung 15% menjadi 115%, sehingga diperoleh

	Harga barang		Persentase
Harga jual	Rp862.500,00	⟶	115%
Harga beli	x	⟶	100%

$\frac{862.500}{x} = \frac{115}{100} \Leftrightarrow x = \frac{862.500 \times 100}{115} \Leftrightarrow x = 750.000$

Jadi, harga beli adalah Rp750.000,00.

Contoh 27

Harga 100 buah buku besar setelah diskon 17,5% adalah Rp701.250,00. Tentukan besarnya diskon.

Jawab:
Harga barang setelah diskon 17,5% menjadi 82,5% sehingga diperoleh

	Harga barang		Persentase
Diskon	x	⟶	17,5%
Sesudah diskon	Rp701.250,00	⟶	82,5%

$$\frac{x}{701.250} = \frac{17,5}{82,5} \Leftrightarrow x = \frac{701.250 \times 17,5}{82,5} \Leftrightarrow x = 148.750$$

Jadi, besarnya diskon adalah Rp148.750,00.

Contoh 28

Karena malas, seorang karyawan dipotong gajinya sebesar 14%. Gaji karyawan setelah dipotong menjadi Rp1.032.000,00. Berapa gaji mula-mula sebelum dipotong.

Jawab:
Gaji setelah dipotong 14% menjadi 86% sehingga diperoleh

	Gaji		Persentase
Sebelum dipotong	x	⟶	100%
Sesudah dipotong	Rp1.032.000,00	⟶	86%

$$\frac{x}{1.032.000} = \frac{100}{86} \Leftrightarrow x = \frac{1.032.000 \times 100}{86} \Leftrightarrow x = 1.200.000$$

Jadi, gaji sebelum dipotong adalah Rp1.200.000,00.

Contoh 29

Seorang pengusaha rotan menerima order dari pengusaha Saudi Arabia untuk mengekspor hasil kerajinan rotannya. Untuk itu, pengusaha tersebut akan mempekerjakan 500 pengrajin dan akan diselesaikan dalam waktu 18 hari. Setelah berjalan 6 hari, pekerjaan dihentikan selama 2 hari. Supaya pekerjaan selesai pada waktu yang telah direncanakan, tentukan jumlah pekerja yang harus ditambah.

Gambar: 1-4 Barang kerajinan rotan

Jawab:
Setelah berjalan 6 hari, waktu yang tersisa hanya 12 hari, istirahat selama 2 hari, sehingga waktu yang tersisa untuk menyelesaikan bangunan sesuai rencana hanya 10 hari. Akibatnya harus menambah pekerja. Untuk menyelesaikannya, lihat penyelesaian berikut.

	Pekerja		Waktu
Rencana semula	500	⟶	12 hari
Waktu tersisa	x	⟶	10 hari

$$\frac{x}{500} = \frac{12}{10} \Leftrightarrow x = \frac{12 \times 500}{10} \Leftrightarrow x = 600$$

Jadi, pekerja yang harus ditambah (600 – 500) pekerja = 100 pekerja.

9. Skala

Skala ialah bentuk perbandingan senilai dari ukuran suatu besaran nyata.
Simbol untuk menyatakan skala adalah " **:** "
Misalnya skala pada peta tertulis 1 : 1.000.000 artinya jika pada peta 1 cm, maka jarak sebenarnya adalah 1.000.000 cm atau 10 km.

Contoh 30
Jarak 2 kota pada peta 7,5 cm. Jika skala pada peta 1 : 150.000, berapakah jarak sesungguhnya?
Jawab:
Jarak sesungguhnya = 7,5 cm x 150.000
= 1.125.000 cm = 11,25 km

Contoh 31
Panjang sebenarnya suatu pintu 2,2 m, dan dilukis oleh arsitek dengan skala 1: 55. Tentukan panjang pintu dalam lukisan.

Jawab:
Panjang pintu dalam lukisan = 2,2 m : 55 = 220 cm : 55 = 4 cm

Contoh 32
Jarak Jakarta – Surabaya sesungguhnya adalah 800 km. Jika di dalam peta digambar sepanjang 20 cm, tentukan skalanya.

Jawab:
Skala = 20 cm : 800 km
= 20 cm : 80.000.000 cm = 1 : 4.000.000

Contoh 33
Jarak Jakarta – Cirebon sesungguhnya adalah 280 km, digambar dalam peta 14 cm. Berapakah jarak sebenarnya Jakarta – Subang yang di dalam peta berjarak 8 cm?

Jawab:

$$\frac{\text{Jarak sebenarnya 1}}{\text{Jarak sebenarnya 2}} = \frac{\text{Jarak dalam peta 1}}{\text{Jarak dalam peta 2}}$$

$$\frac{280 \text{ km}}{x} = \frac{14 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} \Leftrightarrow x = \frac{8}{14} \text{ x } 280 \text{ km} \Leftrightarrow x = 160 \text{ km}$$

Jadi, Jarak Jakarta – Subang adalah 160 km.

B. Rangkuman Operasi pada Bilangan Riil

1. Sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan riil meliputi sifat
   - komutatif,
   - asosiatif,
   - memiliki unsur identitas penjumlahan(0),
   - memiliki unsur identitas perkalian (1),
   - Memiliki invers perkalian dan penjumlahan.

2. Untuk penjumlahan pecahan, berlaku rumus berikut

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$
$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$	$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$

3. Perkalian dan pembagian pecahan:

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$

4. Mengonversikan pecahan ke persen atau sebaliknya

$\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\times 100\ \%$	$P\ \% = \frac{p}{100}$

5. Mengonversikan pecahan ke desimal atau sebaliknya

$\frac{a}{b}$ dihitung dengan a dibagi b

6. Pada perkalian dan pembagian bilangan bulat, rasional dan riil berlaku rumus berikut:

$a \times b = ab$ $a : b = \frac{a}{b}$	$a \times (-b) = -(ab)$ $a : (-b) = -\left(\frac{a}{b}\right)$	$(-a) \times b = -(ab)$ $(-a) : b = -\left(\frac{a}{b}\right)$	$(-a) \times (-b) = ab$ $(-a) : (-b) = \frac{a}{b}$

7. Sifat disributif perkalian dengan penjumlahan atau pengurangan adalah sebagai berikut.

$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

8. Perbandingan senilai, $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$ atau $a \times b_1 = a_1 \times b$

9. Perbandingan berbalik nilai, $\frac{a}{b}=\frac{b_1}{a_1}$ atau $a \times a_1 = b \times b_1$

10. Perhitungan pada skala berlaku rumus berikut
    - Jarak pada gambar = skala x jarak sebenarnya
    - Jarak sebenarnya = jarak pada gambar : skala

LATIHAN 2

1. Seorang tukang bangunan dapat menghabiskan 2 sak semen untuk membangun 10 m^2 dinding. Jika dia akan membangun dinding seluas 15 m^2, berapa sak semen yang diperlukan?

2. Suatu gedung direncanakan akan dibangun selama 60 minggu dengan 500 pekerja. Jika rencana pembangunan gedung dipercepat menjadi 50 minggu, berapa pekerja yang harus ditambah?

3. Panjang as sebuah rotor digambar dengan panjang radiusnya 5 cm. Jika skala ukuran itu 1 : 20, berapakah ukuran radius sesungguhnya?

4. Panjang sebuah mobil sedan sesungguhnya adalah 3,5 m. Berapakah panjang sedan pada layar TV jika skalanya 1 : 50?

5. Sebatang perunggu terbuat dari 100 Kg tembaga, 20 Kg timah hitam, dan 30 Kg timah putih. Berapakah persentase tiap-tiap bahan tersebut dalam perunggu itu?

6. Jika jarak Solo-Surabaya sebenarnya 500 km ternyata di gambar dalam peta hanya 25 cm. Tentukan skalanya.

7. Dalam peta, jarak kota A – B = 13 cm dan jarak kota C – D = 18 cm. Jika jarak sebenarnya kota A – B adalah 390 km, berapakah jarak sebenarnya kota C – D?

8. Ujang jalan-jalan dengan mobil bersama temannya ke Bandung. Kecepatan rata-rata mobil yang dikendarai 50 km/jam, dan memerlukan waktu 4 jam untuk sampai di Bandung. Badru terlambat 1,5 jam dibanding Ujang dan menyusul dengan menggunakan mobil lain. Jika Badru menghendaki sampai di Bandung bersama-sama dengan Ujang, maka berapa kecepatan rata-rata Badru mengendarai mobilnya?

9. Sederhanakan perbandingan di bawah ini.

a. 5: 125	d. $1\frac{1}{2} : 3$	g. $2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$	j. 25 cm : 1 m
b. 12 : 80	e. $2\frac{1}{3} : 3\frac{2}{5}$	h. 2,5 m : 50 cm	k. 20 % : 0,75
c. $3\frac{1}{2} : 10\frac{1}{2}$	f. $2\frac{1}{3} : 3\frac{2}{5}$	i. 250 g : 1,25 Kg	l. $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{2}{5}$

10. Perbandingan panjang : lebar : tinggi suatu balok adalah 7 : 3 : 2. Jika lebarnya 12 cm, tentukanlah:
    a. panjang dan tinggi balok,
    b. jumlah panjang rusuk balok.

11. Karena prestasinya baik, seorang karyawan mendapatkan bonus 23% dan ia menerima gaji dengan bonusnya sebesar Rp1.722.000,00. Tentukan gaji karyawan tersebut sebelum ditambah bonus.

12. Seorang pedagang mendapatkan kerugian 34%. Jika barangnya dijual dengan harga Rp165.000,00, hitung kerugiannya.

13. Seorang tukang akan membuat pintu dengan bentuk persegi panjang. Pada gambar panjangnya 4 cm dan lebarnya 2 cm. Jika panjang pintu sebenarnya 2,5 m, hitunglah lebar daun pintu sebenarnya.

14. Seorang pemborong bangunan harus mengeluarkan uang Rp30.000,00 per orang setiap harinya untuk menyelesaikan suatu pekerjaan. Jika 5 orang dapat menyelesaikan pekerjaan itu selama 10 hari, maka untuk menyelesaikan pekerjaan selama 5 hari, hitunglah:
    a. jumlah pekerja yang diperlukan pemborong itu, dan
    b. jumlah uang yang dikeluarkannya.

15. Sebuah lukisan berukuran 20 cm x 25 cm. Jika skalanya 1 : 200, berapakah ukuran luas lukisan itu sesungguhnya?

16. Jumlah siswa SMK Kelompok Bisnis dan Manajemen sebanyak 600 orang, terdiri atas 40% memilih jurusan Akuntansi, 25% memilih jurusan Administrasi Perkantoran, dan sisanya memilih jurusan Penjualan. Berapakah jumlah siswa masing-masing jurusan tersebut?

17. Jumlah uang Neni, Liana dan Devi besarnya Rp390.000,00. Jika perbandingan uang Neni : Lliana : Devi adalah 5 : 2 : 6, tentukan uang mereka masing-masing.

18. Denah rumah dibuat dengan skala 1: 100.
    a. Jika luas pada denah 1 cm^2, berapakah luas sebenarnya?
    b. Jika luas pada denah 18 cm^2, berapakah luas sebenarnya?

19. Suatu gedung direncanakan akan dibangun oleh 200 pekerja selama 75 minggu. Setelah berjalan 15 minggu, pembangunan dihentikan sementara selama 20 minggu. Jika pembangunan ingin selesai sesuai rencana semula, berapakah pekerja yang harus ditambahkan dalam pembangunan tersebut?

20. Skala denah suatu gedung 1: 400. Luas tanah yang akan dibangun berukuran 80 cm x 50 cm. Berapa:
    a. ukuran tanah sebenarnya?
    b. luas tanah sebenarnya?

21. Harga barang setelah diskon 17,5% adalah Rp123.750,00.Tentukanlah harga barang tersebut sebelum diskon.

22. Karena kurang laku, toko elektronik mengobral mesin ketik elektriknya sehingga hanya memperoleh hasil penjualan Rp1.424.000,00. Setelah dihitung, toko tersebut rugi 11%. Tentukan harga belinya.

C. Bilangan Berpangkat

Setelah mempelajari materi pada kompetensi dasar ini, kalian diharapkan dapat:

- mengalikan dua bilangan berpangkat yang bilangan pokoknya sama,
- membagi dua bilangan berpangkat yang bilangan pokoknya sama,
- memangkatkan bilangan berpangkat,
- memangkatkan dari perkalian dua bilangan,
- memangkatkan dari pembagian dua bilangan,
- mengubah pangkat negatif ke pangkat positif, dan
- mengubah pangkat pecahan ke bentuk akar pangkat.

1. Pengertian bilangan berpangkat

Bilangan berpangkat dirumuskan sebagai berikut

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n}$$

Contoh 34

a. $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

b. $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

c. $(\frac{1}{3})^5 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{243}$

d. $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

2. Aturan Dasar Pengoperasian Bilangan Berpangkat

a. Perkalian Bilangan Berpangkat yang Bilangan Pokoknya Sama

$$\boxed{a^p \times a^q = a^{p+q}}$$

Contoh 35

a. $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

b. $(\frac{1}{3})^2 \times (\frac{1}{3})^3 = (\frac{1}{3})^{2+3} = (\frac{1}{3})^5 = \frac{1}{243}$

c. $3^5 \times 3 = 3^{5+1} = 3^6$

d. $10 \times 10^6 = 10^{1+6} = 10^7$

e. $5^3 \times 5^{-1} = 5^{3+(-1)} = 5^2$

b. Pembagian Bilangan Berpangkat yang Bilangan Pokoknya Sama

$$\boxed{a^p : a^q = a^{p-q}}$$

Contoh 36

a. $3^8 : 3^5 = 3^{8-5} = 3^3 = 27$

b. $(\frac{1}{5})^4 : (\frac{1}{5})^2 = (\frac{1}{5})^{4-2} \; (\frac{1}{5})^2 = \frac{1}{25}$

c. $3^5 : 3 = 3^{5-1} = 3^4$

d. $10 : 10^6 = 10^{1-6} = 10^{-5}$

e. $5^3 : 5^{-1} = 5^{3-(-1)} = 5^4$

c. Pemangkatan Bilangan Berpangkat

$$(a^p)^q = a^{p \times q}$$

Contoh 37

a. $(2^2)^5 = 2^{2 \times 5} = 2^{10} = 1024$

b. $(5^{\frac{1}{4}})^4 = 5^{\frac{1}{4} \times 4} = 5$

c. $81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^{4 \times \frac{3}{4}} = 3^3 = 27$

d. $32^{\frac{3}{5}} = (2^5)^{\frac{3}{5}} = 2^{5 \times \frac{3}{5}} = 2^3 = 8$

e. $10.000.000^{\frac{2}{7}} = (10^7)^{\frac{2}{7}} = 10^2 = 100$

d. Pemangkatan dari Perkalian Dua Bilangan

$$(a \times b)^p = a^p \times b^p$$

Contoh 38

a. $(3 \times 5)^2 = 3^2 \times 5^2 = 9 \times 25 = 225$
b. $2^4 \times 5^4 = (2 \times 5)^4 = 10^4 = 10.000$
c. $25^5 \times 4^5 = (25 \times 4)^5 = 100^5$

e. Pemangkatan dari Pembagian Dua Bilangan

$$(a : b)^p = a^p : b^p$$

Contoh 39

a. $(12 : 4)^5 = 12^5 : 4^5 = 248832 : 1024 = 243$

b. $100^4 : 50^4 = (100 : 50)^4 = 2^4 = 16$

f. Bilangan Berpangkat Negatif

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

Contoh 40

a. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

b. $5^{-1} = \frac{1}{5}$

c. $0{,}008 = \frac{8}{1.000} = \frac{1}{125} = 5^{-3}$

d. $10 : 10^6 = 10^{1-6} = 10^{-5} = \frac{1}{100.000} = 0{,}00001$

e. $(\frac{1}{81})^{\frac{3}{4}} = (3^{-4})^{\frac{3}{4}} = 3^{-4 \times \frac{3}{4}} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

g. Pemangkatan Bilangan Pecahan

$$\mathbf{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}}$$

Contoh 41

a. $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

b. $\sqrt[4]{5^8} = 5^{\frac{8}{4}} = 5^2 = 25$

c. $8^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{8^1} = \sqrt{8}$

d. $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

e. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

Contoh 42

Carilah nilai x yang memenuhi persamaan di bawah ini.

a. $4^{3x} = 32$ b. $9^{2x-1} = 27^{4-3x}$

Jawab:

a. Nyatakan ruas kiri dan kanan dalam bentuk eksponen/pangkat sedemikian sehingga bilangan pokok kedua ruas tersebut sama. Jika bilangan pokok kedua ruas tersebut sudah sama, maka disamakan kedua eksponennya.

$$\begin{aligned} 4^{3x} &= 32 \\ (2^2)^{3x} &= 2^5 \\ 2^{6x} &= 2^5 \quad \text{(Bilangan pokok kedua ruas sudah sama)} \\ 6x &= 5 \\ x &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 9^{2x-1} &= 27^{4-3x} \\ (3^2)^{2x-1} &= (3^3)^{4-3x} \\ 3^{4x-2} &= 3^{12-9x} \quad \text{(Bilangan pokok kedua ruas sudah sama)} \\ 4x - 2 &= 12 - 9x \\ 4x + 9x &= 12 + 2 \\ 13x &= 14 \\ x &= \frac{14}{13} \end{aligned}$$

D. Rangkuman Bilangan Berpangkat

1. Perkalian bilangan berpangkat yang bilangan pokoknya sama, $a^p \times a^q = a^{p+q}$

2. Pembagian bilangan berpangkat yang bilangan pokoknya sama, $a^p : a^q = a^{p-q}$

3. Pemangkatan bilangan berpangkat, $(a^p)^q = a^{p \times q}$

4. Pemangkatan dari perkalian dua bilangan, $(a \times b)^p = a^p \times b^p$

5. Pemangkatan dari pembagian dua bilangan, $(a : b)^p = a^p : b^p$

6. Bilangan berpangkat negatif, $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$

7. Pemangkatan bilangan pecahan, $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

LATIHAN 3

Ubahlah soal-soal di bawah ini menjadi bentuk pangkat yang paling sederhana.

1. $7^3 \times 7^5 \times 7^{-2}$
2. $(\frac{1}{5})^2 \times (\frac{1}{5})^{-4} \times (\frac{1}{5})$
3. $3^5 \times 3 : 3^2$
4. $10 \times 10^6 \times 10^{-4} : 10^7$
5. $5^3 \times 5^{-1} : 5^5 \times 5^2$
6. $3^8 : 3^{-2}$
7. $(\frac{1}{8})^4 : (\frac{1}{4})^2$
8. $(\frac{1}{3})^5 : 9$
9. $10 : 100^{-2}$
10. $5^3 \times (\frac{1}{25})^{-1} : 5^2$
11. $0{,}25^{-\frac{1}{2}} \times 5^{-1}$
12. $216^{\frac{2}{3}} \times (\frac{1}{49})^{-4} \times 81^{-\frac{3}{4}}$
13. $10^4 : 10^6 \times 10 : 10^{10}$
14. $(\frac{1}{10.000})^{\frac{3}{4}}$
15. $5^{\frac{2}{3}} \times 25^{\frac{2}{3}} \times 8^{\frac{2}{3}}$
16. $\sqrt[4]{81^3}$
17. $\sqrt[5]{32^3} \times \sqrt[3]{125^2}$
18. $\sqrt{81^3} \times \sqrt[4]{16}$
19. $343^{\frac{2}{3}} \times 81^{\frac{3}{4}}$
20. $(1.000 \times 343)^{\frac{2}{3}}$

Ubahlah soal-soal di bawah ini menjadi bentuk pangkat yang paling sederhana.

21. $(2^4)^5 \times 2^3$
22. $(5^{\frac{1}{2}})^6 : 5^4$
23. $81^{\frac{1}{4}} \times (9^2)^{\frac{3}{4}}$
24. $32^{\frac{4}{5}} : (2^5)^{\frac{3}{5}}$
25. $100.000^{\frac{3}{5}} \times (10^{-3})^{-\frac{2}{3}}$
26. $(27 \times 125)^{\frac{1}{3}}$
27. $2^{-3} \times (32 \times 243)^{\frac{4}{5}}$
28. $125^{\frac{2}{3}} \times 8^{\frac{2}{3}} \times (25 \times 4)^0$
29. $54^{\frac{2}{3}} : 2^{\frac{2}{3}}$
30. $3^{-4} : 3^{-3}$
31. $32^{-\frac{3}{5}} : (2^5)^{\frac{4}{5}}$
32. $5^2 \times (\frac{1}{125})^{-1} : 25^2$
33. $(\frac{1}{9})^{-5} : 3$
34. $3^3 \times 3^{-1} : 3^5 \times 3^2$
35. $500^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times (125 \times 3)^0$
36. $(5^{\frac{1}{3}})^9 : 5^{-3}$
37. $\sqrt{121^3} \times \sqrt[4]{10.000}$
38. $512^{\frac{2}{3}} \times 81^{-\frac{3}{4}} \times (\frac{1}{256})^{-4}$
39. $0{,}125^{-\frac{1}{3}} \times 5^{-2}$
40. $100.000^{-\frac{3}{5}} \times (0{,}1^3)^{-\frac{2}{3}}$

41. Tentukan harga x yang memenuhi persamaan eksponen berikut ini.

a. $2^{2x} = 32$ c. $10^{2x-1} = \frac{1}{1000}$

b. $16^x = \frac{1}{2}$ d. $5^{2x-1} = 125$

E. Bilangan Irasional

Setelah mempelajari materi pada kompetensi dasar ini, kalian diharapkan dapat:

- membedakan bentuk akar dan bukan bentuk akar,
- mengoperasikan bentuk akar,
- menyederhanakan bentuk akar, dan
- merasionalkan penyebut dari bentuk akar.

1. Definisi Bentuk Akar

Seperti yang sudah dibahas pada subkompetensi sebelumnya, bahwa $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.
Bentuk akar adalah akar dari suatu bilangan yang nilainya merupakan bilangan iirasional. Contoh: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{50}$, dan lain-lain.

Contoh bukan bentuk akar, $\sqrt{1}$ sebab $\sqrt{1} = 1$ (bukan bilangan irasional)
$\sqrt{4}$ sebab $\sqrt{4} = 2$
$\sqrt{64}$ sebab $\sqrt{64} = 8$ dan lain-lain.

2. Menyederhanakan Bentuk Akar

Bentuk akar dapat disederhanakan dengan cara mengubah bilangan di dalam akar tersebut menjadi dua bilangan di mana bilangan yang satu dapat diakarkan, sedangkan bilangan yang lain tidak dapat diakarkan.

Contoh 43

Sederhanakan bentuk akar di bawah ini.

a. $\sqrt{32}$ b. $\sqrt{18}$ c. $\sqrt{24}$ d. $\sqrt{80}$ e. $\sqrt{147}$

Jawab:

a. $\sqrt{32} = \sqrt{16\cdot 2}$ boleh $\sqrt{32} = \sqrt{8\cdot 4}$ tetapi menyederhanakannya dua kali

$= \sqrt{16}\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

b. $\sqrt{18} = \sqrt{9\cdot 2} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

c. $\sqrt{24} = \sqrt{4\cdot 6} = 2\sqrt{6}$

d. $\sqrt{80} = \sqrt{16\cdot 5} = 4\sqrt{5}$

e. $\sqrt{147} = \sqrt{49\cdot 3} = 7\sqrt{3}$

3. Mengoperasikan Bentuk Akar

a. Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

Bentuk akar dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika bentuk akarnya sejenis.

Contoh 44

Sederhanakan bentuk akar di bawah ini.

a. $\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

b. $3\sqrt{6} + \sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 5\sqrt{6}$

c. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7}$

d. $\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{5} + 5\sqrt{3}$

e. $\sqrt{32} + \sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$

f. $\sqrt{20} + \sqrt{28} - \sqrt{125} + \sqrt{63} - \sqrt{80}$

Jawab:

a. $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (1 + 2)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

b. $3\sqrt{6} + \sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 5\sqrt{6} = (3 + 1 + 4 - 5)\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

c. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7}$ tidak dapat disederhanakan karena bentuk akarnya berlainan

d. $\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{5} + 5\sqrt{3} = (1 - 4)\sqrt{5} + (2 + 5)\sqrt{3} = -3\sqrt{5} + 7\sqrt{3}$

e. $\sqrt{32} + \sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{98} = \sqrt{16\cdot 2} + \sqrt{4\cdot 2} + \sqrt{25\cdot 2} - \sqrt{49\cdot 2}$

$= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f. $\sqrt{20} + \sqrt{28} - \sqrt{125} + \sqrt{63} - \sqrt{80} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{5} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{5}$

$= -7\sqrt{5} + 5\sqrt{7}$

b. Perkalian Bilangan Bulat dengan Bentuk Akar

$$a \times b\sqrt{c} = ab\sqrt{c}$$

Contoh 45

Selesaikan dan sederhanakan bentuk akar di bawah ini.

a. $4x3\sqrt{2}$

b. $5x\sqrt{50}$

c. $10x4\sqrt{20}$

d. $3x(6\sqrt{2} + \sqrt{18})$

e. $6x(\sqrt{27} - \sqrt{108})$

Jawab:

a. $4x3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

b. $5x\sqrt{50} = 5\sqrt{50} = 5\sqrt{25 \cdot 2} = 5x5\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$

c. $10x4\sqrt{20} = 40\sqrt{20} = 40x2\sqrt{5} = 80\sqrt{5}$

d. $3x\,(6\sqrt{2} + \sqrt{18}) = 3 \text{ x } 6\sqrt{2} + 3\sqrt{18} = 18\sqrt{2} + 3x3\sqrt{2} = 18\sqrt{2} + 9\sqrt{2} = 27\sqrt{2}$

e. $6x(\sqrt{27} - \sqrt{108}) = 6\sqrt{27} - 6\sqrt{108} = 6x3\sqrt{3} - 6x6\sqrt{3} = 18\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = -18\sqrt{3}$

c. Perkalian Bentuk Akar dengan Bentuk Akar

$$\sqrt{a} \text{ x } \sqrt{b} = \sqrt{a \text{ x } b} \qquad a\sqrt{c} \text{ x } b\sqrt{d} = a \text{ x } b\sqrt{c \text{ x } d} \qquad \sqrt{a} \text{ x } \sqrt{a} = a$$

Contoh 46

Kalikan dan sederhanakan bentuk akar di bawah ini.

a. $\sqrt{3} \text{ x } \sqrt{2}$

b. $5\sqrt{6} \text{ x } \sqrt{3}$

c. $2\sqrt{5} \text{ x } 3\sqrt{6}$

d. $\sqrt{20} \text{ x } \sqrt{27}$

e. $2\sqrt{6} \text{ x } (7\sqrt{2} + 4\sqrt{5})$

f. $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{6} + 4)$

g. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{7})(2\sqrt{2} + \sqrt{6})$

h. $(\sqrt{12} + \sqrt{5})(\sqrt{12} - \sqrt{5})$

Jawab:

a. $\sqrt{3} \text{ x } \sqrt{2} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{6}$

b. $5\sqrt{6} \text{ x } \sqrt{3} = 5\sqrt{6 \times 3} = 5\sqrt{18} = 5x3\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

c. $2\sqrt{5} \text{ x } 3\sqrt{6} = (2 \text{ x } 3)\sqrt{5.6} = 6\sqrt{30}$

d. $\sqrt{20} \text{ x } \sqrt{27} = 2\sqrt{5} \text{ x } 3\sqrt{3} = 6\sqrt{15}$

e. $2\sqrt{6} \text{ x } (7\sqrt{2} + 4\sqrt{5}) = (2\sqrt{6} \text{ x } 7\sqrt{2}) + (2\sqrt{6} \text{ x } 4\sqrt{5}) = 14\sqrt{12} + 8\sqrt{30}$
$= 14 \times 2\sqrt{3} + 8\sqrt{30} = 28\sqrt{3} + 8\sqrt{30}$

f. $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{6} + 4) = \sqrt{2} \text{ x } \sqrt{6} + 4\sqrt{2} + \sqrt{5} \text{ x } \sqrt{6} + 4\sqrt{5}$
$= \sqrt{12} + 4\sqrt{2} + \sqrt{30} + 4\sqrt{5} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + \sqrt{30} + 4\sqrt{5}$

g. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{7})(2\sqrt{2} + \sqrt{6}) = 6\sqrt{4} + 3\sqrt{12} - 4\sqrt{14} - 2\sqrt{42}$
$= 12 + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{14} - 2\sqrt{42}$

h. $(\sqrt{12} + \sqrt{5})(\sqrt{12} - \sqrt{5}) = 12 - \sqrt{60} + \sqrt{60} - 5 = 12 - 5 = 7$

Dari contoh terakhir dapat disimpulkan sebagai berikut.

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

Contoh 47

a. $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$

b. $(\sqrt{15} - \sqrt{12})(\sqrt{15} + \sqrt{12}) = 15 - 12 = 3$

c. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = (\sqrt{18} + \sqrt{12})(\sqrt{18} - \sqrt{12}) = 18 - 12 = 6$

d. Pembagian Bentuk Akar

Penyederhanaan pembagian bentuk akar sering disebut dengan istilah “merasionalkan penyebut“ bentuk pecahan.
Untuk merasionalkan penyebut bentuk pecahan, lihatlah rumus di bawah ini.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \text{ x } \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{k}{a+\sqrt{b}} = \frac{k}{a+\sqrt{b}} \text{ x } \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{k(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$$

$$\frac{k}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{k}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \text{ x } \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{k(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

Contoh 48

Rasionalkan penyebut dari pecahan di bawah ini.

a. $\frac{8}{\sqrt{2}}$

b. $\frac{10}{2\sqrt{5}}$

c. $\frac{15}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

d. $\frac{8}{5-\sqrt{17}}$

e. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

f. $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$

Jawab:

a. $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \text{ x } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

b. $\frac{10}{2\sqrt{5}} = \frac{10}{2\sqrt{5}} \text{ x } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2 \text{ x } 5} = \sqrt{5}$

c. $\frac{15}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} \text{ x } \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{15(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{7-2} = 3\sqrt{7} - 3\sqrt{2}$

d. $\dfrac{8}{5-\sqrt{17}} = \dfrac{8}{5-\sqrt{17}} \text{ x } \dfrac{5+\sqrt{17}}{5+\sqrt{17}} = \dfrac{8(5+\sqrt{17})}{5^2-17} = 5+\sqrt{17}$

e. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \text{ x } \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{3-2} = \dfrac{3-2\sqrt{6}+2}{1} = 5-2\sqrt{6}$

f. $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} \text{ x } \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{50}}{10} = \dfrac{2.5\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}$

F. Rangkuman Bilangan Irasional

1. Bentuk akar adalah akar dari suatu bilangan yang nilainya merupakan bilangan irasional.
2. Bentuk akar dapat disederhanakan dengan cara mengubah bilangan di dalam akar tersebut menjadi dua bilangan dimana bilangan yang satu dapat diakarkan, sedangkan bilangan yang lain tidak dapat diakarkan.
3. Bentuk akar dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika bentuk akarnya sejenis
4. Perkalian bilangan bulat dengan bentuk akar: $a \text{ x } b\sqrt{\mathbf{c}} = ab\sqrt{\mathbf{c}}$
5. Perkalian bentuk akar dengan bentuk akar:

   $\sqrt{a} \text{ x } \sqrt{b} = \sqrt{a \text{ x } b}$ $\quad a\sqrt{c} \text{ x } b\sqrt{d} = a \text{ x } b\sqrt{c \text{ x } d}$ $\quad \sqrt{a} \text{ x } \sqrt{a} = a$

6. Untuk merasionalkan penyebut bentuk pecahan, lihatlah rumus di bawah ini.

   a. $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}} \text{ x } \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

   b. $\dfrac{k}{a+\sqrt{b}} = \dfrac{k}{a+\sqrt{b}} \text{ x } \dfrac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \dfrac{k(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$

   c. $\dfrac{k}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{k}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \text{ x } \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{k(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$

LATIHAN 4

Sederhanakan bentuk akar di bawah ini.

1. $\sqrt{200} + \sqrt{18} + \sqrt{800} - \sqrt{72}$
2. $\sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{75}$
3. $\sqrt{125} + \sqrt{28} - \sqrt{80} + \sqrt{700}$
4. $4 \text{ x } (3\sqrt{5} + \sqrt{50})$
5. $3\sqrt{6} \text{ x } (\sqrt{18} - \sqrt{54})$
6. $2\sqrt{3} \text{ x } (2\sqrt{40} + \sqrt{12})$
7. $\sqrt{600} + \sqrt{24} + \sqrt{216} - \sqrt{54}$
8. $3\sqrt{44} + \sqrt{110} - \sqrt{99}$
9. $4\sqrt{150} - 3\sqrt{54} - \sqrt{294} + 2\sqrt{486}$
10. $5\sqrt{5} \text{ x } (3\sqrt{2} + \sqrt{200})$
11. $3\sqrt{24} \text{ x}(\sqrt{6} - \sqrt{54})$
12. $4\sqrt{3} \text{ x } (2\sqrt{20} + 5\sqrt{12})$

13. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
14. $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{4} + \sqrt{6})$
15. $(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} - \sqrt{5})$
16. $(\sqrt{28} - \sqrt{12})(2\sqrt{7} + 2\sqrt{3})$
17. $2\sqrt{6} \times \sqrt{6} + \sqrt{9}$
18. $\sqrt{5} \times \sqrt{30}$
19. $4\sqrt{7} \times 3\sqrt{28}$
20. $\sqrt{200} \times 5\sqrt{2}$
21. $2\sqrt{5} \times (7\sqrt{2} - 4\sqrt{20})$
22. $(\sqrt{5} + \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{6})$
23. $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})(2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})$
24. $(6 + \sqrt{5})(6 - \sqrt{5})$
25. $(2\sqrt{27} - \sqrt{15})(6\sqrt{3} + \sqrt{15})$
26. $2\sqrt{5} \times \sqrt{5} + \sqrt{7}(2\sqrt{7} - \sqrt{3})$
27. $\sqrt{50} \times \sqrt{20}$
28. $(4\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{3})^2$
29. $\sqrt{300} \times \sqrt{27}$
30. $2\sqrt{11} \times (6\sqrt{11} - \sqrt{2})$

Rasionalkan penyebut pada soal berikut.

31. $\frac{5}{\sqrt{5}}$
32. $\frac{100}{4\sqrt{10}}$
33. $\frac{10}{\sqrt{13}+\sqrt{8}}$
34. $\frac{4}{4-\sqrt{14}}$
35. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$
36. $\frac{20}{\sqrt{10}}$
37. $\frac{2\sqrt{8}}{5\sqrt{2}}$
38. $\frac{24}{\sqrt{13}+\sqrt{7}}$
39. $\frac{6}{4-2\sqrt{3}}$
40. $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$

G. Logaritma

Setelah mempelajari materi pada kompetensi dasar ini kalian diharapkan dapat
- menjelaskan konsep logaritma,
- menjelaskan sifat-sifat logaritma,
- menggunakan tabel logaritma, dan
- melakukan operasi logaritma dengan sifat-sifat logaritma.

1. Logaritma Biasa (Briggs)

Secara umum ditulis, $a^c = b \Leftrightarrow {}^a\log b = c$

- a disebut bilangan pokok logaritma atau Basis
- b disebut yang dilogaritmakan
- c disebut hasil logaritma
- $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$
- bilangan pokok 10 boleh tidak ditulis.

2. Sifat-Sifat Logaritma

a. ${}^p\log (a \times b) = {}^p\log a + {}^p\log b$

b. ${}^p\log \frac{a}{b} = {}^p\log a - {}^p\log b$

c. ${}^p\log a^n = n.\ {}^p\log a$

d. ${}^a\log b = \frac{{}^p\log b}{{}^p\log a}$

e. $\frac{1}{{}^a\log b} = {}^b\log a$

f. $^{a^n}\log a^m = \frac{m}{n}$

g. $^{b^n}\log a^m = \frac{m}{n}.\ ^{b}\log a$

dengan a > 0, b > 0 ,p ≠ 1 dan p > 0
$^{p}\log 1 = 0$
$^{p}\log p = 1$

Contoh 49
Dengan menggunakan sifat logaritma, tentukan nilai dari soal-soal logaritma berikut.

a. $^{3}\log 9$ b. $^{2}\log 32$ c. $^{4}\log 8$ d. $^{\frac{1}{25}}\log 125$ e. $^{\sqrt{6}}\log \frac{1}{216}$

Jawab:

a. $^{3}\log 9 = {}^{3}\log 3^2 = 2 \text{ x } {}^{3}\text{Log } 3 = 2 \text{ x}1 = 2$

b. $^{2}\log 32 = {}^{2}\log 2^5 = 5 \text{ x } {}^{2}\log 2 = 5$

c. $^{4}\log 8 = \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{\log 2^3}{\log 2^2} = \frac{3 \times \log 2}{2 \times \log 2} = \frac{3}{2}$

atau dengan rumus (f), $^{4}\log 8 = {}^{2^2}\log 2^3 = \frac{3}{2}$

d. $^{\frac{1}{25}}\log 125 = \frac{\log 125}{\log \frac{1}{25}} = \frac{\log 5^3}{\log 5^{-2}} = \frac{3 \times \log 5}{-2 \times \log 5} = -\frac{3}{2}$

atau dengan rumus (f), $^{\frac{1}{25}}\log 125 = {}^{5^{-2}}\log 5^3 = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

e. $^{\sqrt{6}}\log \frac{1}{216} = {}^{6^{0,5}}\log 6^{-3} = \frac{-3}{0,5} = -6$

Contoh 50
Tentukan nilai dari soal-soal logaritma berikut.

a. $^{3}\log 9 + {}^{3}\log 18 - {}^{3}\log 2$ b. $\log 8 + \log 400 - \log 32$

Jawab:

a. $^{3}\log 9 + {}^{3}\log 18 - {}^{3}\log 2 = {}^{3}\log \frac{9 \text{ x } 18}{2} = {}^{3}\log 81 = {}^{3}\log 3^4 = 4$

b. $\log 8 + \log 400 - \log 32 = \log \frac{8 \text{ x } 400}{32} = \log 100 = 2$

Contoh 51
Jika diketahui log 2 = 0,3010 dan log 3 = 0,4771, tentukan logaritma berikut ini.

a. log 6
b. log 9
c. log 0,25
d. log 15
e. log 72

Jawab:

a. $\log 6 = \log (2 \times 3)$
$= \log 2 + \log 3 = 0{,}3010 + 0{,}4771 = 0{,}7781$

b. $\log 9 = \log 3^2$
$= 2 \times \log 3 = 2 \times 0{,}4771 = 0{,}9542$

c. $\log \frac{1}{4} = \log 2^{-2}$
$= -2 \times \log 2 = -2 \times 0{,}3010 = -0{,}6020$

d. $\log 15 = \log 3 + \log 5$
$= \log 3 + \log \frac{10}{2}$
$= \log 3 + \log 10 - \log 2 = 0{,}4771 + 1 - 0{,}3010 = 1{,}1761$

e. $\log 72 = \log (2^3 \times 3^2)$
$= 3 \times \log 2 + 2 \times \log 3 = 3 \times 0{,}3010 + 2 \times 0{,}4771 = 1{,}8573$

Contoh 52

Tentukan nilai logaritma berikut.

a. ${}^{3}\log 6 \times {}^{6}\log 81$
b. ${}^{4}\log 9 \times {}^{3}\log 125 \times {}^{25}\log 16$
c. ${}^{\frac{1}{2}}\log 9 \times {}^{\frac{1}{3}}\log 7 \times {}^{49}\log 32$

Jawab:

a. $${}^{3}\log 6 \times {}^{6}\log 81 = \frac{\log 6}{\log 3} \times \frac{\log 81}{\log 6}$$
$$= \frac{\log 6}{\log 3} \times \frac{4.\log 3}{\log 6} = 4$$

b. $${}^{4}\log 9 \times {}^{3}\log 125 \times {}^{25}\log 16 = \frac{\log 9}{\log 4} \times \frac{\log 125}{\log 3} \times \frac{\log 16}{\log 25}$$
$$= \frac{2 \times \log 3}{2 \times \log 2} \times \frac{3 \times \log 5}{\log 3} \times \frac{4 \times \log 2}{2 \times \log 5} = \frac{2 \times 3 \times 4}{2 \times 1 \times 2} = 6$$

c. $${}^{\frac{1}{2}}\log 9 \times {}^{\frac{1}{3}}\log 7 \times {}^{49}\log 32 = \frac{\log 9}{\log \frac{1}{2}} \times \frac{\log 7}{\log \frac{1}{3}} \times \frac{\log 32}{\log 49}$$
$$= \frac{2 \times \log 3}{-1 \times \log 2} \times \frac{\log 7}{-1 \times \log 3} \times \frac{5 \times \log 2}{2 \times \log 7} = \frac{2 \times 5}{-1 \times -1 \times 2} = 5$$

3. Menentukan Nilai Logaritma dengan Tabel/Daftar Logaritma

Logaritma yang mempunyai bilangan pokok 10 dinamakan logaritma biasa. Salah satu cara untuk menentukan nilai logaritma biasa suatu bilangan adalah dengan menggunakan bantuan daftar logaritma. Pada daftar logaritma, hanya ditulis mantise (bilangan desimal dari hasil pengambilan logaritma) saja sehingga bilangan indeks atau karakteristik (bilangan bulat dari hasil pengambilan logaritma) harus ditentukan sendiri terlebih dahulu.

a. Mencari Hasil Logaritma dari Bilangan antara 1 sampai dengan 10

Karena log 1 = 0 dan log 10 = 1 maka logaritma berbasis 10 dari bilangan-bilangan antara 1 dan 10 akan terletak antara 0 dan 1. Jadi, Indeks atau karakteristiknya 0. Misalkan log 2,345 memiliki indeks/karakteristiknya 0. Bilangan di belakang koma, yaitu mantise dapat diperoleh dari daftar logaritma dimana pada baris 234 kolom 5 diperoleh bilangan 3701. (Perhatikan skema tabel di bawah ini).

Jadi, log 2,345 = 0,3701

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
000										
001										
.										
.										
.										
234						3701				
.										
.										
.										
.										
.										
.										
1000										

b. Mencari Hasil Logaritma dari Bilangan Lebih dari 10

Log 10 = 1 dan log 100 = 2, maka logaritma berbasis 10 dari bilangan-bilangan antara 10 sampai 100 akan terletak antara 1 dan 2. Jadi, indeks atau karakteristiknya 1.

Log 100 = 2 dan log 1000 = 3, maka logaritma berbasis 10 dari bilangan-bilangan antara 100 sampai 1000 akan terletak antara 2 dan 3. Jadi, indeks atau karakteristiknya 2 dan seterusnya.

Contoh 53

Tentukan nilai dari logaritma berikut.

a. log 19,69 b. Log 123,4 c. log 6669

Jawab:

a. Indeks dari 19,69 adalah 1, mantisenya diperoleh dari daftar pada baris 196 kolom 9 dan terdapat bilangan 2942. Jadi, log 19,69 = 1,2942.
b. Indeks dari 123,4 adalah 2, mantisenya diperoleh dari daftar pada baris 123 kolom 4 dan terdapat bilangan 0913. Jadi, log 123,4 = 2,0913.
c. Indeks dari 6669 adalah 3, mantisenya diperoleh dari daftar pada baris 666 kolom 9 dan terdapat bilangan 8241. Jadi, log 6669 = 3,8241.

c. Mencari Hasil Logaritma dari Bilangan yang Kurang dari 1

Karakteristik dari 0,1 sampai dengan 1 adalah -1.
Karakteristik dari 0,01 sampai dengan 0,1 adalah -2.
Karakteristik dari 0,001 sampai dengan 0,01 adalah -3, dan seterusnya.

Contoh 54

Tentukan nilai logaritma di bawah ini dengan tabel.

a. log 0,9272 b. log 0,0039

Jawab:

a. Indeks 0,9272 adalah -1, mantisenya diperoleh dari daftar pada baris 927 kolom 2 dan terdapat bilangan 9672. Jadi, log 0,927 = 0,9672 – 1 = -0,0328.

b. Indeks 0,0039 adalah -3 mantisenya diperoleh dari daftar pada baris 390 kolom 0 dan diperoleh bilangan 5911. Jadi log 0,0039 = 0,5911 – 3 = -2,4089.

4. Antilogaritma

Anti logaritma merupakan proses kebalikan menghitung nilai logaritma. Anti logaritma dapat ditentukan dengan daftar Antilogaritma.

Contoh 55

Tentukan nilai x dengan menggunakan tabel antilogaritma di bawah ini.

a. log x = 1,3783 b. log x = 0,45 c. log x = 0,1588 – 3

Jawab:

a. Bilangan 1 pada 1,3783 adalah indeksnya, sedangkan 378 adalah mantisenya. Angka-angka yang termuat pada daftar antilogaritma pada baris .37 (dua angka pertama) dan kolom 8 (angka ketiga) pada tabel berikut.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00										
.										
.										
.37									239	

Jadi, jika log x = 1,3783 diperoleh x = 23,9.

b. Bilangan 0 pada 0,45 adalah indeksnya sehingga nilai x adalah angka satuan, sedangkan 45 adalah mantisenya. Mantise 45 pada tabel antilogaritma baris 23 kolom 0 didapat bilangan 282, jadi nilai x = 2,82.

c. Bilangan -3 pada 0,1588 – 3 adalah indeksnya sehingga nilai x adalah angka seperseribuan (ada 2 angka 0 di belakang koma), sedangkan 1588 atau 159 adalah mantisenya. Mantise 159 pada tabel antilogaritma baris 15 kolom 9 didapat bilangan 144, jadi nilai x = 0,00144.

5. Operasi pada Logaritma

a. Operasi Perkalian

log (a x b) = log a + log b

Contoh 56

Hitunglah 6,28 x 2,536

Jawab:
Jika $p = 6,28 \times 2,536$
$\log p = \log (6,28 \times 2,536)$
og $p = \log 6,28 + \log 2,536$
$= 1,2021$
Jadi, p = Antilog 1,2021 = 15,926

b. Operasi Pembagian

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

Contoh 57
Hitunglah 325,6 : 48,5

Jawab:
Jika $p = 325,6 : 48,5$
$\log p = \log (325,6 : 48,5)$
$\log p = \log 325,6 - \log 48,5$
$= 2,5127 - 1,6857$
$= 0,8270$
Jadi, p =antilog 0,8270 = 6,7

c. Operasi Akar dan Pangkat

- $\log a^n = n \times \log a$
- $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \times \log a$

Contoh 58
Dengan menggunakan tabel logaritma, tentukan nilai dari soal-soal berikut.

a. 5^8 b. $\sqrt{\frac{47,32}{18,6}}$

Jawab:
a. Jika $p = 5^8$
$\log p = \log 5^8$
$= 8 \text{ Log } 5$
$= 8 \times 0,6990 = 5,592$
Jadi, p = antilog 5,592 = 390800

b. Jika $p = \sqrt{\frac{47,32}{18,6}}$, maka $\log p = \log \sqrt{\frac{47,32}{18,6}}$

$$= \frac{1}{2}(\text{Log } 47,32 - \text{Log } 18,6)$$
$$= \frac{1}{2}(1,6750 - 1,1643)$$
$$= \frac{1}{2}(0,5107) = 0,2553$$

Jadi, p = anti log 0,2553 = 1,8001

Contoh 59

Dengan menggunakan kalkulator , tentukan nilai dari logaritma berikut.

a. ${}^{5}\log 9$ b. ${}^{7}\log 12$

Jawab:

a. ${}^{5}\log 9 = \dfrac{\log 9}{\log 5} = \dfrac{0{,}9542}{0{,}6990} = 1{,}3651$ b. ${}^{7}\log 12 = \dfrac{\log 12}{\log 7} = \dfrac{1{,}0792}{0{,}8451} = 1{,}2770$

H. Rangkuman Logaritma

1. Logaritma secara umum ditulis $a^c = b \Leftrightarrow {}^{a}\log b = c$

2. Sifat-sifat logaritma
   a. ${}^{p}\log (a \times b) = {}^{p}\log a + {}^{p}\log b$
   b. ${}^{p}\log \dfrac{a}{b} = {}^{p}\log a - {}^{p}\log b$
   c. ${}^{p}\log a^{n} = n \times {}^{p}\log a$
   d. ${}^{a}\log b = \dfrac{{}^{p}\log b}{{}^{p}\log a}$
   e. $\dfrac{1}{{}^{a}\log b} = {}^{b}\log a$
   f. ${}^{a^n}\log a^{m} = \dfrac{m}{n}$ atau ${}^{b^n}\log a^{m} = \dfrac{m}{n} \times {}^{b}\log a$

LATIHAN 5

1. Tentukan nilai logaritma berikut.
   a. ${}^{2}\log 8$
   b. ${}^{4}\log 64$
   c. ${}^{5}\log 125$
   d. ${}^{3}\log 27 - {}^{3}\log 81$
   e. ${}^{36}\log 216$
   f. ${}^{\frac{1}{5}}\log 625$
   g. $\log 0{,}001$
   h. ${}^{2}\log 8 + {}^{2}\log 8$

2. Selesaikanlah soal berikut.
   a. ${}^{3}\log 5 \times {}^{5}\log 9$
   b. ${}^{2}\log 20 + {}^{2}\log 8 - {}^{2}\log 5$
   c. ${}^{5}\log 2 \times {}^{2}\log 125$
   d. ${}^{25}\log 27 \times {}^{9}\log 49 \times {}^{\frac{1}{7}}\log 625$
   e. ${}^{4}\log 5 \times {}^{36}\log 8 \times {}^{\frac{1}{5}}\log 6$
   f. ${}^{0,125}\log \sqrt{32}$

3. Jika diketahui $\log 2 = 0{,}3010$ dan $\log 3 = 0{,}4771$, tentukan logaritma berikut.
   a. $\log 24$
   b. $\log 18$
   c. $\log 1{,}5$
   d. $\log 30$
   e. $\log 90$
   f. $\log 45$

4. Jika diketahui $\log 2 = p$ dan $\log 3 = q$, tentukan dalam p dan q.
   a. $\log 54$
   b. $\log 60$
   c. $\log 72$
   d. $\log 80$
   e. $\log \dfrac{24}{9}$
   f. $\log 15$

5. Dengan menggunakan tabel, tentukan nilai dari logaritma berikut.
   a. log 2,36
   b. log 34,5
   c. log 56000
   d. log 321,8
   e. log 0,00345
   f. log 0,1245
   g. log 8,796
   h. log 0,0567

6. Dengan tabel logaritma, tentukan nilai x dari logaritma berikut.
   a. log x = 0,6590
   b. log x = 1, 8597
   c. log x = 2,9159
   d. log x = 0,9605 – 1
   e. log x = 0,6590 – 2
   f. log x = - 1,1238
   g. log x = - 0,8928
   h. log x = 3, 5105

7. Hitunglah tanpa menggunakan kalkulator.
   a. log 2 + log 200 – log 6 + log 5 – log 3 + log 18 – log 2
   b. log 5 + log 4 – log 2 + log 10
   c. ${}^{1/8}\log 16$
   d. ${}^{125}\log \frac{1}{5}$
   e. ${}^{\frac{1}{216}}\log 36$
   f. ${}^{8}\log 25 \,.\, {}^{\frac{1}{5}}\log 16$
   g. ${}^{\frac{1}{3}}\log 216 \times {}^{49}\log 27 \times {}^{\frac{1}{6}}\log 7$
   h. ${}^{2}\log 25 \times {}^{\frac{1}{6}}\log 64 \times {}^{5}\log 36$

8. Dengan menggunakan kalkulator , tentukan nilainya dari soal di bawah ini.
   a. ${}^{8}\log 60$
   b. ${}^{\frac{1}{5}}\log 625$
   c. ${}^{8}\log \frac{1}{64}$
   d. ${}^{\sqrt{2}}\log \frac{1}{64}$
   e. ${}^{625}\log \frac{1}{5}$
   f. ${}^{13}\log 75$
   g. ${}^{\frac{1}{4}}\log \sqrt{32}$
   h. ${}^{\frac{1}{2}}\log 8 \times {}^{\frac{1}{9}}\log 27$
   i. ${}^{3}\log \frac{1}{9} \times {}^{\frac{1}{4}}\log 256$
   j. ${}^{\frac{1}{6}}\log 216$

9. Selesaikanlah soal di bawah ini dengan tabel logaritma.
   a. $\frac{23{,}5 \times 543{,}7}{45{,}6}$
   b. $\frac{\sqrt{234{,}1 \times 309{,}4}}{465{,}1}$

10. Jika log 7 = p dan log 5 = q, tentukanlah nilai log di bawah ini dalam bentuk p dan q.
    a. log 175
    b. log 245
    c. log 700
    d. log 50
    e. log 3,5

Uji Kemampuan

A. Soal Pilihan Ganda

Pilihlah salah satu jawaban a, b, c, d atau e yang benar.

1. Harga beli satu lusin buku kwitansi adalah Rp50.000,00 dan dijual dengan harga Rp5.000,00 tiap buah. Persentase keuntungannya adalah . . . .
   a. 10% c. 15 % e. 20 %
   b. 12 % d. 16,67 %

2. Sebuah koperasi sekolah membeli 5 lusin buku seharga Rp150.000,00. Jika harga jual sebuah buku Rp2.800,00 maka persentase keuntungan yang diperoleh koperasi tersebut adalah . . . .
   a. 4 % c. 10 % e. 15 %
   b. 6 % d. 12 %

3. Toko A memberikan potongan harga 20% pada setiap penjualan barang, untuk pembelian sepasang sepatu, Marliana membayar kepada kasir sebesar Rp40.000,00. Harga sepatu tersebut sebelum mendapat potongan adalah. . . .
   a. Rp8.000,00 c. Rp48.000,00 e. Rp72.000,00
   b. Rp32.000,00 d. Rp50.000,00

4. Toko buku sedang memberikan potongan harga 10% pada setiap penjualan barang, untuk pembelian buku Matematika, Fulan membayar kepada kasir sebesar Rp31.500,00. Harga buku tersebut sebelum mendapat potongan adalah . . . .
   a. Rp3.500,00 c. Rp35.000,00 e. Rp38.000,00
   b. Rp32.000,00 d. Rp36.100,00

5. Harga sebuah TV adalah Rp586.000,00. Jika terhadap pembelian TV dikenai pajak penjualan sebesar 11%, maka besar uang yang harus dibayar dari pembelian TV tersebut adalah . . . .
   a. Rp592.446,00 c. Rp651.460,00 e. Rp741.290,00
   b. Rp650.460,00 d. Rp719.920,00

6. Harga dua buku dan dua pensil Rp8.800,00. Jika harga sebuah buku Rp600,00 lebih murah dari harga pensil, maka harga sebuah buku adalah . . . .
   a. Rp1.400,00 c. Rp1.900,00 e. Rp2.500,00
   b. Rp1.600,00 d. Rp2.000,00

7. Sebuah koperasi menjual baju seharga Rp864.000,00 setiap lusinnya. Jika hasil penjualan ternyata untung 20 % dari harga belinya , maka harga beli sebuah baju adalah . . . .
   a. Rp14.400,00 c. Rp74.400,00 e. Rp1.080.000,00
   b. Rp60.000,00 d. Rp720.000,00

8. Seorang pedagang buah membeli 5 kotak jeruk yang tiap kotaknya berisi 15 kg seharga Rp600.000,00 Jika kemudian jeruk tersebut dijual seharga Rp9.000,00 tiap

kilogramnya, maka persentase keuntungan yang diperoleh pedagang tersebut adalah . . . .

a. 5% c. 8% e. 12,5%
b. 7,5% d. 10%

9. Jarak pada peta antara Kota Jakarta dan Kota Bogor adalah 5 cm, sedangkan jarak sesungguhnya 40 km. Skala peta itu adalah . . . .

a. 1 : 800 c. 1 : 80.000 e. 1 : 8.000.000
b. 1 : 8.000 d. 1 : 800.000

10. Nilai dari 11 – (-5) – 9 x (-2) adalah . . . .

a. –14 c. 14 e. 50
b. –2 d. 34

11. Nilai x yang memenuhi $3^{5x-1} = 27^{x+3}$ adalah . . . .

a. 1 c. 3 e. 5
b. 2 d. 4

12. Hasil dari -9 x (-3) x (-4) : 6 adalah . . . .

a. -18 c. 18 e. 108
b. -16 d. 27

13. Diketahui log 2 = a dan log 3 = b, maka $\log 18\sqrt{6}$ adalah . . . .

a. a + b c. 2a + b e. $\frac{1}{2}(3a+5b)$
b. a + 2b d. $\frac{1}{2}(a+2b)$

14. Pernyataan berikut benar, kecuali . . . .

a. $a^m : a^n = a^{mn}$ c. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ e. $(a^p)^q = a^{p.q}$
b. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ d. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a.b}$

15. Hasil dari $(2^3)^4 \times (2^3)^{-5}$ = ...

a. 16 c. $\frac{1}{8}$ e. 32
b. 8 d. $\frac{1}{16}$

16. Nilai x yang memenuhi $5^{3x-2} = 25^{2x+1}$ adalah. . . .

a. - 4 c. - 2 e. 4
b. - 3 d. 3

17. Nilai x dari ${}^{3}\log \frac{1}{\sqrt{9}} = x$ adalah . . . .

a. -2 c. 1 e. 3
b. -1 d. 2

18. Jika log 2 = x; log 3 = y dan log 5 = z, maka nilai dari log 30 adalah . . . .
    a. x – y – z   c. x.y.z   e. x – y + z
    b. x+ y + z   d. x + y – z

19. Bentuk sederhana dari $^5\log 10 + {}^5\log 50 - {}^5\log 4$ adalah . . . .
    a. 3   c. 8   e. 125
    b. 5   d. 25

20. Karakteristik dari log 123,0002 adalah . . . .
    a. 2   c. 123   e. 123,2
    b. 0002   d. 123,0

21. Gula dibeli dengan harga Rp168.000,00 per 50 kg, kemudian dijual dengan harga Rp2.100,00 tiap ½ kg. Persentase keuntungan dari harga pembelian adalah . . . .
    a. 10%   c. 25%   e. 35%
    b. 15%   d. 30%

22. Jika log 2 = 0,3010 dan log 3 = 0,4771, maka log 150 adalah. . . .
    a. 0,1761   c. 1,8289   e. 2,7781
    b. 0,7781   d. 2,1761

23. Jika log 2 = 0,3010, log 3 = 0,4771 dan log 7 = 0.8451, maka log 105 adalah. . . .
    a. 2,0162   c. 2,2162   e. 2,9255
    b. 2,0212   d. 2,3162

24. Dengan menggunakan tabel, nilai dari log 0,3987 adalah. . . .
    a. 0,6006   c. 0,6006 – 2   e. 0,6006 – 4
    b. 0,6006 – 1   d. 0,6006 – 3

25. Bentuk pecahan dari 2,0666... adalah . . . .
    a. $\frac{31}{15}$ c. $2\frac{2}{3}$ e. $2\frac{6}{9}$
    b. $\frac{15}{31}$ d. $\frac{32}{15}$

26. Invers penjumlahan dari $\frac{2}{5}$ adalah . . . .
    a. $-\frac{5}{2}$ c. $\frac{5}{2}$ e. 2,5
    b. $-\frac{2}{5}$ d. 5,2

27. $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{10}\right) : \frac{7}{10}$ =. . . .
    a. 0,35   c. 1   e. 4,9
    b. $\frac{49}{100}$ d. $\frac{20}{14}$

28. Seorang pengusaha memerlukan modal sebesar Rp5.000.000,00. Modal usaha tersebut di antaranya diperuntukkan 15% alat; $^2/_5$ bahan baku; 0,25 tenaga; dan sisanya untuk transportasi, maka besarnya biaya transportasi adalah . . . .
    a. Rp400.000,00 c. Rp600.000,00 e. Rp1.000.000,00
    b. Rp500.000,00 d. Rp800.000,00

29. 0,5% setara dengan . . . .
    a. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{200}$ e. $\frac{5}{10.000}$
    b. $\frac{1}{20}$ d. 0,05

30. Setelah mendapat bonus 10% seorang karyawan gajinya Rp12.100.000,00 maka gaji sebelum bonus adalah . . . .
    a. Rp1.210.000,00 c. Rp10.850.000,00 e. Rp13.310.000,00
    b. Rp10.500.000,00 d. Rp11.000.000,00

31. Hasil dari $2\frac{1}{5} : 4\frac{3}{7}$ = ...
    a. $\frac{77}{155}$ c. $9\frac{26}{35}$ e. $\frac{77}{156}$
    b. $\frac{155}{77}$ d. $\frac{156}{77}$

32. Bentuk sederhana $4\sqrt{3} + 3\sqrt{12} - \sqrt{27}$ adalah . . . .
    a. $6\sqrt{3}$ d. $8\sqrt{3}$ c. $10\sqrt{3}$
    b. $7\sqrt{3}$ e. $9\sqrt{3}$

33. Di bawah ini adalah contoh dari bilangan rasional, kecuali . . . .
    a. $\sqrt{16}$ c. $\frac{25}{11}$ e. log 2
    b. 3,14 d. 30 %

34. Invers perkalian dari 2,1 adalah . . . .
    a. –2,1 c. $\frac{21}{10}$ e. 1,2
    b. $-\frac{10}{21}$ d. $\frac{10}{21}$

35. 0,002 % dari Rp10 miliar adalah . . . .
    a. Rp20.000,00 c. Rp20.000.000,00 e. Rp2.000.000.000,00
    b. Rp200.000,00 d. Rp200.000.000,00

36. Invers perkalian dari $2\frac{1}{3}$ adalah . . . .

a. $-\frac{7}{3}$ c. $-\frac{3}{7}$ e. $\frac{7}{3}$

b. $-2\frac{1}{3}$ d. $\frac{3}{7}$

37. Bentuk pecahan dari 1,02222. . . . adalah . . . .

a . $\frac{45}{46}$ c. $\frac{47}{45}$ e. $\frac{11}{9}$

b. $\frac{46}{45}$ d. $1\frac{2}{9}$

38. Nilai dari $\frac{2}{5}$ x $(\frac{2}{3}+\frac{1}{6})$ adalah . . . .

a. $\frac{45}{2}$ c. $\frac{2}{45}$ e. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{1}{6}$ d . $\frac{1}{3}$

39. Harga 1 dos disket Rp30.000,00. Jika pembeian 1 dos disket mendapat potongan 10%, disket yang dapat dibeli dengan uang Rp405.000,00 adalah . . . .

a. 11 dos c. 13 dos e. 15 dos

b. 12 dos d. 14 dos

40. Harga beli dari sebuah barang adalah Rp45.000,00. Jika untungnya 0,222. . ., maka harga jualnya adalah . . . .

a. Rp94.000,00 c. Rp55.000,00 e. Rp 65.000,00

b. Rp10.000,00 d. Rp57.500,00

41. Hasil dari $2\frac{3}{4} : \frac{1}{4} \text{ x } \frac{5}{11}$ = ...

a. 5 d. $5\frac{9}{11}$ e. $24\frac{1}{5}$

b. $5\frac{5}{11}$ c. $5\frac{7}{11}$

42. Bentuk pecahan dari 2, 636363. . . adalah . . . .

a. $2\frac{11}{7}$ c. $\frac{29}{7}$ e. $\frac{25}{11}$

b. $\frac{29}{11}$ d. $\frac{25}{7}$

43. Sebuah ruangan berbentuk persegi panjang digambar menggunakan sekala 1 : 200 dengan panjang 2 cm dan lebar 3 cm. Luas ruangan sebenarnya adalah . . . .

a. 6 cm^2 c. 24 cm^2 e. 24 m^2

b. 12 cm^2 d. 6 m^2

44. Suatu gedung akan dibangun oleh 100 pekerja selama 60 minggu. Jika rencana penyelesaian dipercepat menjadi 50 minggu, maka banyaknya pekerja yang harus ditambah adalah . . . .
   a. 20 orang
   b. 40 orang
   c. 80 orang
   d. 100 orang
   e. 120 orang

45. Suatu gambar gedung berskala 1 : 500. Jika tanah tempat gedung tersebut berukuran 20 cm x 15 cm, maka luas tanah sebenarnya adalah. . . .
   a. 7.500 cm^2
   b. 75.000 m^2
   c. 750 m^2
   d. 7.500 m^2
   e. 75.000 m^2

46. Jarak kota A dengan kota B sebenarnya 120 km dan dilukis dengan jarak 12 cm, maka jarak kota A dan kota C yang sebenarnya jika dalam lukisan berjarak 15 cm adalah . . . .
   a. 80 km
   b. 90 km
   c. 100 km
   d. 130 km
   e. 150 km

47. Suatu peta berskala 1 : 2.500.000. Jika jarak Surabaya-Yogyakarta 350 km, maka dalam peta berjarak . . . .
   a. 12 cm
   b. 14 cm
   c. 15 cm
   d. 18 cm
   e. 21 cm

48. Suatu mobil berukuran 4 m x 2 m dilukis berukuran 10 cm x 5 cm, maka skala lukisan tersebut adalah . . . .
   a. 1 : 400
   b. 1 : 300
   c. 1 : 200
   d. 1 : 40
   e. 1 : 20

49. Pak Heri membeli sepasang sepatu , setelah harganya di potong 20% ia membayar sepasang sepatu itu sebesar Rp48.000,00. Besarnya potongan harga sepatu Pak Heri adalah . . . .
   a. Rp 9.600,00
   b. Rp 12.000,00
   c. Rp 15.000,00
   d. Rp 60.000,00
   e. Rp 72.000,00

50. Diketahui log 2 = p, log 3 = q dan log 5 = r, Harga log 1500 jika dinyatakan dalam p, q dan r adalah . . . .
   a. p + q + r
   b. p + 2q + 3r
   c. 2p + q + r
   d. 2p + q + 3r
   e. 3p + q + 2r

B. Soal Essay

Kerjakan soal-soal berikut dengan benar.

1. Pak Burhan akan menjual berasnya sebanyak 60 karung dengan berat per karung 70 kg. Ia akan menjualnya melalui seorang komisioner bernama Ali Sastro dengan kesepakatan tarra 3%, rafaksi 10%, dan komisi 15%. Beras dijual Rp4.000,00 per kg. Tentukan:
   a. hasil komisi yang diterima Pak Ali,
   b. hasil penjualan yang diterima Pak Burhan.

2. Suatu gedung bertingkat direncanakan akan direnovasi dengan 400 pekerja selama 120 minggu. Setelah berjalan 30 minggu, pekerjaan dihentikan sementara selama 25 minggu. Renovasi ingin selesai sesuai dengan rencana semula. Berapakah pekerja yang harus ditambahkan dalam pembangunan tersebut?

Gambar: 1-5 Gedung yang akan direnovasi

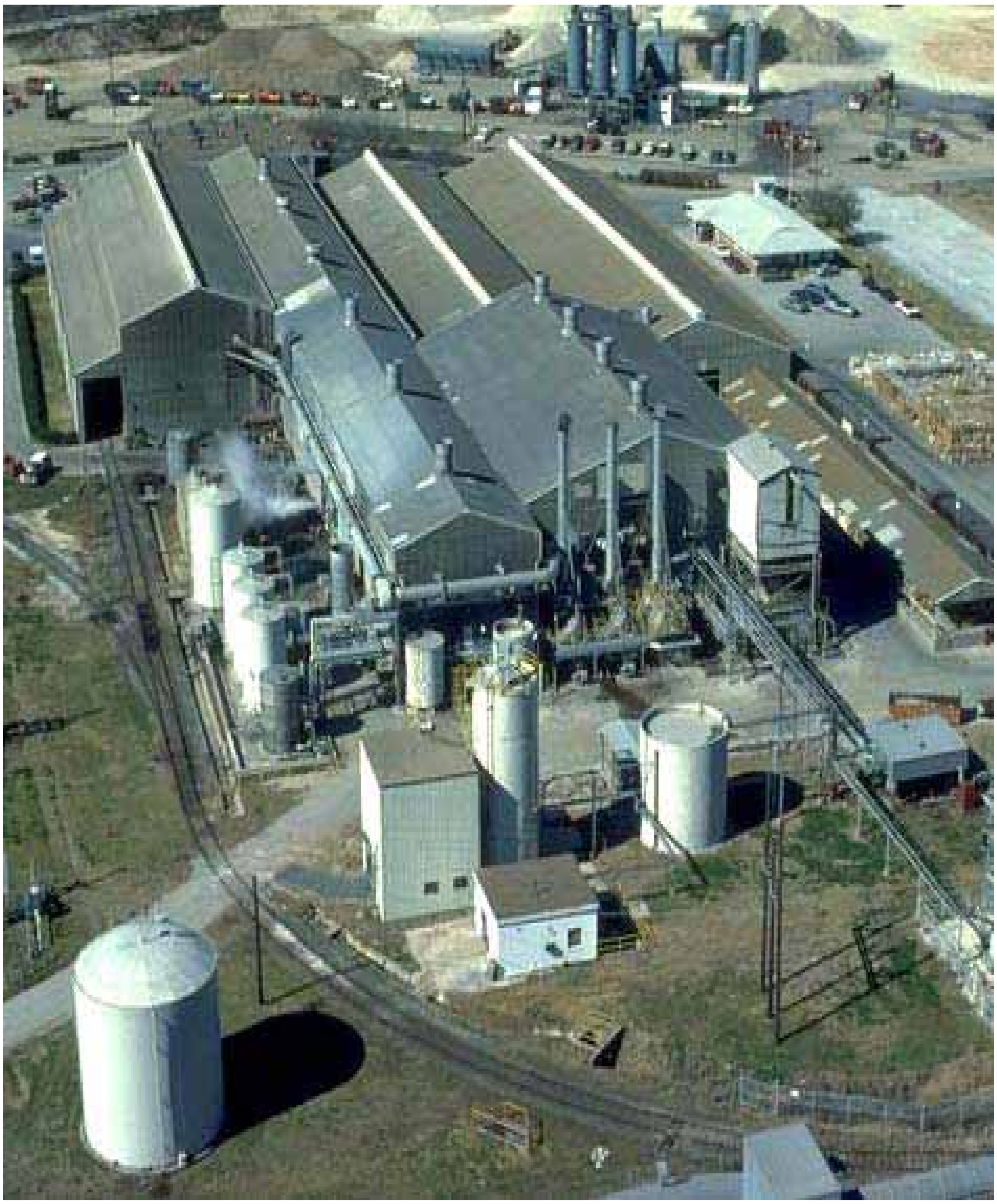
3. Sederhanakanlah bentuk akar di bawah ini.
   a. $3\sqrt{6} \times (3\sqrt{5} + \sqrt{80})$
   b. $3\sqrt{28} \times (\sqrt{3} - 2\sqrt{7})$
   c. $2\sqrt{5} \times (2\sqrt{120} + 5\sqrt{24})$

4. Tanpa mengunakan kalkulator atau tabel, tentukan nilainya.
   a. ${}^{\sqrt{3}}\log \dfrac{1}{243}$
   b. ${}^{\frac{1}{2}}\log 125 \times {}^{\frac{1}{36}}\log 8 \times {}^{625}\log 6$
   c. $\log 8 + \log 125 - \log 4 - \log 25 + \text{Log } 12{,}5 + \text{Log } 0{,}8$

5. Jika log 3 = 0,4771 dan log 5 = 0,6990, tentukan nilai dari soal berikut.
   a. log 75 b. log 135 c. log 6

Keberhasilan seseorang bukan terletak pada kecerdasannya, tapi pada usahanya yang gigih.

2 PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN



Sumber: Art & Gallery

Standar kompetensi persamaan dan pertidaksamaan linier dan kuadrat terdiri atas tiga kompetensi dasar. Dalam penyajian pada buku ini setiap kompetensi dasar memuat tujuan, uraian materi, dan latihan. Rangkuman diletakkan pada setiap akhir bahasan suatu kompetensi dasar. Kompetensi dasar dalam standar kompetensi ini adalah *himpunan penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan linier, himpunan penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan kuadrat, serta menerapkan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat*. Standar kompetensi ini digunakan sebagai kemampuan dasar berikutnya untuk mempelajari kompetensi-kompetensi yang lain. Oleh karena itu, kemampuan dasar ini harus dikuasai dengan benar sehingga dalam mempelajari kompetensi-kompetensi yang lain tidak akan mengalami kesulitan.

Pada setiap akhir kompetensi dasar tercantum soal-soal latihan yang disusun dari soal-soal yang mudah hingga yang sulit. Latihan soal ini digunakan untuk mengukur kemampuan kalian terhadap kompetensi dasar ini. Artinya setelah mempelajari kompetensi dasar ini secara mandiri dengan bimbingan guru sebagai fasilitator. Ukurlah sendiri kemampuan kalian dengan mengerjakan soal-soal latihan tersebut.

Untuk melancarkan kemampuan kalian supaya lebih baik dalam mengerjakan soal, disarankan semua soal dalam latihan ini dikerjakan baik di sekolah dengan bimbingan guru maupun di rumah.

Untuk mengukur standar kompetensi lulusan tiap peserta didik, di setiap akhir kompetensi dasar, guru akan memberikan evaluasi apakah kalian layak atau belum layak mempelajari standar kompetensi berikutnya. Kalian dinyatakan layak jika kalian dapat mengerjakan soal 60% atau lebih dengan benar dari soal-soal evaluasi yang akan diberikan guru.

Setelah mempelajari kompetensi ini, siswa diharapkan dapat mengaplikasikannya untuk mempelajari kompetensi pada pelajaran matematika maupun pelajaran lainnya dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu bentuk contoh aplikasi persamaan dalam bidang bisnis dan manajemen, yaitu pada analisis pulang pokok (*break event point*) seperti uraian berikut ini.

Analisis pulang pokok adalah analisis model fungsi yang menggambarkan hubungan antara ongkos, hasil penjualan, dan keuntungan. Suatu perusahaan akan memperoleh keuntungan apabila total hasil penjualan (*total revenue*) yang diperolehnya melebihi total biaya (*total cost*). Jika total biaya lebih besar dari pada total revenue pada waktu tertentu, berarti perusahaan mengalami kerugian.

Biaya total produksi suatu barang biasanya terdiri atas biaya tetap dan biaya tidak tetap atau biaya variabel. Biaya yang tetap pada waktu tertentu atau konstan meskipun hasil produksi berubah-ubah, misalnya gaji karyawan, asuransi, dan sebagainya disebut dengan biaya tetap. Sedangkan biaya yang berubah-ubah yang bergantung pada kapasitas produksi biasa disebut dengan biaya variabel.

Gambar: 2.1 Manager suatu perusahaan sedang membicarakan bisnis melalui telepon

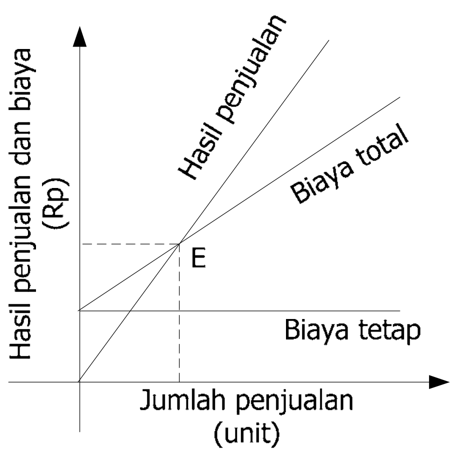
Misalkan sebuah perusahaan memproduksi sebanyak x unit barang yang sejenis dengan harga p rupiah per unitnya, maka total revenue penjualan dimodelkan sebagai R = px. Misalkan F dan V adalah masing-masing biaya tetap (*fix cost*) dan biaya variabel, maka total cost (Q) adalah sebagai berikut.

$$Q = F + V$$

Suatu kondisi pada saat total hasil penjualan sama dengan total biaya, yaitu kondisi perusahaan belum mendapat untung dan tidak menderita kerugian dikatakan bahwa perusahaan tersebut dalam kondisi pulang pokok (*break event*), yaitu

$$P = Q$$

Hubungan antara biaya total dan hasil penjualan total dilukiskan pada grafik seperti yang ditunjukkan pada **Gambar 2-2**



Gambar 2-2 Hubungan biaya total dan hasil penjualan

A. Persamaan dan Pertidaksamaan Linier

Setelah mempelajari materi pada kompetensi dasar ini, kalian diharapkan dapat

- menjelaskan pengertian persamaan linier,
- menyelesaikan persamaan linier satu variabel dan dua variabel,
- menjelaskan pengertian pertidaksamaan linier,
- menyelesaikan pertidaksamaan linier, dan
- menyelesaikan masalah program keahlian yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan linier.

Persamaan merupakan materi yang harus dimiliki siswa SMK setelah menguasai standar kompetensi sistem bilangan riil. Untuk mempelajari kompetensi berikutnya, persamaan merupakan kemampuan yang sangat penting, karena tanpa menguasai persamaan kalian akan mengalami kesulitan dalam mempelajari kompetensi-kompetensi selanjutnya. Oleh karena itu, pelajari materi ini dengan baik.

1. Definisi Persamaan dan Pertidaksamaan Linier

Kalimat terbuka dalam istilah matematika adalah kalimat yang belum diketahui nilai kebenarannya atau kalimat yang masih memuat variabel. Kalimat terbuka yang memuat tanda "*sama dengan*" atau "=" disebut *Persamaan***.** Sedangkan kalimat terbuka yang memuat tanda " $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ " disebut *Pertidaksamaan.*

Persamaan atau pertidaksamaan linier adalah suatu persamaan atau pertidaksamaan dengan variabelnya berpangkat satu.

Contoh 1

Persamaan linier satu variabel, $4x + 12 = 0$, $2p = 14$
Persamaan linier dua variabel, $2x + 3y = 10$, $2p - 3q = 15$
Persamaan linier tiga variabel, $2x + 3y - z = 10$, $2p - 3q + 2r = -1$

Contoh 2

Pertidaksamaan linier satu variabel, $4x - 16 > 0$, $2y \leq 10$
Pertidaksamaan linier dua variabel, $2x + 3y \leq 6$, $y > 2x + 16$
(Pertidaksamaan linier dua variabel akan dibahas lebih lanjut pada Kompetensi Program Linier).

2. Himpunan Penyelesaian Persamaan Linier Satu Variabel

Bentuk umum persamaan linier satu variabel adalah $ax + b = 0$ dengan $a \neq 0$, a adalah koefisien sedangkan b adalah konstanta.

Beberapa hal yang perlu diperhatikan dalam menyelesaikan persamaan linier satu variabel adalah sebagai berikut.

- Nilai persamaan tidak berubah jika pada ruas kiri dan kanan ditambahkan atau dikurangkan dengan bilangan negatif atau bilangan positif yang sama.
- Nilai persamaan tidak berubah jika pada ruas kiri dan kanan dikalikan atau dibagi dengan bilangan positif yang sama.

Dengan memperhatikan kedua hal di atas, maka langkah-langkah untuk menentukan penyelesaian persamaan linier satu variabel adalah sebagai berikut.

- Jika variabel dan konstanta terdapat di sebelah kiri dan sebelah kanan "=", maka kelompokkan variabel dengan variabel dan letakkan sebelah kiri, kemudian konstanta dengan konstanta letakkan sebelah kanan =, atau sebaliknya. Ingat saat memindahkan variabel atau konstanta dari sebelah kiri ke sebelah kanan atau sebaliknya, maka tandanya berubah dari + menjadi – atau sebaliknya.

- Jika beberapa variabel sudah dikelompokkan sebelah kiri maka beberapa konstanta di sebelah kanan atau sebaliknya. Jumlahkan atau kurangkan variabel tersebut begitu juga konstantanya seperti menjumlahkan bilangan bulat.

- Jika konstanta sudah bergabung menjadi satu bilangan begitu juga variabelnya, maka bagilah gabungan konstanta dengan koefisien dari gabungan variabel tersebut. Ingat tanda + atau – dalam proses pembagian sudah dibahas pada modul sistem bilangan riil.

- Jika bertemu dengan angka pecahan, baik yang sebelah kiri atau sebelah kanan "=", maka lebih baik kalikan dengan KPK dari penyebut pecahan tersebut.

Contoh 3

Tentukan nilai x dari persamaan-persamaan berikut.

a. $8x - 4 = 6x + 12$

b. $8(x + 2) = 20$

c. $\frac{1}{2}x + 6 = \frac{1}{4}x - 7$

d. $\frac{3x+7}{5} = \frac{1+4x}{6}$

e. $5(x + 2) - 2x = 13$

f. $2 + 2(p + 3) = 12$

g. $4(2x - 5) = 2(x + 4)$

h. $\frac{1}{3}(6x + 9) = \frac{1}{4}(2x + 4)$

Jawab:

a. $8x - 4 = 6x + 12$

$8x - 6x = 12 + 4$

$2x = 16$

$x = \frac{16}{2}$

$x = 8$

b. $8(x + 2) = 20$

$8x + 16 = 20$

$8x = 20 - 16$

$8x = 4$

$x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

c. $\frac{1}{2}x + 6 = \frac{1}{4}x - 7$ (dikalikan 4)

$2x + 24 = x - 28$

$2x - x = -28 - 24$

$x = -52$

d. $\frac{3x+7}{5} = \frac{1+4x}{6}$ (dikalikan 30)

$6(3x + 7) = 5(1 + 4x)$

$18x + 42 = 5 + 20x$

$18x - 20x = 5 - 42$

$-2x = -37 \Leftrightarrow x = \frac{-37}{-2} = 18\frac{1}{2}$

e. $5(x + 2) - 2x = 13$
$$\begin{aligned} 5x + 10 - 2x &= 13 \\ 5x - 2x &= 13 - 10 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

f. $2 + 2(p + 3) = 12$
$$\begin{aligned} 2 + 2p + 6 &= 12 \\ 8 + 2p &= 12 \\ 2p &= 12 - 8 \\ 2p &= 4 \\ p &= 2 \end{aligned}$$

g. $4(2x - 5) = 2(x + 4)$
$$\begin{aligned} 8x - 20 &= 2x + 8 \\ 8x - 2x &= 8 + 20 \\ 6x = 28 &\Leftrightarrow x = \frac{28}{6} = 4\frac{4}{6} = 4\frac{2}{3} \end{aligned}$$

h. $\frac{1}{3}(6x + 9) = \frac{1}{4}(2x + 4)$ (kalikan 12)
$$\begin{aligned} 4(6x + 9) &= 3(2x + 4) \\ 24x + 36 &= 6x + 12 \\ 24x - 6x &= 12 - 36 \\ 18x &= -24 \\ x &= \frac{-24}{18} = -1\frac{6}{18} = -1\frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Dua Variabel

Bentuk umum sistem persamaan linier dua variabel yang mempunyai variabel x dan y adalah.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2y + b_2y = c_2$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 adalah bilangan riil.
Untuk menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linier adalah dengan mencari harga variabel atau peubah (x dan y) yang memenuhi sistem persamaan tersebut. Himpunan penyelesaian dapat dicari dengan menggunakan metode eliminasi, substitusi atau campuran dari kedua metode tersebut.

a. Metode Eliminasi

Eliminasi artinya melenyapkan. Menyelesaikan sistem persamaan linier dua variabel dengan cara eliminasi artinya mencari nilai variabel dengan melenyapkan variabel yang lain dengan cara mengurangkan atau menjumlahkannya.
Untuk melenyapkan variabel tersebut, koefisiennya harus sama. Jika belum sama, maka masing-masing persamaan dikalikan dengan bilangan tertentu sehingga memiliki koefisien yang sama.
Jika salah satu variabel dari dua persamaan memiliki koefisien sama, maka persamaan satu dijumlahkan dengan yang lainnya. Tetapi jika memiliki koefisien yang berlawanan, persamaan satu dikurangkan dengan yang lainnya.

Contoh 4

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = -5 \end{cases}$

Jawab:

Untuk mencari variabel y berarti variabel x yang dieliminasi. Untuk mengeliminasi atau melenyapkan variabel x, maka koefisien x disamakan terlebih dahulu dengan cara mengalikan dengan suatu bilangan sedemikian sehingga koefisien kedua persamaan tersebut sama.

$$\begin{array}{r|l|rl} x + 2y = 3 & x\ 3 & 3x + 6y &= 9 \\ 3x - y = -5 & x\ 1 & 3x - y &= -5 \quad - \\ \hline & & 7y &= 14 \\ & & y &= 2 \end{array}$$

Sekarang melenyapkan variabel y untuk mencari x

$$\begin{array}{r|l} x + 2y = 3 & \times 1 \\ 3x - y = -5 & \times 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 3 \\ 6x - 2y & = & -10 \\ \hline 7x & = & -7 \\ x & = & -1 \end{array} +$$

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linier tersebut adalah {(-1,2)}

Contoh 5

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

Jawab:

Karena koefisien y sudah sama sehingga untuk mencari x hanya mengeliminasi y dengan cara menjumlahkannya

$$\begin{array}{rcl} 3x + y & = & 5 \\ 2x - y & = & 10 \\ \hline 5x & = & 15 \\ x & = & 3 \end{array} +$$

Untuk mencari y kita eliminasi x dengan mengalikan kedua persamaan sehingga koefisien x menjadi sama

$$\begin{array}{r|l|} 3x + y = 5 & \times 2 \\ 2x - y = 10 & \times 3 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 6x + 2y & = & 10 \\ 6x - 3y & = & 30 \\ \hline 5y & = & -20 \\ y & = & -4 \end{array} -$$

Jadi, himpunan penyelesaian sistem adalah {(3, -4)}

b. Metode Substitusi

Substitusi artinya mengganti atau menyatakan salah satu variabel dengan variabel lainnya.

Contoh 6

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

Jawab:

3x + y = 5 . . . 1)

2x – y = 10 . . . 2)

Misalkan yang akan disubstitusi atau diganti adalah variabel y pada persamaan 2), maka persamaan 1) dinyatakan dalam bentuk y = 5 – 3x.

2x – y = 10

2x – (5 – 3x) = 10

2x – 5 + 3x = 10

5x – 5 = 10

5x = 10 + 5

5x = 15 $\Leftrightarrow$ x = 3

Selanjutnya x = 3 disubstitusikan ke y = 5 – 3x

= 5 – 3(3) = -4

Jadi, himpunan penyelesaian tersebut adalah {(3, -4)}

Contoh 7

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

Jawab:

3x + 2y = 4 . . . 1)

2x + 3y = 1 . . . 2)

Misalkan yang akan disubstitusikan atau diganti adalah variabel x pada persamaan 2) , maka persamaan 1) dinyatakan dalam bentuk

$3x + 2y = 4$

$3x = 4 - 2y$

$x = \dfrac{4-2y}{3}$ Substitusikan ke persamaan kedua

$2x + 3y = 1$

$2\left(\dfrac{4-2y}{3}\right) + 3y = 1$ kedua ruas kalikan dengan 3

$2(4 - 2y) + 9y = 3$

$8 - 4y + 9y = 3$

$5y + 8 = 3$

$5y = 3 - 8$

$5y = -5 \quad \Leftrightarrow \quad y = -1$

Substitusikan y = -1 pada $x = \dfrac{4-2y}{3}$ untuk mendapatkan x.

$$x = \frac{4-2y}{3} = \frac{4-2(-1)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Jadi, himpunan penyelesaian tersebut adalah {(2, -1)}

c. Metode Campuran (Eliminasi dan Substitusi)

Contoh 8

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Jawab:

Karena koefisien x sudah sama, maka variabel yang dieliminasi adalah x dengan cara mengurangkannya.

$$\begin{array}{rl} x + 2y &= 2 \\ x - y &= -1 \quad - \\ \hline 3y &= 3 \\ y &= 1 \end{array}$$

Substitusikan y = 1 ke salah satu persamaan untuk mendapatkan variabel x.

$x + 2y = 2$

$x + 2(1) = 2$

$x + 2 = 2$

$x = 2 - 2 = 0$, Jadi, himpunan penyelesaian tersebut adalah {(0, 1)}

Contoh 9

Jumlah dua bilangan adalah 28 dan selisihnya 12. Carilah bilangan-bilangan itu.

Jawab:

Misalkan bilangan-bilangan itu adalah x dan y, maka
hasil jumlahnya adalah $x + y = 28$ dan selisihnya adalah $x – y = 12$
Dengan menggunakan metode campuran dapat dicari x dan y, yaitu

$$\begin{array}{l} x + y = 28 \\ \underline{x - y = 12} \; + \\ \quad 2x = 40 \\ \qquad x = 20 \\ x + y = 28 \\ 20 + y = 28 \\ \qquad y = 28 - 20 = 8 \end{array}$$

Jadi, bilangan-bilangan tersebut adalah 20 dan 8.

Contoh 10

Harga 5 buku tulis dan 2 pensil di koperasi adalah Rp13.000,00. Harga 3 buku tulis dan 3 pensil adalah Rp10.500,00. Berapa harga sebuah buku tulis dan sebatang pensil?

Jawab:

Misalkan: harga sebuah buku tulis adalah x
harga sebuah pensil adalah y, maka diperoleh sistem persamaan

$$\begin{array}{l|l|} 5x + 2y = 13.000 & x\ 3 \\ 3x + 3y = 10.500 & x\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15x + 6y = 39.000 \\ \underline{15x + 15y = 52.500} \; - \\ -9y = -13.500 \\ y = 1.500 \end{array}$$

Substitusi $y = 1.500$ ke salah satu persamaan sehingga

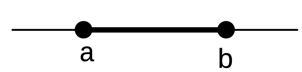
$$\begin{array}{l} 5x + 2y = 13.000 \\ 5x + 2(1.500) = 13.000 \\ 5x + 3.000 = 13.000 \\ x = 2.000 \end{array}$$

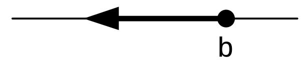
Jadi, harga sebuah buku tulis Rp2.000,00 dan sebatang pensil Rp1.500,00.

4. Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Linier Satu Variabel

Bentuk umum pertidaksamaan linier satu variabel dinyatakan dengan :
$ax + b$ (R) 0; $a , b \in$ Riil dan (R) = salah satu relasi pertidaksamaan.

Menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan linier hampir sama dengan menyelesaikan persamaan linier satu variabel.
Himpunan penyelesaian pertidaksamaan biasanya juga dituliskan dalam bentuk interval atau selang. Beberapa bentuk atau jenis interval disajikan sebagai berikut.

Notasi	Jenis Interval	Pertidaksamaan	Grafik
[a, b]	Tertutup	$a \le x \le b$	
(a, b)	Terbuka	$a < x < b$	

[a, b)	Setengah Terbuka	$a \le x < b$	
(a, b]	Setengah Tertutup	$a < x \le b$	
[a, ~)	Setengah Terbuka	$x \ge a$	
(~, b)	Terbuka	$x < b$	

Tanda ● pada batas interval berarti batas tersebut termasuk dalam interval. Sedangkan tanda ○ pada batas interval berarti batas tersebut tidak termasuk dalam interval.
Beberapa hal yang perlu diperhatikan dalam menyelesaikan pertidaksamaan adalah sebagai berikut.

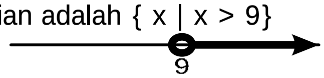
- Tanda pertidaksamaan tidak berubah arah jika pada ruas kiri dan kanan ditambahkan atau dikurangkan dengan bilangan negatif atau bilangan positif yang sama (sifat 1).
- Tanda pertidaksamaan tidak berubah arah jika pada ruas kiri dan kanan dikalikan atau dibagi dengan bilangan positif yang sama (sifat 2).
- Tanda pertidaksamaan berubah arah atau dibalik jika pada ruas kiri dan kanan dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatif yang sama (sifat 3).

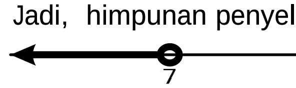
Contoh 11

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan-pertidaksamaan di bawah ini.

a. $5x > 4x + 9$
b. $8x - 3 < 7x + 4$
c. $15x + 2 \le 12x + 11$
d. $x - 4 \ge 2 + 4x$
e. $-2 - 3x < 2x - 22$
f. $\frac{3x-2}{3} + 5 < 1 - \frac{2x+1}{4}$
g. $x + 3 < 2x + 5 \le x + 8$
h. $3 \le 4x - 5 < 11$
i. $x + 4 \le 5x + 3 \le 2x + 10$

Jawab:

a. $5x > 4x + 9$
$5x - 4x > 4x + 9 - 4x$ (sifat 1)
$x > 9$
Jadi, himpunan penyelesaian adalah $\{ x \mid x > 9\}$
dengan garis bilangan 

b. $8x - 3 < 7x + 4$
$8x - 7x - 3 + 3 < 4 + 3 + 7x - 7x$ (sifat 1)
$x < 7$
Cara ini kurang efisien, cara lain dengan mengelompokkan variabel di satu ruas dan konstanta di ruas lain seperti menyelesaikan persamaan linier
$8x - 3 < 7x + 4$
$8x - 7x < 4 + 3$
$x < 7$ Jadi, himpunan penyelesaian adalah $\{x \mid x < 7\}$
dengan garis bilangan 

c. $15x + 2 \le 12x + 11$

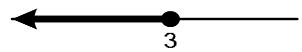
$15x - 12x \le 11 - 2$

$3x \le 9$

$x \le \frac{9}{3}$ (sifat 2)

$x \le 3$ Jadi, himpunan penyelesaian adalah $\{x \mid x \le 3\}$

dengan garis bilangannya



d. $x - 4 \ge 2 + 4x$

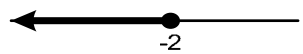
$x - 4x \ge 2 + 4$

$-3x \ge 6$

$x \le \frac{6}{-3}$ (sifat 3, yaitu arah pertidaksamaan berubah)

$x \le -2$. Jadi, himpunan penyelesaian adalah $\{x \mid x \le -2\}$

dengan garis bilangannya



e. $-2 - 3x < 2x - 22$

$-3x - 2x < -22 + 2$

$-5x < -20$

$x > \frac{-20}{-5}$ (sifat 3)

$x > 4$ Jadi, himpunan penyelesaian adalah $\{ x \mid x > 4\}$

f. $\frac{3x-2}{3} + 5 < 1 - \frac{2x+1}{4}$ (dikalikan 12)

$4(3x - 2) + 60 < 12 - 3(2x + 1)$

$12x - 8 + 60 < 12 - 6x - 3$

$12x + 6x < 12 - 3 + 8 - 60$

$18x < -43$

$x < -\frac{43}{18}$ Jadi, himpunan penyelesaian adalah $\{x \mid x < -\frac{43}{18}\}$

g. $x + 3 < 2x + 5 \le x + 8$

(kelompokkan variabel di tengah dan konstanta di sebelah kiri dan kanan dengan cara mengurangkan semua ruas dengan x dan 5)

$x + 3 - x - 5 < 2x + 5 - x - 5 \le x + 8 - x - 5$

$-2 < x \le 3$, Jadi, himpunan penyelesaian adalah $\{x \mid -2 < x \le 3\}$

dengan garis bilangannya

h. $3 \le 4x - 5 < 11$

(tambahkan semua ruas dengan 5) diperoleh

$3 + 5 \le 4x < 11 + 5$

$8 \le 4x < 16$ (bagi semua ruas dengan 4) diperoleh

$2 \le x < 4$,

Jadi, himpunan penyelesaian adalah $\{x \mid 2 \le x < 4\}$

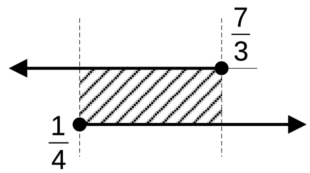
i. $x + 4 \le 5x + 3 \le 2x + 10$

(untuk menyelesaikan pertidaksamaan di atas, pisahkan menjadi dua pertidaksamaan. Setelah itu, cari irisannya dari HP kedua pertidaksamaan tersebut). Sebenarnya contoh g dan h dapat diselesaikan dengan cara ini.

$x + 4 \leq 5x + 3 \leq 2x + 10$ dipisahkan menjadi

$$x + 4 \leq 5x + 3 \quad \text{dan} \quad 5x + 3 \leq 2x + 10$$
$$x - 5x \leq 3 - 4 \quad \text{dan} \quad 5x - 2x \leq 10 - 3$$
$$-4x \leq -1 \quad \text{dan} \quad 3x \leq 7$$
$$x \geq \frac{1}{4} \quad \text{dan} \quad x \leq \frac{7}{3}$$

Grafik irisan



Jadi, himpunan penyelesaian adalah $\{ x \mid \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{7}{3} \}$

5. Soal-Soal Aplikasi Persamaan dan Pertidaksamaan Linier

Untuk menyederhanakan soal-soal verbal menjadi kalimat matematika dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan, objek yang ditanya dimisalkan dengan x.

Contoh 12

Bahlul meminjamkan uangnya kepada Fulan dan Eko sebanyak Rp5.000.000,00 dengan bunga masing-masing 5% dan 7% setahun. Setelah satu tahun Bahlul menerima bunga total sebesar Rp330.000,00. Tentukan modal yang dipinjam Fulan dan Eko.

Jawab:

Misalkan modal yang dipinjam Fulan adalah x

Modal yang dipinjam Eko adalah Rp5.000.000 – x

Bunga yang diperoleh Bahlul = Bunga dari Fulan + Bunga dari Eko

$$330.000 = 5\%\, x + 7\%(5.000.000 - x) \quad \text{(kalikan 100)}$$
$$33.000.000 = 5x + 7(5.000.000 - x)$$
$$33.000.000 = 5x + 35.000.000 - 7x$$
$$7x - 5x = 35.000.000 - 33.000.000$$
$$2x = 2.000.000 \Rightarrow x = 1.000.000$$

Jadi, modal yang dipinjam Fulan adalah Rp1.000.000,00 dan dipinjam Eko adalah Rp4.000.000,00.

Contoh 13

Seorang pedagang apel membeli 1.000 buah apel dengan harga Rp1.200,00 tiap buah. Pedagang tersebut kemudian menjual 400 buah dengan laba 20%, berapakah ia harus menjual sisanya yang 600 buah agar seluruhnya mendapatkan laba 35%?

Jawab:

Misalkan ia harus menjual sisanya yang 600 buah seharga x

Jadi, laba per buah = x – 1.200

Harga pembelian = 1000 buah x Rp1.200,00/buah

= Rp1.200.000,00

Laba seluruhnya = 35% $\times$ Rp1.200.000,00 = Rp.420.000,00

Laba seluruhnya = Laba 400 buah + laba 600 buah

$$420.000 = 20\% \times 400 \times 1200 + 600(x - 1.200)$$

$420.000 = 96.000 + 600x - 720.000$
$420.000 + 720.000 - 96.000 = 600x$
$600x = 1.044.000$
$x = 1.740$

Jadi, ia harus menjual yang 600 buah dengan tiap buahnya sebesar Rp1.740,00

Contoh 14

CV SEJAHTERA memproduksi mainan anak-anak dengan biaya Rp3.500,00 tiap unit dan biaya operasional produksi Rp100.000,00. Jika mainan akan dijual Rp5.000,00, tentukan banyaknya mainan yang harus diproduksi agar untung paling sedikit Rp75.000,00.

Jawab:

Misalkan banyaknya mainan yang diproduksi sebanyak x
Biaya total yang dikeluarkan = $3.500x + 100.000$
Pendapatan total yang diperoleh = $5.000x$
Untung = Pendapatan total – Biaya total
$= 5.000x - (3.500x + 100.000)$
$= 5.000x - 3.500x - 100.000$
$= 1.500x - 100.000$

Untung paling sedikit Rp75.000,00
Jadi, untung ≥ 75.000
$1.500x - 100.000 \geq 75.000$
$1.500x \geq 75.000 + 100.000$
$1.500x \geq 175.000$
$x \geq 116{,}67$

Jadi, supaya untung lebih dari Rp75.000,00 harus terjual 117 buah mainan anak-anak.

Contoh 15

Suatu perusahaan yang memproduksi barang tertentu dengan harga jual Rp900,00 tiap unit. Biaya tetap yang dikeluarkan Rp200.000,00 dan biaya variabel per unit barang adalah Rp400,00.

a. Tentukan model persamaan untuk total hasil penjulan dan biaya total.
b. Tentukan banyaknya unit barang harus dijual ketika terjadi titik pulang pokok.

Jawab:

a. Misalkan banyaknya barang terjual adalah x unit
Total hasil penjualan x unit yang masing-masing unitnya Rp900,00 barang adalah $R = 900x$
Biaya tetap = Rp200.000,00
Biaya variabel = Rp400,00
Biaya total produksi $Q = 200.000 + 400x$

b. Syarat terjadi titik pulang pokok, yaitu $R = Q$
$R = Q$
$900x = 200.000 + 400x$
$500x = 200.000$
$x = 400$

Jadi, banyaknya barang yang harus terjual agar terjadi pulang pokok adalah 400 unit.

B. Rangkuman Persamaan dan Pertidaksamaan Linier

1. Kalimat terbuka yang memuat tanda "=" disebut *Persamaan*. Sedangkan kalimat terbuka yang memuat tanda " $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ " disebut *Pertidaksamaan.*

2. Persamaan atau pertidaksamaan linier adalah suatu persamaan atau pertidaksamaan dengan variabelnya berpangkat satu.

3. Himpunan penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel dapat dicari dengan menggunakan metode sebagai berikut.
   a. eliminasi yaitu mencari nilai variabel dengan melenyapkan variabel yang lain dengan cara mengurangkan atau menjumlahkannya,
   b. substitusi yaitu mengganti atau menyatakan salah satu variabel dengan variabel lainnya,
   c. gabungan eliminasi dan substitusi.

4. Bentuk umum pertidaksamaan linier satu variabel dinyatakan dengan $ax + b\ (R)\ 0$; $a, b \in$ Riil dan (R) = salah satu relasi pertidaksamaan.

5. Beberapa hal yang perlu diperhatikan dalam menyelesaikan pertidaksamaan
   a. tanda pertidaksamaan tidak berubah arah jika pada ruas kiri dan kanan ditambahkan atau dikurangkan dengan bilangan negatif atau bilangan positif yang sama;
   b. tanda pertidaksamaan tidak berubah jika pada ruas kiri dan kanan dikalikan atau dibagi dengan bilangan positif yang sama;
   c. tanda pertidaksamaan berubah arah atau dibalik jika pada ruas kiri dan kanan dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatif yang sama.

LATIHAN 1

1. Tentukanlah nilai x dari persamaan-persamaan di bawah ini.
   a. $2x + 8 = x - 12$
   b. $3(2x + 1) = 27$
   c. $5x + 9 = 4x - 8$
   d. $2(x - 8) = 10 - x$
   e. $-3(x - 1) = -2(x + 5)$
   f. $3(2x - 1) = -2(3x - 1)$
   g. $-(4x - 4) + 5x = 2x + 8$
   h. $2(3x + 1) = -3(5 - x)$
   i. $2x + 5(x - 1) = 6 - 3x$
   j. $5(3x - 4) - x = 8$
   k. $3 + 5(x - 1) = 16 + 3x$
   l. $2(5x + 4) - 4x = 8 - (2x - 5)$
   m. $5(x - 1) = 3(x + 6)$
   n. $\frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{4}x + 5$
   o. $\frac{2x - 3}{5} = \frac{1 + 2x}{6}$
   p. $\frac{1}{3}(6x + 9) = \frac{1}{4}(2x + 4)$
   q. $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{4}x + 8$
   r. $\frac{2 - 3x}{5} = \frac{10 + x}{7}$
   s. $\frac{1}{3}(6x + 9) = \frac{3}{5}(2x - 4)$
   t. $2(2x - 4) - 3x = 8 - 3(2 - 5x)$

2. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan di bawah ini.

a. $8x - 2 + 6x = 12 - 2x + 4$
b. $\frac{x-3}{5} + 2 = \frac{1+3x}{2} - 1$
c. $3 - 2(1 - x) = 5 + 7(x - 3)$
d. $\frac{2}{5}(x - 9) = \frac{1}{4}(3x + 5)$
e. $6(x - 3) - 2x = 8 + 3(x + 1)$
f. $8x - 2x + 6x = 18 - 3x + 4$
g. $\frac{2x-3}{7} + 3 = \frac{1+x}{2} - 4$
h. $2 - 3(1 - 2x) = 5 - 2(2x + 3)$
i. $\frac{2}{5}(3x - 7) = \frac{1}{4}(x + 15)$
j. $4(2x - 3) - 8x = 1 + 3(2x - 1)$

3. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut.

a. $6x > 3x - 9$
b. $5x - 3 < 7x + 9$
c. $5(x - 2) \leq 6x + 10$
d. $19 - 3x < 2 - 5$
e. $6x - 2x > 3x - 12$
f. $3x - 3 < 7x + 13$
g. $5(2x - 2) \leq 12x - 10$
h. $19 - 3x < 2(x - 1) - 5$
i. $-2(5x + 4) - x > 3 - (6x - 5)$
j. $5 - 2(1 - 2x) \leq 10 + 6(x - 3)$
k. $3 + 4(2p - 1) > -12 + 3p$
l. $-3(x + 4) - 3x > 1 - (8x - 6)$
m. $8 - (1 - 2x) \leq 8 + 2(4x - 3)$
n. $3 - 4(2p - 1) > -12 + 5p$
o. $\frac{3x-2}{2} + 3 \leq 1 - \frac{3x+1}{5}$
p. $\frac{1}{2}x - 3 \geq \frac{1}{4}x - 5$
q. $\frac{2x-3}{5} \leq \frac{12+x}{2}$
r. $\frac{x-2}{3} + 5 < -2 - \frac{x+4}{5}$
s. $\frac{3}{2}x - 3 \geq \frac{1}{4}x - 7$
t. $\frac{2-3x}{4} \leq \frac{12+2x}{2}$

4. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan di bawah ini dan lukis garis bilangannya.

a. $7 \leq 2x + 3 \leq 23$
b. $2x - 7 < 5x + 2 \leq 2x + 20$
c. $4x - 10 \leq 3x + 5 \leq 4x + 17$
d. $2x + 2 \leq 4x + 1 \leq 3x + 9$
e. $3x + 2 \leq 6 - 5x \leq 2x + 10$
f. $4 \leq 2x + 3 \leq 10$
g. $x - 4 < 3x + 2 \leq x + 12$
h. $2x - 10 \leq 5x + 5 \leq 2x + 17$
i. $x + 5 \leq 3x + 1 \leq 2x + 8$
j. $2x + 1 \leq 3 - x \leq 2x + 5$

5. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linier di bawah ini.

a. $x - y = 2$
   $x + y = 1$
b. $2x - y = 4$
   $x - y = 5$
c. $3x - y = -7$
   $x + 3y = 1$
d. $5x + 2y = 9$
   $4x + y = 12$
e. $2x + y = 4$
   $x - y = 5$
f. $2x + y = 15$
   $3x + 2y = -8$
g. $4x + 2y - 13 = 0$
   $x + 15y + 4 = 0$
h. $5x - 2y = 2$
   $3x + 4y = 8$
i. $x + y = 3$
   $x + 2y = -1$

6. Selesaikanlah soal-soal aplikasi di bawah ini.

a. Tuan Rente meminjamkan uangnya kepada Jaka dan Joko Rp7.000.000,00 dengan bunga masing-masing 6% dan 9% setahun. Setelah satu tahun Tuan Rente menerima bunga total sebesar Rp480.000,00. Tentukan modal yang dipinjam Jaka dan Joko?

b. Toko buku membeli 700 buku kuitansi dengan harga Rp2.000,00 tiap buah. Toko tersebut kemudian menjual 500 buah dengan laba 15%, Berapakah harga jual tiap buku kuitansi sisanya, agar mendapatkan laba 20%?

c. CV ADIL memproduksi kopiah dengan biaya Rp6.000,00 tiap unit, dan biaya operasional produksi Rp500.000,00. Kopiah akan dijual Rp10.000,00. Tentukan banyaknya kopiah yang diproduksi agar laba paling sedikit Rp1.000.000,00

d. Harga 1 kg apel 2 kali harga 1 kg jeruk. Sedangkan harga 2 kg apel dan 3 kg jeruk Rp24.500,00. Jika dibeli 5 kg apel dan 10 kg jeruk, berapa rupiah yang harus dibayar?

e. Toko grosir buku membeli 800 buku jurnal dengan harga Rp4.000,00 tiap buku. Toko tersebut kemudian menjual 700 buah dengan laba 22%. Berapakah harga jual tiap buku sisanya, agar mendapatkan laba 20%?

f. Marliana menerima gaji pokok Rp600.000,00 per bulan ditambah komisi 10% atas penjualan yang dilakukannya. Marliana rata-rata mampu untuk menjual barang seharga Rp150.000,00 tiap dua jam. Berapa jam ia harus bekerja rata-rata tiap bulan, agar ia dapat menerima penghasilan Rp2.400.000,00 dalam sebulan?

7. Selesaikan soal-soal aplikasi di bawah ini.

a. Lima meja dan delapan kursi berharga \$115 sedangkan tiga meja dan lima kursi berharga \$70. Tentukan harga satu meja dan satu kursi.

b. Harga 3 baju dan 2 kaos adalah Rp280.000,00. Sedangkan harga 1 baju dan 3 kaos adalah Rp210.000,00. Tentukan harga 6 baju dan lima kaos.

c. Jumlah dua bilangan bulat adalah 55 dan selisih kedua bilangan itu adalah 25. Tentukan kedua bilangan tersebut.

d. Sebuah pulpen harganya 4 kali harga sebuah pensil. Apabila Marliana membeli 1 pulpen dan 3 pensil maka ia harus membayar Rp4.900,00. Berapa yang harus dikembalikan toko tersebut kepada Marliana jika membeli 2 pulpen dan 8 pensil dengan menggunakan selembar uang kertas dua puluh ribuan.

e. Jumlah peserta didik suatu kelas adalah 52 orang, jika banyaknya peserta didik laki-laki adalah 7 orang lebihnya daripada dua kali banyak peserta didik wanita, tentukanlah masing-masing jumlah peserta didik tersebut.
(petunjuk : Jika banyak laki-laki x dan banyak wanita y, maka $x = 2y + 7$)

f. Dalam sebuah pesta, banyaknya pengunjung pria dibanding dengan pengunjung wanita adalah 5 : 2. Jika di antara pengunjung pria pergi 5 orang, maka perbandingannya menjadi 2 : 1. Berapakah banyaknya pengunjung pesta tersebut.

g. Lima tahun yang lalu umur ayah enam kali umur anaknya. Lima tahun yang akan datang jumlah umur ayah dan anaknya adalah 55 tahun, tentukan umur ayah dan anaknya saat sekarang.

C. Persamaan dan Pertidaksamaan Kuadrat

Setelah mempelajari materi pada kompetensi dasar ini, kalian diharapkan dapat
- menjelaskan pengertian persamaan dan pertidaksamaan kuadrat,
- menjelaskan akar-akar persamaan kuadrat dan sifat-sifatnya, dan
- menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat

1. Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat adalah persamaan di mana pangkat tertinggi dari variabel (peubah) adalah dua. Bentuk umum adalah

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \text{ dengan } a, b, c \in R$$

Perhatikan jenis-jenis persamaan kuadrat berikut ini.
- $x^2 + 5x - 3 = 0$, dengan a = 1, b = 5, dan c = -3 (persamaan kuadrat biasa)
- $2x^2 + 5x = 0$, dengan a = 2, b = 5, dan c = 0 (persamaan kuadrat tidak lengkap)
- $x^2 - 6 = 0$, dengan a = 1, b = 0, dan c = -6 (persamaan kuadrat murni)

Mencari penyelesaian persamaan kuadrat berarti mencari nilai x sedemikian sehingga jika nilai disubstitusikan akan memenuhi persamaan tersebut. Penyelesaian persamaan kuadrat disebut juga akar-akar persamaan kuadrat.

Beberapa cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan kuadrat, yaitu: dengan faktorisasi, melengkapkan kuadrat sempurna dan dengan rumus kuadrat (biasa dikenal dengan rumus abc).

a. Faktorisasi

Dengan menggunakan sifat perkalian pada bilangan riil, yaitu jika dua bilangan riil dikalikan hasilnya sama dengan nol. Dengan demikian, salah satu dari bilangan-bilangan tersebut sama dengan nol atau kedua-duanya sama dengan nol.

$$\text{Jika } p \times q = 0 \text{ maka } p = 0 \text{ atau } q = 0$$

Contoh 16

Carilah akar-akar persamaan kuadrat berikut ini.

a. $x^2 + 2x - 8 = 0$ c. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

b. $2x^2 + 3x = 0$ d. $5x^2 - 3 = 0$

Jawab:

Untuk menyelesaikan persamaan $ax^2 + bx + c = 0$, terlebih dahulu dicari dua bilangan memenuhi syarat sebagai berikut.
- Hasil kalinya adalah sama dengan $a \times c$
- Hasil jumlahnya adalah sama dengan b

Misalkan dua bilangan yang memenuhi syarat tersebut adalah α dan β, maka

$$\alpha\,\beta = a \times c \text{ dan } \alpha + \beta = b$$

Dengan demikian, bentuk faktornya adalah

$$(ax + \alpha)(ax + \beta) = 0$$

dengan membagi a pada ruas kiri dan kanan, maka akan didapat bentuk asal atau mula-mula.

a. $x^2 + 2x - 8 = 0$

Dari persamaan tersebut didapat $a = 1$, $b = 2$, dan $c = -8$.
Cari dua bilangan sehingga
Hasil kalinya $= 1 \times (-8) = -8$,
Hasil penjumlahannya = 2.
Bilangan yang memenuhi syarat tersebut adalah 4 dan -2, sehingga

$x^2 + 2x - 8 = 0$
$(x + 4)(x - 2) = 0$
$x + 4 = 0$ atau $x - 2 = 0$
$x = -4$ $\quad$ $x = 2$

b. $2x^2 + 3x = 0$

Dari persamaan tersebut didapat $a = 2$, $b = 3$, dan $c = 0$.
Carilah dua bilangan sehingga,
Hasil kalinya $= 2 \times 0 = 0$,
Hasil penjumlahannya = 3
Bilangan yang memenuhi syarat tersebut adalah 0 dan 3, sehingga

$2x^2 + 3x = 0$
$(2x + 0)(2x + 3) = 0$
Membagi dengan 2 pada ruas kiri dan kanan didapat
$(x + 0)(2x + 3) = 0$
$x + 0 = 0$ atau $2x + 3 = 0$
$x = 0$ atau $2x = -3$

$$x = \frac{-3}{2}$$

Untuk mempersingkat dapat juga digunakan cara memfaktorkan langsung (persamaan dengan nilai $c = 0$).

$2x^2 + 3x = 0$
$x(2x + 3) = 0$
$\underbrace{x}\underbrace{(2x+3)} = 0$

$x = 0$ atau $2x + 3 = 0$
$2x = -3$

$$x = -\frac{3}{2}$$

c. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

Dari persamaan tersebut didapat $a=2$, $b = 5$, dan $c = -3$
Cari dua bilangan sehingga
Hasil kalinya $= 2 \times (-3) = -6$,
Hasil penjumlahannya = 5
Bilangan yang memenuhi syarat tersebut adalah -1 dan 6, sehingga

$2x^2 + 5x - 3 = 0$
$(2x - 1)(2x + 6) = 0$
Membagi dengan 2 pada ruas kiri dan kanan didapat
$(2x - 1)(x + 3) = 0$
$2x - 1 = 0$ atau $x + 3 = 0$
$2x = 1$ atau $x = -3$

$$x = \frac{1}{2}$$

d. $5x^2 - 3 = 0$

Untuk mempersingkat gunakan pemfaktoran cara langsung (persamaan dengan $b = 0$), yaitu

$(\sqrt{5}x - \sqrt{3})(\sqrt{5}x + \sqrt{7}) = 0$
$(\sqrt{5}x - \sqrt{3}) = 0$ atau $(\sqrt{5}x + \sqrt{3}) = 0$
$\sqrt{5}x = \sqrt{3}$ atau $\sqrt{5}x = -\sqrt{3}$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \qquad x = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

b. Melengkapkan Bentuk Kuadrat Sempurna

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, diubah menjadi bentuk kuadrat dengan cara sebagai berikut.

- ❖ Pastikan koefisien dari x^2 adalah 1, bila tidak bagilah dengan bilangan sedemikian sehingga koefisiennya adalah 1.

- Tambahkan ruas kiri dan kanan dengan setengah koefisien dari x kemudian kuadratkan.
- Buatlah ruas kiri menjadi bentuk kuadrat, sedangkan ruas kanan dimanipulasi, sehingga menjadi bentuk yang lebih sederhana.

Contoh 17

Dengan cara melengkapkan bentuk kuadrat sempurna, carilah akar-akarnya.

a. $x^2 - 4x - 5 = 0$ c. $x^2 - 4 = 0$

b. $2x^2 - x - 1 = 0$ d. $x^2 + 2x = 0$

Jawab:

a. $x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x^2 - 4x = 5$$
$$x^2 - 4x + \left(\frac{1}{2}\cdot -4\right)^2 = 5 + \left(\frac{1}{2}\cdot -4\right)^2$$
$$x^2 - 4x + (-2)^2 = 5 + (-2)^2$$
$$(x-2)^2 = 9$$
$$x - 2 = \pm\sqrt{9}$$
$$x - 2 = \pm 3$$
$$x_1 = 3 + 2 \text{ atau } x_2 = -3 + 2$$
$$= 5 \qquad\qquad = -1$$

b. $2x^2 - x - 1 = 0$

$$x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$$
$$x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$$
$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$
$$x - \frac{1}{4} = \pm\sqrt{\frac{9}{16}}$$
$$x - \frac{1}{4} = \pm\frac{3}{4}$$
$$x_1 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \text{ atau } x_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$
$$= -\frac{1}{2} \qquad\qquad = 1$$

c. $x^2 - 4 = 0$

Karena b = 0 maka menambahkan dengan setengah koefisien b dikuadratkan pada kedua ruas tidak memberikan arti pada persamaan tersebut.

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$
$$x_1 = -2 \quad \text{atau} \quad x_2 = 2$$

d. $x^2 + 2x = 0$

$$x^2 + 2x + \left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)^2$$
$$x^2 + 2x + (1)^2 = 1$$
$$(x+1)^2 = 1$$
$$x + 1 = \pm\sqrt{1}$$
$$x + 1 = \pm 1$$
$$x_1 = -1 - 1 \text{ atau } x_2 = 1 - 1$$
$$= -2 \qquad\qquad = 0$$

c. Rumus Kuadrat

Dengan menggunakan aturan melengkapkan kuadrat sempurna yang telah dipelajari sebelumnya, dapat dicari rumus untuk menyelesaikan persamaan kuadrat.

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a})^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{\mathbf{x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

Bentuk di atas disebut rumus kuadrat.

Contoh 18

Tentukan penyelesaian persamaan berikut dengan menggunakan rumus di atas.

a. $x^2 - 6x + 9 = 0$

b. $x^2 - 1 = 0$

Jawab:

a. Dari persamaan diperoleh a = 1, b = -6, dan c = 9 gunakan rumus kuadrat

$$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$= \frac{6}{2} = 3$$

$x_1 = 3$ atau $x_2 = 3$

Mempunyai dua akar sama

b. Dari persamaan diperoleh a = 1, b = 0, dan c = -1 gunakan rumus kuadrat

$$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2a}$$

$$= \frac{-0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4\cdot 1\cdot (-1)}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{0 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$= \pm\frac{2}{2}$$

$x_1 = -1$ atau $x_2 = 1$

Mempunyai dua akar real berlawanan

2. Pertidaksamaan Kuadrat

Pertidaksamaan kuadrat adalah pertidaksamaan dengan pangkat tertinggi dari variabel (peubah) adalah dua. Himpunan penyelesaian (HP) pertidaksamaan dapat dituliskan dalam bentuk notasi himpunan atau dengan garis bilangan.

Langkah-langkah untuk mencari himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat adalah sebagai berikut.

- Nyatakan pertidaksamaan dalam bentuk persamaan kuadrat (ruas kanan = 0).
- Carilah akar-akar dari persamaan tersebut.
- Buatlah garis bilangan yang memuat akar-akar tersebut.
- Tentukan tanda (positif atau negatif) pada masing-masing interval dengan cara menguji tanda pada masing-masing interval tersebut.
- Himpunan penyelesaian diperoleh dari interval yang memenuhi pertidaksamaan tersebut.

Contoh 19

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut ini.

a. $x^2 - 2x - 8 > 0$

Jawab:

Nyatakan dalam bentuk persamaan.

$x^2 - 2x - 8 = 0$

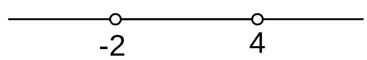
Carilah akar-akarnya

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x - 4)(x + 2) = 0$

$x = 4$ atau $x = -2$

Buatlah garis bilangan yang memuat akar-akar tersebut



Garis bilangan terbagi dalam tiga interval yaitu Interval kiri, tengah dan kanan. Tentukan tanda pada tiap intervalnya dengan cara mengambil salah satu bilangan yang terdapat pada masing-masing interval, kemudian ujilah tandanya.

	-3	0	5
$x^2 - 2x - 8$	+	–	+

Dari tabel didapat

- interval yang memuat -3 bertanda (–)
- interval yang memuat 0 bertanda (+)
- interval yang memuat 5 bertanda(–)

Karena pada soal tanda pertidaksamaan lebih dari (>), maka untuk penyelesaian diambil interval yang bertanda positif (+), yaitu

$x < -2$ atau $x > 4$

HP = $\{x \mid x < -2$ atau $x > 4, x \in R\}$

Untuk mempersingkat penentuan tanda pada tiap interval dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut.

❖ Jika koefisien x^2 bertanda positif, maka ruas kanan dari interval diberi tanda positif, bergerak ke kiri (tengah) bertanda negatif dan interval paling kiri kembali bertanda positif.

❖ Sebaliknya jika koefisien x^2 bertanda negatif, maka ruas kanan dari interval diberi tanda negatif, bergerak ke kiri (tengah) bertanda positif dan interval kiri kembali bertanda negatif.

b. $4 - x^2 \geq 0$

Jawab:

$4 - x^2 \geq 0$

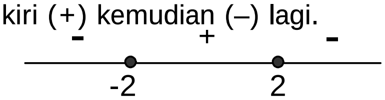
$4 - x^2 = 0$

$(2 - x)(2 + x) = 0$

$2 - x = 0$ atau $2 + x = 0$

$x = 2$ atau $x = -2$

Karena koefisien x^2 bertanda (–), maka interval kanan bertanda (–) berganti ke kiri (+) kemudian (–) lagi.



Karena pada soal tanda pertidaksamaan lebih dari sama dengan (≥), maka untuk penyelesaian diambil interval yang bertanda (+).

HP = $\{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \in R\}$

Contoh 20

Sisi miring sebuah segitiga adalah 34 cm. Carilah panjang dari kedua sisi siku-sikunya apabila panjang sisi siku-siku yang pertama lebih panjang 14 cm dari yang lain.

Jawab:

Ambil x dan x + 14 sebagai panjang sisi siku-sikunya, maka

$x^2 + (x+14)^2 = 34^2$ (Teorema Pythagoras)

$x^2 + 14x - 480 = 0$

$(x + 30)(x - 16) = 0$

x = -30 atau x = 16. Jadi, sisi siku-siku tersebut adalah 16 dan 16 + 14 = 30.

LATIHAN 2

Selesaikan persamaan kuadrat berikut dengan faktorisasi.

1. $x^2 - 7x + 6 = 0$
2. $x^2 - 2x + 1 = 0$
3. $x^2 - 4 = 0$
4. $x^2 + 3x - 4 = 0$
5. $x^2 + x - 6 = 0$
6. $3x^2 - 4x = 0$
7. $5x^2 - 6 = 0$
8. $x^2 + 4x + 3 = 0$
9. $x^2 + 3x - 10 = 0$
10. $2x^2 + x - 1 = 0$
11. $2x^2 + 7x + 3 = 0$
12. $2x^2 + 5x + 2 = 0$
13. $2x^2 + 5x + 3 = 0$
14. $3x^2 - 2x - 8 = 0$
15. $9x^2 - 26x + 16 = 0$
16. $6x^2 - 11x + 3 = 0$
17. $3x^2 + 2x = 21$
18. $9x^2 - 1 = 0$
19. $4x^2 = 2x + 12$
20. $10x - x^2 = 0$

Selesaikan persamaan kuadrat berikut dengan melengkapkan kuadrat sempurna.

21. $x^2 - 3x - 10 = 0$
22. $4x^2 - 12x + 8 = 0$
23. $x^2 + 4x - 12 = 0$
24. $x^2 + 4x + 4 = 0$
25. $x^2 + 2x = 4$
26. $x^2 - 2x = 0$
27. $x^2 - 4 = 0$
28. $-x^2 + 2x + 10 = 0$
29. $2x^2 + 11x + 9 = 0$
30. $x^2 - 2x - 15 = 0$
31. $2x^2 + 2x - 3 = 0$
32. $4x^2 + 4x - 15 = 0$
33. $2x^2 + 7x - 4 = 0$
34. $2x^2 + 5x - 3 = 0$
35. $x^2 - 6x + 9 = 0$
36. $2x^2 - 5x - 3 = 0$
37. $-x^2 + 2x = 0$
38. $3x^2 - 4x + 1 = 0$
39. $x^2 - x - 2 = 0$
40. $x^2 + 2x + 1 = 0$

Gunakan rumus kuadrat untuk menyelesaikan soal-soal di bawah ini.

41. $x^2 - 6x + 8 = 0$
42. $3x^2 - 5x - 2 = 0$
43. $6x^2 - 5x - 6 = 0$
44. $2x^2 + 7x - 5 = 0$
45. $3x^2 - 8x - 3 = 0$
46. $8x^2 + 2x - 3 = 0$
47. $3x^2 - x = 4$
48. $6x^2 - 2x = 0$
49. $x^2 - 9 = 0$
50. $x^2 - 2x = 0$

51. Salah satu akar persaman kuadrat $x^2 - 2x + c = 0$ adalah 1, tentukan nilai c dan akar yang lainnya.

52. Jika x=1 memenuhi persamaan $(k - 1)x^2 + (3k - 1)x = 3k$, tentukan k dan akar keduanya dari persamaan tersebut.

53. Akar $4x^2 - 4x = m^2 - 2m$ adalah 4, hitunglah nilai m.

54. Sebuah kotak terbuka akan dibuat dari bahan seluas 160 cm^2. Tinggi kotak adalah 3 cm dan sisi alas kotak berbentuk persegi. Tentukan panjang sisi alasnya

Susunlah sehingga berbentuk persamaan kuadrat, kemudian carilah akar-akarnya pada soal nomor 55 – 58.

55. $\frac{x-6}{2x-3} - \frac{x+3}{x+1} = 1$

56. $\frac{14x^2 - 5}{3} = -11x$

57. $\frac{6}{x} - \frac{8}{x-5} = 6$

58. $2x + 1 - \frac{14}{x+2} = 0$

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan di bawah ini.

59. $x^2 + 2x - 3 < 0$
60. $x^2 - x - 20 > 0$
61. $x^2 \leq 8x - 7$
62. $6x - x^2 > 1$
63. $-x^2 + 11x + 26 \geq 0$
64. $5x^2 + x \leq 6$
65. $2x^2 + 3x > 2$
66. $5 + 3x^2 \geq x - x^2$
67. $-2x^2 + 7x - 5 \leq 0$
68. $x^2 - 3x - 88 \geq 0$
69. $-x^2 - 7x + 44 \geq 0$
70. $x^2 > 5x - 6$
71. $x^2 - 6x - 40 < 0$
72. $3x^2 + 2x \leq 1$
73. $x^2 + 2x \geq -3$
74. $5x^2 > 2x + 3$
75. $2x^2 + 3x - 35 < 0$
76. $x^2 - 10x + 25 > 0$

3. Jenis-jenis Akar Persamaan Kuadrat

Jika diperhatikan cara mencari penyelesaian persamaan kuadrat dengan menggunakan rumus, maka jenis-jenis akar-akar tersebut akan bergantung pada nilai $b^2 - 4ac$. Oleh karena itu, $b^2 - 4ac$ disebut diskriminan atau pembeda dan biasanya disingkat dengan D dimana $D = b^2 - 4ac$. Beberapa kemungkinan jenis-jenis akar persamaan kuadrat:

a. jika $D > 0$ tetapi bukan kuadrat murni, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar riil yang berbeda;
b. jika $D = 0$, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar riil yang sama atau sering disebut mempunyai akar kembar;
c. jika $D < 0$, maka persamaan kuadrat, tidak mempunyai akar riil (akar imajiner);
d. jika D merupakan kuadrat murni, maka persamaan kuadrat mempunyai akar rasional yang berlainan.

Contoh 21

Selidiki jenis akar-akar persamaan kuadrat di bawah ini tanpa mencari akarnya terlebih dahulu.

a. $x^2 + 4x + 4 = 0$ b. $x^2 + x + 2 = 0$ c. $x^2 - 2x - 3 = 0$

Jawab:

a. Dari persamaan diperoleh a = 1, b = 4, dan c = 4
$D = b^2 - 4ac$
$= 4^2 - 4 \times 1 \times 4$
$= 16 - 16$
$= 0$
Dua akar sama atau kembar.

b. Dari persamaan diperoleh a = 1, b = 1, dan c = 2
$D = 1^2 - 4 \times 1 \times 2$
$= 1 - 8$
$= -7 < 0$
Tidak mempunyai akar riil (akar imajiner).

c. Dari persamaan diperoleh a =1, b = -2, dan c = -3
$D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)$
$= 4 + 12$
$= 16 > 0$
D merupakan bilangan kuadrat murni. Persamaan mempunyai dua akar rasional yang berbeda.

Contoh 22

Tentukan harga k agar persamaan kuadrat $x^2 + 2x + k = 0$ mempunyai akar kembar dan akar persamaan kuadratnya.

Jawab:

Dari persamaan a = 1, b = 2, dan c = k

Syarat agar akarnya kembar adalah D = 0

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= 2^2 - 4 \times 1 \times k \\ &= 4 - 4k = 0 \\ &\quad -4k = -4 \Leftrightarrow k = 1 \end{aligned}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$(x + 1)(x + 1) = 0$$
$$x + 1 = 0 \text{ atau } x + 1 = 0$$
$$x = -1 \qquad x = -1$$

4. Rumus Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

Dari rumus kuadrat, diperoleh akar-akar persamaan kuadrat sebagai berikut.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jika kedua akar tersebut dijumlahkan dan dikalikan maka hasilnya

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b - b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \quad \text{dan} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Dengan demikian $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ dan $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Contoh 23

Jika x_1 dan x_2 akar-akar dari persamaan $x^2 + 2x - 3 = 0$, tentukanlah

a. $x_1 + x_2$

b. $x_1 \cdot x_2$

c. $x_1^2 + x_2^2$

d. $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$

Jawab:

Dari persamaan diperoleh a = 1, b = 2, dan c = -3.

a. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$ c. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-2)^2 - 2(-3) = 10$

b. $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$ d. $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = -3(-2) = 6$

Contoh 24

Salah satu akar $x^2 + 3x + k = 0$ adalah dua kali akar yang lain. Hitunglah nilai k.

Jawab:

Dari persamaan diperoleh a = 1, b = 3, dan c = k. Jika akar-akar tersebut x_1 dan x_2, maka $x_1 = 2x_2$ (salah satu akarnya dua kali akar yang lain).

Dengan rumus, maka jumlah akar-akarnya adalah

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$$
$$2x_2 + x_2 = -3$$
$$3x_2 = -3$$
$$x_2 = -1 \text{ sehingga}$$
$$x_1 = 2x_2 = 2 \cdot (-1) = -2$$

Dengan rumus, hasil kali akar-akarnya adalah

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{k}{1} = k$$
$$-2.(-1) = k$$
$$k = 2$$

Contoh 25

Hitunglah nilai k agar persamaan $2x^2 + kx + k = 0$ mempunyai akar-akar berikut.

a. Berkebalikan b. Berlawanan

Jawab:

a. Dari persamaan a = 2, b = k, dan c = k. Misalkan akar-akarnya adalah x_1 dan x_2, maka akar-akar berkebalikan $x_1 = \frac{1}{x_2}$ atau $x_1 x_2 = 1$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{k}{2} = 1$$
$$\frac{k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2$$

b. Akar-akar berlawanan $x_1 = -x_2$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$-x_2 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{k}{2}$$
$$0 = -\frac{k}{2} \Leftrightarrow k = 0$$

D. Rangkuman Persamaan dan Pertidaksamaan Kuadrat

1. Persamaan kuadrat adalah persamaan di mana pangkat tertinggi dari variabel (peubah) adalah dua. Bentuk umumnya adalah

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \text{ dengan } a, b, c \in R$$

2. Cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan kuadrat, yaitu sebagai berikut.
   a. Faktorisasi dengan menggunakan sifat, jika $p \times q = 0$ maka $p = 0$ atau $q = 0$
   b. Melengkapkan bentuk kuadrat sempurna dengan cara sebagai berikut.
      - ❖ Pastikan koefisien dari x^2 adalah 1, bila tidak bagilah dengan bilangan sedemikian sehingga koefisiennya adalah 1.
      - ❖ Tambahkan ruas kiri dan kanan dengan setengah koefisien dari x kemudian kuadratkan.
      - ❖ Buatlah ruas kiri menjadi bentuk kuadrat, sedangkan ruas kanan kita manipulasi sehingga menjadi bentuk yang lebih sederhana.

   c. Rumus Kuadrat, yaitu $\mathbf{x_{1.2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

3. Pertidaksamaan kuadrat adalah pertidaksamaan dengan pangkat tertinggi dari variabel (peubah) adalah dua. Langkah-langkah menentukan HP nya adalah sebagai berikut.
   - Nyatakan pertidaksamaan dalam bentuk persamaan kuadrat dan cari akarnya.
   - Buatlah garis bilangan yang memuat akar-akar tersebut dan tentukan tanda (positif atau negatif) pada masing-masing interval dengan cara menguji tanda pada masing-masing interval tersebut.
   - HP diperoleh dari interval yang memenuhi pertidaksamaan tersebut.

4. Diskriminan dari fungsi kuadrat adalah D dengan $D = b^2 - 4ac$.

5. Beberapa kemungkinan jenis-jenis akar persamaan kuadrat adalah sebagai berikut.
   a. Jika $D > 0$ tetapi bukan kuadrat murni, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar riil yang berbeda.
   b. Jika $D = 0$, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar riil yang sama atau sering disebut mempunyai akar kembar.
   c. Jika $D<0$, maka persamaan kuadrat tidak mempunyai akar riil (akar imajiner).
   d. Jika D merupakan kuadrat murni, maka persamaan kuadrat mempunyai akar rasional yang berlainan.

6. Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan kuadrat, maka berlaku rumus berikut.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

LATIHAN 3

1. Selidikilah sifat-sifat akar persamaan kuadrat berikut ini.
   a. $x^2 - 2x + 1 = 0$
   b. $x^2 + 4x + 3 = 0$
   c. $x^2 + x + 1 = 0$
   d. $2x^2 - 2x = 0$
   e. $x^2 - 10 = 0$
   f. $3x^2 - 2x + 10 = 0$

2. Dengan menggunakan pada soal nomor 1, tentukanlah hasil jumlah dan hasil kali akar-akarnya.

3. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $x^2 + 4x + 3 = 0$, tentukanlah

   a. $x_1 + x_2$ d. $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$

   b. $x_1 \cdot x_2$ e. $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$

   c. $x_1^2 + x_2^2$ f. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Untuk persamaan pada soal nomor 4 – 6, tentukanlah

   a. $x_1 + x_2$ d. $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$

   b. $x_1 \cdot x_2$ e. $(x_1 - x_2)^2$

   c. $x_1^2 + x_2^2$ f. $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$

4. $x^2 + 2x + 1 = 0$ 5. $x^2 - x = 0$ 6. $x^2 - 2 = 0$

E. Penerapan Persamaan dan Pertidaksamaan Kuadrat

Setelah mempelajari materi pada kompetensi dasar ini, kalian diharapkan dapat

- menyusun persamaan kuadrat berdasarkan akar-akar yang diketahui,
- menyusun persamaan kuadrat berdasarkan akar-akar persamaan kuadrat lain,
- menyelesaikan masalah program keahlian yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat.

1. Menyusun Persamaan Kuadrat

Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan kuadrat, maka persamaan kuadratnya adalah sebagai berikut

Rumus perkalian faktor atau Rumus jumlah dan hasil kali akar-akar

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Contoh 26

Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya sebagai berikut.

a. -2 dan 5 c. $\frac{2}{3}$ dan -2

b. $1 - \sqrt{2}$ dan $1 + \sqrt{2}$ d. $-\frac{1}{5}$ dan $\frac{3}{2}$

Jawab:

a. Menggunakan rumus perkalian faktor

Misalkan $x_1 = -2$ dan $x_2 = 5$

$$(x - (-2))(x - 5) = 0$$
$$(x + 2)(x - 5) = 0$$
$$x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar

Misalkan $x_1 = -2$ dan $x_2 = 5$

$x_1 + x_2 = -2 + 5$ dan $x_1 \cdot x_2 = -2 \cdot 5$

$= 3$ $= -10$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$
$$x^2 - (3)x + (-10) = 0$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

b. $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ dan $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ (gunakan rumus jumlah dan hasil kali)

$x_1 + x_2 = (1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) = 2$

$x_1 \cdot x_2 = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = -1$

$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$

$x^2 - 2x + (-1) = 0$, sehingga $x^2 - 2x - 1 = 0$

c. $x_1 = \frac{2}{3}$ dan $x_2 = -2$

$x_1 + x_2 = \frac{2}{3} + (-2) = \frac{2-6}{3} = -\frac{4}{3}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3} \cdot (-2) = -\frac{4}{3}$

$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 . x_2) = 0$

$x^2 - (-\frac{4}{3})x + (-\frac{4}{3}) = 0$, sehingga $3x^2 + 4x - 4 = 0$

d. $x_1 = -\frac{1}{5}$ dan $x_2 = \frac{3}{2}$

$x_1 + x_2 = -\frac{1}{5} + \frac{3}{2}$

$= \frac{-2+15}{10} = \frac{13}{10}$

$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{5} . \frac{3}{2} = -\frac{3}{10}$

$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 . x_2) = 0$

$x^2 - \frac{13}{10}x + (-\frac{3}{10}) = 0$, sehingga $10x^2 - 13x - 3 = 0$

2. Menyusun Persamaan Kuadrat Berdasarkan Akar-akar Persamaan Kuadrat Lain

Untuk menentukan persamaan kuadrat berdasarkan akar-akar persamaan kuadrat lain, perhatikan contoh-cotoh soal di bawah ini.

Contoh 27

Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya dua kali akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 10 = 0$.

Jawab:

Misalkan akar-akar persamaan $x^2 - 2x - 10 = 0$ adalah x_1 dan x_2,
Dari persamaan diperoleh a = 1, b = -2 dan c = -10, sehingga

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$ dan $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-10}{1} = -10$

Misalkan akar-akar persamaan kuadrat baru yang akan dicari adalah α dan β yang akarnya dua kali akar-akar persamaan yang diketahui atau $\alpha = 2x_1$ dan $\beta = 2x_2$.

$\alpha + \beta = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 2 = 4$ dan $\alpha \cdot \beta = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1 \cdot x_2 = 4(-10) = -40$

Persamaan kuadrat baru yang mempunyai akar-akar α dan β adalah

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha \cdot \beta = 0$$
$$x^2 - (4)x + (-40) = 0$$
$$x^2 - 4x - 40 = 0$$

Contoh 28

Tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $x_1 + 2$ dan $x_2 + 2$ dari persamaan kuadrat $x^2 = 3x - 6$ yang mempunyai akar-akar x_1 dan x_2.

Jawab:

$x^2 = 3x - 6$

$x^2 - 3x + 6 = 0$ diperoleh a = 1, b= -3 dan c = 6

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 3$ $\qquad$ $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = 6$

misal akar-akar persamaan kuadrat yang baru adalah α dan β,

$\alpha = x_1 + 2$ dan $\beta = x_2 + 2$, maka

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= x_1 + 2 + x_2 + 2 \\ &= x_1 + x_2 + 4 \\ &= 3 + 4 \\ &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= (x_1 + 2) \,.\, (x_2 + 2) \\ &= x_1 \cdot x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4 \\ &= x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 \\ &= 6 + 2 \cdot 3 + 4 = 16 \end{aligned}$$

$$x^2 - (\alpha + \beta)\,x + (\alpha \cdot \beta) = 0$$
$$x^2 - 7x + 16 = 0$$

3. Aplikasi Persamaan dan Pertidaksamaan Kuadrat

Contoh 29

Sebuah pabrik mainan menjual produknya seharga Rp6.000,00 per unit. Biaya pembuatan x unit produk didapat menurut persamaan B = x^2 + 1.000 x. Berapa unit produk harus diproduksi dan dijual agar mendapatkan laba Rp6.000.000,00?

Gambar 2.3 Hasil produksi pabrik pembuatan mainan

Jawab:

Laba = Pendapatan – Biaya pembuatan

= Harga jual x jumlah yang diproduksi – Biaya pembuatan

$6.000.000 = 6.000\,x - (x^2 + 1.000\,x)$
$0 = x^2 - 5.000\,x + 6.000.000$
$0 = (x - 3.000)(x - 2.000)$
$x - 3.000 = 0$ atau $x - 2.000 = 0$
$x_1 = 3.000$ atau $x_2 = 2.000$

Jadi, untuk mendapatkan laba Rp6.000.000,00 harus diproduksi dan terjual sebanyak 3.000 unit atau 2.000 unit.

Contoh 30

Pak Somad memiliki sebidang tanah berbentuk persegi dengan ukuran (2x + 5) meter dan Pak Karta juga memiliki sebidang tanah berbentuk persegi panjang dengan ukuran panjang (10x– 5) meter dan lebar 2x meter. Luas tanah Pak Karta dua kalinya luas tanah pak Somad. Tentukan luas tanah Pak Somad dan Pak Karta.

Jawab:

Luas tanah Pak Somad = sisi x sisi
$= (2x + 5)(2x + 5) = 4x^2 + 20x + 25$

Luas tanah Pak Karta = Panjang x lebar
$= (10x - 5)\cdot 2x = 20x^2 - 10x$

Luas tanah Pak Karta = dua kalinya luas tanah Pak Somad
$20x^2 - 10x = 2\,(4x^2 + 20x + 25)$
$20x^2 - 10x = 8x^2 + 40x + 50$
$12x^2 - 50x - 50 = 0$
$6x^2 - 25x - 25 = 0$
$(6x + 5)(x - 5) = 0$
$6x + 5 = 0$ atau $x - 5 = 0$
$x_1 = -1{,}2$ (tidak memenuhi) atau $x_2 = 5$

Jadi, luas tanah Pak Somad = $(2\cdot 5 + 5)(\,2\cdot 5 + 5) = 225\text{ m}^2$
luas tanah Pak Karta = $(10\cdot 5 - 5)\cdot 2\cdot 5 = 450\text{ m}^2$

F. Rangkuman Penerapan Persamaan dan Pertidaksamaan Kuadrat

1. Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan kuadrat, maka persamaan kuadratnya adalah sebagai berikut.

   Rumus perkalian faktor atau Rumus jumlah dan hasil kali akar-akar

   $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ $\qquad$ $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1\cdot x_2 = 0$

2. Langkah-langkah menyusun persamaan kuadrat dari akar-akar persamaan kuadrat lain sebagai berikut:
   a. Misalkan akar-akar persamaan yang diketahui adalah x_1 dan x_2.
   b. Tentukan nilai $x_1 + x_2$ dan $x_1\cdot x_2$
   c. Misalkan akar-akar persamaan kuadrat baru yang akan dicari adalah α dan β
   d. Tentukan nilai $\alpha + \beta$ dan $\alpha\cdot\beta$
   e. Persamaan kuadrat baru yang diperoleh adalah : $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\cdot\beta = 0$

LATIHAN 4

1. Susunlah persamaan kuadrat baru dengan menggunakan rumus perkalian faktor dan rumus jumlah dan hasil kali yang mempunyai akar-akar sebagai berikut.
   a. 3 dan -2
   b. $\frac{1}{2}$ dan 2
   c. $\sqrt{2}$ dan $-\sqrt{2}$
   d. 0 dan 4
   e. 5 dan $\frac{2}{5}$
   f. $1 \pm \sqrt{2}$
   g. -1 dan 1
   h. $\frac{3}{4}$ dan $\frac{4}{3}$
   i. $4 + 2\sqrt{3}$ dan $4 - 2\sqrt{3}$

2. Akar-akar $3x^2 - 2x + 10$ adalah x_1 dan x_2, susunlah persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya adalah
   a. $x_1 + 5$ dan $x_2 + 5$
   b. x_1^2 dan x_2^2
   c. $x_1 - 3$ dan $x_2 - 3$
   d. $-x_1$ dan $-x_2$
   e. $2x_1 + 1$ dan $2x_2 + 1$
   f. $x_1 + 3$ dan $x_2 + 3$

3. Susunlah persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya kebalikan dari akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 4x + 5 = 0$.

4. Susunlah persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya lima kali akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 5x + 1 = 0$.

5. Susunlah persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya kuadrat dari akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 + 3x - 1 = 0$.

6. Sebuah pabrik menjual produknya seharga Rp7.000,00 per unit. Biaya pembuatan x unit produk didapat menurut persamaan $B = 2x^2 + 2000x$. Berapa unit produk harus diproduksi dan dijual agar mendapatkan laba Rp2.000.000,00?

7. Pak Ali memiliki sebidang tanah berbentuk persegi panjang dengan ukuran panjang $(20x + 50)$ meter dan lebar $4x$ meter. Jika luas tanah Pak Ali 4 kali dari luas tanah Ibu Selvi yang memiliki sebidang tanah berbentuk persegi dengan ukuran $(4x + 10)$ meter. Tentukan ukuran tanah Pak Ali dan Ibu Selvi.

Gambar 2.4 Tanah Pak Ali

8. Biaya total untuk pembuatan x unit barang tertentu, diperoleh dari bentuk $C = 10x^2 - 50x + 7.000$. Berapa banyak unit dapat dibuat untuk biaya total yang dikeluarkan sebesar Rp75.000,00?

Uji Kemampuan

A. Pilihan Ganda

Pilihlah salah satu jawaban a, b, c, d dan e yang benar.

1. Himpunan penyelesaian dari $2(x - 3) < 4(2x + 6)$ adalah . . . .
   a. $\{ x \mid x < -5 \}$
   b. $\{ x \mid x > -5 \}$
   c. $\{ x \mid x < -2 \}$
   d. $\{ x \mid x < 5 \}$
   e. $\{ x \mid x > 5 \}$

2. Himpunan penyelesaian dari $2 - 3(x - 1) < 2 - 6(x + 1)$ adalah . . . .
   a. $\{ x \mid x < 3\}$
   b. $\{ x \mid x > -3 \}$
   c. $\{ x \mid x < -3 \}$
   d. $\{ x \mid x < -2 \}$
   e. $\{ x \mid x > 5 \}$

3. Salah satu akar dari $2x^2 - (3k + 2)x + (2k - 1) = 0$ ialah 5; maka nilai k adalah .. . .
   a. -5
   b. -3
   c. 0,5
   d. 2
   e. 3

4. Himpunan penyelesaian dari $-2 < 3(x - 1) < 2$ adalah . . . .
   a. $\{ x \mid -\frac{2}{3} < x < \frac{5}{3}\}$
   b. $\{ x \mid \frac{2}{3} < x < 5 \}$
   c. $\{ x \mid -\frac{2}{3} < x < 1 \}$
   d. $\{ x \mid 1 < x < 5 \}$
   e. $\{ x \mid \frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}\}$

5. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $(2x - 2)^2 \leq (5 - x)^2$ adalah . . . .
   a. $\{x \mid x \leq -3 \text{ atau } x \geq \frac{7}{3}, x \in R \}$
   b. $\{x \mid x \leq 3 \text{ atau } x \geq -\frac{7}{3}, x \in R \}$
   c. $\{x \mid -3 \leq x \leq \frac{7}{3}, x \in R \}$
   d. $\{x \mid x \leq -3 \text{ atau } x \geq -\frac{7}{3}, x \in R \}$
   e. $\{x \mid -\frac{7}{3} \leq x \leq 3, x \in R \}$

6. Himpunan penyelesaian dari $x^2 - x \geq 90$ adalah . . . .
   a. $\{ x \mid -9 \leq x \leq 10\}$
   b. $\{ x \mid x \leq -10 \text{ atau } x \geq 9\}$
   c. $\{ x \mid x \leq -9 \text{ atau } x \geq 10\}$
   d. $\{ x \mid -10 \leq x \leq 9\}$
   e. $\{ x \mid x \leq 9 \text{ atau } x \geq 10\}$

7. Jika diskriminan $x^2 - x - m = 0$ sama dengan nol , maka nilai m = ...
   a. -4,00
   b. -0,25
   c. 0
   d. 0,25
   e. 4

8. Salah satu akar persamaan kuadrat $x^2 + 3px + p + 2 = 0$ adalah 6 , maka nilai p adalah . . . .
   a. -5
   b. -2
   c. 0
   d. 1
   e. 2

9. Sepuluh tahun yang lalu umur Neni dua kali umur Bimbim. Lima tahun dari sekarang umur Neni menjadi satu setengah kali umur Bimbim. Umur Neni sekarang adalah . . . .
   a. 20 tahun
   b. 25 tahun
   c. 30 tahun
   d. 35 tahun
   e. 40 tahun

10. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{1}{5}$ dan 5 adalah . . . .
   a. $5x^2 + 26x + 5 = 0$
   b. $5x^2 + 26x - 4 = 0$
   c. $5x^2 - 26x - 5 = 0$
   d. $5x^2 - 26x + 5 = 0$
   e. $5x^2 + 26x + 1 = 0$

11. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 4 dan -6 adalah . . . .
   a. $x^2 - 10x - 24 = 0$
   b. $x^2 + 10x - 24 = 0$
   c. $x^2 + 2x + 24 = 0$
   d. $x^2 - 2x - 24 = 0$
   e. $x^2 + 2x - 24 = 0$

12. Jika x_1 dan x_2 akar-akar dari $2x^2 - 3x - 9 = 0$, maka nilai dari $x_1^2 + x_2^2 =$ . . . .
   a. -11,25
   b. -6,75
   c. 2,25
   d. 6,75
   e. 11,25

13. Jika x_1 dan x_2 akar-akar dari $x^2 + x - 2 = 0$, maka nilai dari $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$ . . . .
   a. -1,0
   b. -0,5
   c. 0,5
   d. 0,67
   e. 1,50

14. Bentuk perkalian $8x^2 + 18x - 5$ adalah . . . .
   a. $(4x + 5)(2x - 1)$
   b. $(4x - 1)(2x - 5)$
   c. $(4x - 1)(2x - 5)$
   d. $(4x - 5)(2x - 1)$
   e. $(4x - 1)(2x + 5)$

15. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $-x^2 + x + 6 > 0$ adalah . . . .
   a. $\{x|x > 3, x \in R\}$
   b. $\{x|x < 3, x \in R\}$
   c. $\{x|x < 2, x \in R\}$
   d. $\{x|-2 < x < 3, x \in R\}$
   e. $\{x|\ 3 < x < -2, x \in R\}$

16. Penyelesaian dari pertidaksamaan $-2 < 3x + 1 < 7$ adalah . . . .
   a. $-3 < x < 7$
   b. $-1 < x < 2$
   c. $-2 < x < -1$
   d. $1 < x < 2$
   e. $-1 < x < 1$

17. Persamaan $(m + 2)x^2 + 6x + 3m = 0$ mempunyai akar riil, maka batas-batas nilai m adalah . . . .
   a. $m \leq -3$ atau $m \geq 1$
   b. $-1 \leq m \leq 3$
   c. $m \leq -1$ atau $m \geq 3$
   d. $-3 \leq m \leq -1$
   e. $-3 \leq m \leq 1$

18. Persamaan kuadrat $2x^2 + 6x - 12 = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2. Nilai dari $x_1 + x_2$ adalah . . ..
   a. -4
   b. -3
   c. -1
   d. 1
   e. 4

19. CV SEJAHTERA memproduksi mainan anak-anak dengan biaya Rp5.000,00 per unit dan biaya operasionalnya Rp2.500.000,00. Rencana mainan akan dijual seharga Rp9.000,00. Supaya CV mendapat untung Rp13.500.000, maka banyaknya mainan yang harus terjual adalah . . . .
   a. 2.500 unit c. 4.000 unit e. 8.000 unit
   b. 3.000 unit d. 4.500 unit

20. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 3 lebihnya dari akar-akar persamaan $2x^2 - 7x + 13 = 0$ adalah . . . .
   a. $2x^2 - 19x + 52 = 0$ c. $2x^2 - 7x + 52 = 0$ e. $2x^2 - 19x + 70 = 0$
   b. $2x^2 - 5x + 10 = 0$ d. $2x^2 - 7x + 10 = 0$

21. Himpunan penyelesaian dari $3x^2 + 7x > 10$ adalah . . . .
   a. $\{x \mid -\frac{3}{10} < x < 1\}$ c. $\{x \mid -\frac{10}{3} < x < 1\}$ e. $\{x \mid -1 < x < \frac{10}{3}\}$
   b. $\{x \mid x < -\frac{10}{3}$ atau $x > 1\}$ d. $\{x \mid x < -1$ atau $x > \frac{10}{3}\}$

22. Sifat dari akar-akar persamaan kuadrat $2x(x + 2) = 3x - 5$ adalah . . . .
   a. Nyata dan berbeda c. Nyata dan sama e. tidak nyata
   b. Nyata dan irasional d. Nyata dan berlawanan

23. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 6 = 0$, maka $x_2^2 + x_1^2 =$ . . . .
   a. -8 c. 3 e. 8
   b. -3 d. 6

24. Sepotong kawat sepanjang x cm hendak dibentuk persegi. Agar luasnya lebih besar daripada kelilingnya, maka nilai x yang memenuhi adalah . . . .
   a. $x > 4$ c. $x < 8$ e. $x < 16$
   b. $x > 8$ d. $x > 16$

25. Persamaan $x^2 + 3x + 36 = 3k(x + 3)$ tidak mempunyai akar riil. Nilai k yang memenuhi adalah . . . .
   a. $k < -5$ atau $k > 3$ c. $-5 < k < 3$ e. $-3 < k < 5$
   b. $k \leq -3$ atau $k \geq 5$ d. $3 < k < 5$

26. Agar kedua akar dari $x^2 + (m + 1)x + 2m - 1 = 0$ khayal, maka batas-batas m adalah . . . .
   a. $m < 1$ atau $m > 5$ c. $1 < m < 5$ e. $m \geq 1$
   b. $m \leq 1$ atau $m \geq 5$ d. $1 \leq m \leq 5$

27. Nilai x dari $\frac{-2 - 4x}{7} = \frac{x + 5}{2}$ adalah . . . .
   a. - 39 c. -3 e. 39
   b. - 31 d. 3

28. Himpunan penyelesaian dari $1 - 2(3x - 1) < 5 - 5(x - 1)$ adalah . . . .
    a. $\{ x \mid x < -13 \}$
    b. $\{ x \mid x > -7 \}$
    c. $\{ x \mid x < 7 \}$
    d. $\{ x \mid x > 7 \}$
    e. $\{ x \mid x < 13 \}$

29. Nilai x dari sistem persamaan $x - 5y = -15$ dan $-3x + y = 17$ adalah . . . .
    a. - 6
    b. - 5
    c. - 2
    d. 2
    e. 5

30. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 3x - 2 = 0$ adalah p dan q. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{p}{q}$ dan $\frac{q}{p}$ adalah . . .
    a. $2x^2 + 13x + 2 = 0$
    b. $2x^2 + 13x - 2 = 0$
    c. $2x^2 - 13x - 2 = 0$
    d. $x^2 - 13x + 2 = 0$
    e. $x^2 + 13x - 2 = 0$

B. Soal Essay

Kerjakan soal-soal berikut dengan benar

1. Tentukan Himpunan penyelesaian dari persamaan berikut ini !
   a. $-3(4x - 1) = 1 - 10(x - 1)$
   b. $3(x + 7) = 4 - 2(x + 10)$

2. Tentukan persamaan kuadratnya yang memiliki akar-akar
   a. -5 dan $\frac{1}{2}$
   b. 3 dan -7
   c. -2 dan $\frac{1}{4}$
   d. $\frac{1}{2} - \sqrt{5}$ dan $\frac{1}{2} + \sqrt{5}$
   e. 9 dan -9
   f. $\frac{5}{2}$ dan $\frac{3}{4}$

3. Tentukanlah nilai diskriminannya dan sifat-sifatnya dari persamaan kuadrat di bawah ini.
   a. $2x - 4x(x + 1) = 2 - x$
   b. $4x(x - 1) = x^2 - 3$

4. Tentukanlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya 5 kali akar-akar $x^2 + 10x = 3$.

5. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya 5 kurangnya dari akar-akar $x^2 = 2x + 5$?

6. Tentukanlah himpunan penyelesaiannya dari
   a. $-x^2 - 7x + 44 \geq 0$
   b. $2x^2 + 3x - 35 < 0$
   d. $x^2 > 5x - 6$
   e. $x^2 - 10x + 25 > 0$

7. Diketahui $(m - 3)$ x2 + $(2m - 3)x + m = 0$. Tentukan nilai m
   a. agar mempunyai dua akar riil berlainan, dan
   b. tidak mempunyai akar riil.

Bakat kita akan diperoleh hanya dengan belajar dan bekerja dan nilai kita diperoleh hanya dengan tindakan-tindakan dan bukan dengan kata-kata

Ruang Pengetahuan

KEPUASAN KERJA

Kepuasan kerja akhir-akhir ini semakin terasa penting artinya dalam lingkup organisasi. Kepuasan kerja mempunyai pengaruh yang cukup besar terhadap produktivitas organisasi baik secara langsung ataupun tidak langsung. Ketidakpuasan merupakan titik awal dari masalah-masalah yang muncul dalam organisasi, seperti kemangkiran, konflik manager-pekerja, 'turn-over', serta banyak masalah lainnya yang menyebabkan terganggunya proses pencapaian tujuan organisasi. Dari sisi pekerja, ketidakpuasan dapat menyebabkan menurunnya motivasi, menurunnya moril kerja, menurunnya tampilan kerja baik secara kualitatif maupun secara kuantitatif.

Secara umum dapat dikemukan bahwa pemecahan masalah-masalah organisasi dari segi manusianya dapat dilakukan melalui prinsip-prinsip kepuasan kerja. Dengan adanya kepuasan kerja yang tinggi akan muncul ikatan yang positif antara pekerja dengan pekerjaannya, sehingga dari pekerja ini dapat diharapkan suatu hasil yang optimal. Dari hampir semua perusahaan yang mengalami kemajuan yang pesat ditandai dengan gejala kepuasan kerja yang tinggi di antara para pekerjanya.

Pada dasarnya, prinsip-prinsip kepuasan kerja diarahkan kepada pemenuhan kebutuhan-kebutuhan pekerja. Milton menyatakan bahwa kepuasan kerja merupakan kondisi emosional positif atau menyenangkan yang dihasilkan dari penilaian pekerja berdasarkan pengalamannya (Milton, hal.151). Lebih jauh lagi, Milton mangatakan reaksi efektif pekerja terhadap pekerjaannya tergantung kepada taraf pemenuhan kebutuhan-kebutuhan fisik dan psikologis pekerja tersebut oleh pekerjaannya. Kesenjangan antara yang diterima pekerja dari pekerjaannya dengan yang diharapkannya menjadi dasar bagi munculnya kepuasan atau ketidakpuasan.

Beberapa ahli telah mencoba mengemukakan faktor-faktor yang terlibat dalam kepuasan kerja. Herzberg, seperti yang dikutip oleh Gilmer (1961), mengemukakan faktor-faktor kemapanan atau keamanan pekerjaan, kesempatan untuk maju, pandangan pekerja mengenai perusahaan dan manajemennya, gaji, aspek-aspek intrinsik pekerjaan, kualitas penyeliaan, aspek-aspek sosial dari pekerjaan, komunikasi, serta kondisi kerja fisik dan jam kerja sebagai faktor-faktor yang menentukan kepuasan kerja.

Dari kenyataan-kenyataan di atas tampak bahwa faktor-faktor relasi sosial yang baik dan penghargaan terhadap prestasi kerja merupakan faktor-faktor yang sangat menetukan kepuasan kerja. Faktor gaji dan imbalan lainnya walaupun masih dianggap penting, tidak memperoleh penekanan yang khusus. Dengan demikian, untuk meningkatkan kepuasan kerja kedua hal itu harus terpenuhi terlebih dahulu.
(USU digital library)

3 MATRIKS

Sumber: yginsaf.files.wordpress.com

Standar kompetensi konsep matriks terdiri atas tiga kompetensi dasar. Dalam penyajian pada buku ini setiap kompetensi dasar memuat tujuan, uraian materi, dan latihan. Rangkuman diletakkan pada setiap akhir bahasan suatu kompetensi dasar. Kompetensi dasar dalam standar kompetensi ini adalah *macam-macam matriks, operasi matriks* dan *determinan serta invers*. Standar kompetensi ini digunakan untuk melengkapi dalam menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan juga untuk merumuskan berbagai masalah pada kehidupan sehari-hari dalam rangka menunjang program keahlian Penjualan dan Akuntansi

Gambar 3-1 Kegiatan perbankan sehari-hari

Gambar di samping merupakan kegiatan perbankan sehari-hari. Para nasabah sering menemukan suatu data yang disajikan dalam bentuk daftar, misalkan daftar bunga, daftar konversi mata uang dan daftar-daftar yang lain. Mengapa data itu sering harus dibuat tabel? Tabel dibuat dengan tujuan agar data mudah dibaca dan dimengerti.

Agar data lebih sederhana lagi sehingga proses pengolahan data lebih mudah, tabel juga sering disajikan dalam bentuk matriks.

Dalam proses penyelesaian masalah dalam pelajaran lain atau dalam kehidupan sehari-hari sering dihadapkan pada pencarian nilai beberapa peubah. Matriks adalah salah satu media bantu untuk memecahkan masalah-masalah tersebut. Misalkan matriks dapat memudahkan dalam membuat analisis masalah ekonomi yang memuat bermacam-macam peubah. Matriks juga dapat digunakan untuk mempermudah analisis *input-output* baik dalam bidang ekonomi, manajemen, kependidikan dan bidang lainnya.

Pada setiap akhir kompetensi dasar tercantum soal-soal latihan yang disusun dari soal-soal yang mudah hingga sulit. Latihan soal ini digunakan untuk mengukur kemampuan kalian terhadap kompetensi dasar ini. Artinya setelah mempelajari kompetensi dasar ini secara mandiri dengan bimbingan guru sebagai fasilitator, ukurlah sendiri kemampuan kalian dengan mengerjakan soal-soal latihan tersebut.

Untuk melancarkan kemampuan kalian supaya lebih baik dalam mengerjakan soal, disarankan semua soal dalam latihan ini dikerjakan, baik di sekolah dengan bimbingan guru maupun di rumah.

Untuk mengukur standar kompetensi lulusan tiap peserta didik, di setiap akhir kompetensi dasar, guru akan memberikan evaluasi apakah kalian layak atau belum layak mempelajari standar Kompetensi berikutnya. Kalian dinyatakan layak jika kalian dapat mengerjakan soal 60% atau lebih soal-soal evaluasi yang akan diberikan guru.

A. Macam-macam Matriks

Setelah mempelajari materi pada kompetensi dasar ini, kalian diharapkan dapat:

- menjelaskan pengertian matriks, notasi matriks, baris, kolom, elemen dan ordo matriks,
- membedakan jenis-jenis matriks,
- menjelaskan kesamaan matriks, dan
- menjelaskan transpose matriks.

1. Pengertian, Notasi, dan Ordo Matriks

Dalam kehidupan sehari-hari, matematika, maupun dalam mata pelajaran lain, keterangan-keterangan sering kali disajikan dalam bentuk matriks.

Contoh 1

Berikut merupakan contoh keadaan absensi kelas X pada tanggal 22 Januari 2007 "SMK Unggul" di Jakarta.

KEADAAN ABSENSI KELAS X TANGGAL 22 JANUARI 2007

Kelas	Sakit (s)	Izin (i)	Alpha (a)
Kelas X AK1	1	0	2
Kelas X AK2	0	0	1
Kelas X AP1	0	2	0
Kelas X AP2	0	1	3
Jumlah	1	3	6

Apabila pembatas tersebut dihilangkan, maka akan didapatkan susunan elemen-elemen sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Susunan elemen-elemen tersebut biasa disebut dengan matriks.

a. Pengertian Matriks

Matriks adalah suatu susunan elemen-elemen atau entri-entri yang berbentuk persegipanjang yang diatur dalam baris dan kolom. Susunan elemen ini diletakkan dalam tanda kurung biasa ( ), atau kurung siku [ ]. Elemen-elemen atau entri-entri tersebut dapat berupa bilangan atau berupa huruf.
Matriks dinotasikan dengan huruf kapital seperti A, B, C dan seterusnya. Sedangkan elemennya, jika berupa huruf, maka ditulis dengan huruf kecil.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{baris ke} - 1 \\ \to \text{baris ke} - 2 \\ \\ \to \text{baris ke} - m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{kolom} & \text{kolom} & \text{kolom} \\ \text{ke} - 1 & \text{ke} - 2 & \text{ke} - n \end{array}$$

Dalam matriks A = [a_{ij}], dengan i dan j merupakan bilangan bulat yang menunjukkan baris ke-i dan kolom ke-j. Misalnya a_{12} artinya elemen baris ke-1 dan kolom ke-2.

Contoh 2

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & 8 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & -7 & -1 \\ -10 & 3 & -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari matriks P di atas dapat dinyatakan bahwa

a. banyaknya baris adalah 4;
b. banyaknya kolom adalah 5;
c. elemen-elemen baris ke-3 adalah 0, -5, 3, -7, -1;
d. elemen-elemen baris ke-4 adalah -10, 3, -6, 4, 0;
e. elemen-elemen kolom ke-1 adalah 2, -4, 1, -10;
f. elemen-elemen kolom ke-4 adalah 5, -3, -7, 4;
g. elemen baris ke-2 dan kolom ke-3 atau a_{23} adalah 8;
h. elemen baris ke-3 dan kolom ke-5 atau a_{35} adalah -1.

b. Ordo Matriks

Ordo (ukuran) dari matriks adalah banyaknya elemen baris diikuti banyaknya kolom. A_{mxn} berarti matriks A berordo m x n, artinya matriks tersebut mempunyai m buah baris dan n buah kolom.

Contoh 3

Tentukan ordo dari matriks di bawah ini.

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 8 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b. $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

Jawab:

a. Matriks A terdiri atas 2 baris dan 4 kolom, maka matriks A berordo 2 x 4, atau ditulis A_{2x4}.
b. Matriks B terdiri atas 1 baris dan 3 kolom, maka matriks B berordo 1 x 3, atau ditulis H_{1x3}.

c. Jenis-Jenis Matriks

1) Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks yang seluruh elemennya nol.

Contoh 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang hanya terdiri atas satu kolom.

Contoh 5

$$H = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

3) Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang hanya terdiri atas satu baris.

Contoh 6

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

4) Matriks Persegi atau Bujur Sangkar

Matriks persegi adalah matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.

Contoh 7

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks yang seluruh elemennya nol kecuali pada diagonal utamanya tidak semuanya nol.

Contoh 8

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6) Matriks Segitiga

Matriks segitiga terdiri atas dua macam, yaitu matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Matriks segitiga atas adalah matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utama seluruhnya nol.

Contoh 9

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -4 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Matriks segitiga bawah adalah matriks yang elemen-elemen di atas diagonal utama seluruhnya nol.

Contoh 10

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 5 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

7) Matriks Identitas
Matriks identitas merupakan matriks persegi yang semua elemen pada diagonal utamanya satu dan elemen lainnya adalah nol.

Contoh 11

$$I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Transpose Matriks

Transpose matriks A = (a_{ij}) dengan ordo m x n ditulis A^T = (a_{ji}) dan mempunyai ordo n x m. Elemen-elemen baris matriks A^T diperoleh dari elemen-elemen kolom matriks A dan sebaliknya.

Contoh 12

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{maka} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Kesamaan Dua Matriks

Dua matriks dikatakan sama, apabila mempunyai ordo sama dan elemen-elemen yang seletak (bersesuaian) dari kedua matriks tersebut sama.

Contoh 13

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriks A=B karena ordo dan elemen-elemen yang seletak dari kedua matriks tersebut sama. Sedangkan A ≠ C, walaupun elemennya sama tetapi tidak seletak.

Contoh 14

Tentukan nilai x, y, z, a, b, dan c dari kesamaan dua matriks di bawah ini.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2+x \\ z & a+1 & 4 \\ b & \frac{1}{2}c & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 5 & y \\ 3y & 4z & 4 \\ a+5 & b-2 & -1 \end{pmatrix}$$

Jawab:

- Elemen baris 1 kolom 1 (a_{11}), $2x = 4$
  $x = 2$
- Elemen baris 1 kolom 3 (a_{13}), $2 + x = y$
  $y = 2 + 2 = 4$
- Elemen baris 2 kolom 1 (a_{21}), $z = 3y$
  $z = 3.4 = 12$
- Elemen baris 2 kolom 2 (a_{22}), $a + 1 = 4z$
  $a + 1 = 4.12 \Leftrightarrow a = 48 - 1 = 47$
- Elemen baris 3 kolom 1 (a_{31}), $b = a + 5$
  $b = 47 + 5 \Leftrightarrow b = 52$
- Elemen baris 3 kolom 2 (a_{32}), $\frac{1}{2}c = b - 2$

  $\frac{1}{2}c = 52\text{-}2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}c = 50 \Leftrightarrow c = 100$

Jadi, nilai x = 2, y = 4, z = 12, a = 47, b = 52, dan c = 100

Contoh 15

Tentukan x, y, dan z jika A = B dari matriks-matriks di bawah ini.

$$A = \begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ 6 & x+2y \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 2x-2 & 1 \\ 4z+2 & 5y \end{pmatrix}$$

Jawab:

$$A = B$$

$$\begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ 6 & x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2 & 1 \\ 4z+2 & 5y \end{pmatrix}$$

$x + 1 = 2x - 2$	$4z + 2 = 6$	$x + 2y = 5y$
$x - 2x = -1 - 2$	$4z = 6 - 2$	$3 + 2y = 5y$
$-x = -3$	$4z = 4$	$3 = 5y - 2y$
$x = 3$	$z = 1$	$3 = 3y$
		$y = 1$

B. Rangkuman Macam-Macam Matriks

1. Matriks adalah suatu susunan elemen-elemen atau entri-entri yang berbentuk persegipanjang yang diatur dalam baris dan kolom.

2. Suatu matriks A yang memiliki m baris dan n kolom berarti matriks A berordo m x n

3. Transpose matriks A dengan ordo m x n ditulis A^T dan mempunyai ordo n x m. Elemen-elemen baris matriks A^T diperoleh dari elemen-elemen kolom matriks A dan sebaliknya.

4. Dua matriks dikatakan sama, apabila mempunyai ordo sama dan elemen-elemen yang seletak (bersesuaian) dari kedua matriks tersebut sama.

LATIHAN 1

1. Diberikan suatu matriks

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 & 7 & -3 \\ 1 & 4 & -3 & 0 & 10 \\ -4 & 2 & -8 & -6 & 4 \\ 2 & -1 & 6 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

   a. Berapakah banyaknya baris?
   b. Berapakah Banyaknya kolom?
   c. Tuliskan elemen-elemen baris ke-2.
   d. Tuliskan elemen-elemen baris ke-4.
   e. Tuliskan elemen-elemen kolom ke-3.
   f. Tuliskan elemen-elemen kolom ke-1.
   g. Sebutkan elemen baris ke-2 kolom ke-3.
   h. Sebutkan elemen baris ke-4 kolom ke-5.
   i. Nyatakan nama untuk elemen-elemen -3, 10, 4, 13.
   j. Nyatakan nama untuk elemen-elemen 1, 4, -3, 0, 10.
   k. Nyatakan nama untuk elemen 13.
   l. Nyatakan nama untuk elemen -8.

2. Buatlah matriks sembarang yang mempunyai ketentuan sebagai berikut.
   a. Mempunyai satu baris dan tiga kolom.
   b. Mempunyai tiga baris dan dua kolom.
   c. Mempunyai empat baris dan satu kolom.

3. Tuliskan ordo dari matriks-matriks berikut.

   a. $A = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

   b. $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

   c. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \\ -1 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$

   d. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

4. Tentukan transpose dari matriks-matriks pada soal nomor 3 di atas.

5. Tentukan nilai x, y, dan z dari persamaan-persamaan matriks di bawah ini.

   a. $\begin{pmatrix} 3x \\ y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 2x \\ 2y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-x \\ -4 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 2x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} x+1 & 6z+y \\ -2y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ x+3 & 0 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 2x-1 \\ 4y+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-x \\ -8 \end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix} 2x+3 & 6z+y \\ 2y-5 & -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & x+2y \\ x+3 & -30 \end{pmatrix}$

6. Tentukanlah nilai x, y, z, a, dan b dari persamaan matriks di bawah ini.

$$\begin{pmatrix} 4 & y+1 & 5 \\ x & 6 & -8 \\ 2 & 2z & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & x & 5 \\ 3a & 2z-2 & -8 \\ 2 & b & 3 \end{pmatrix}$$

7. Jika A = B^T dimana $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} x+y & 1 & 0 \\ x-y & 0 & z+3 \\ y-2w & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Tentukanlah w, x, y, dan z.

C. Operasi pada Matriks

Setelah mempelajari materi pada kompetensi dasar ini, kalian diharapkan dapat

- menyelesaikan penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar dengan matriks dan perkalian matriks dengan matriks;
- menyelesaikan kesamaan matriks menggunakan penjumlahan, pengurangan, dan perkalian matriks.

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua Matriks A dan B dapat dijumlahkan atau digunakan operasi pengurangan bila ordo (baris x kolom) kedua matriks tersebut sama. Hasil jumlah atau selisih didapat dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang seletak dari kedua matriks tersebut.

Contoh 16

Diketahui:

$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -5 \\ 6 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+(-2) & 4+5 & -2+(-5) \\ -1+6 & 6+4 & -1+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -7 \\ 5 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 5-(-2) & 4-5 & -2-(-5) \\ -1-6 & 6-4 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -7 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

A + C tidak dapat dijumlahkan, karena ordo kedua matriks tersebut tidak sama.

Untuk setiap matriks A, B dan C yang berordo sama, berlaku sifat-sifat operasi penjumlahan dan pengurangan matriks sebagai berikut:

a. A + (B + C) = (A + B) + C sifat asosiatif,
b. A + B = B + A sifat komutatif,
c. A(B + C) = AB + AC sifat distributif,

d. A(B – C) = AB – AC,
e. A + 0 = 0 + A = A,
f. terdapat matriks X sedemikian sehingga A + X = B.

2. Perkalian Matriks

a. Perkalian Matriks dengan Skalar (k)

Misalkan k sebuah skalar dan A sebuah matriks, maka kA adalah sebuah matriks yang didapat dengan cara mengalikan setiap elemen (entri) matriks A dengan skalar k.

Contoh 17

Diketahui $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ maka

$$4A = \begin{pmatrix} 4\cdot(-2) & 4\cdot 4 \\ 4\cdot 0 & 4\cdot(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$$

$$-2A = \begin{pmatrix} -2\cdot(-2) & -2\cdot 4 \\ -2\cdot 0 & -2\cdot(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$4A + 3A = 4\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ 0 & -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 0 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 28 \\ 0 & -42 \end{pmatrix}$$

Contoh 18

Tentukan a, b, dan c jika diketahui $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} a & c-2 \\ b & -4 \end{pmatrix}$, dan $R = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

sehingga berlaku P – 2Q = R.

Jawab:

$$P - 2Q = R$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & c-2 \\ b & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$-2\begin{pmatrix} a & c-2 \\ b & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c-2 \\ b & -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

dari persamaan matriks tersebut didapat

a = 0
b = 1
c – 2 = 2 ⇔ c = 4

Contoh 19

Tentukan matriks X yang memenuhi persamaan berikut ini.

a. $4X - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}X = 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Jawab:

a. $$4X - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4X = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$4X = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b. $$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}X = 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$$

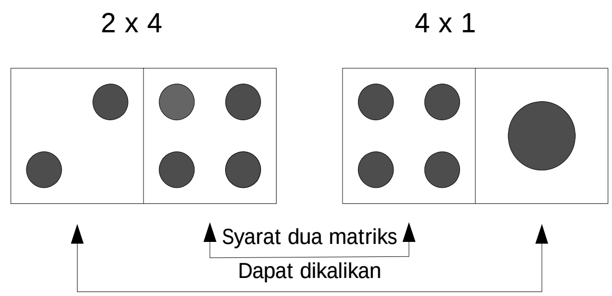
Untuk setiap skalar k_1 dan k_2, dan untuk setiap matriks A dan B yang berordo sama dan AB terdefinisi, berlaku sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar sebagai berikut:

a. $(k_1 + k_2)\,A = k_1\,A + k_2\,A$
b. $(k_1 - k_2)\,A = k_1\,A - k_2\,A$
c. $(k_1\,k_2)\,A = k_1(k_2\,A)$
d. $k_1(A\,B) = (k_1\,A)\,B$
e. $k_1(A + B) = k_1\,A + k_1\,B$
f. $k_1(A - B) = k_1\,A - k_1\,B$

b. Perkalian Matriks dengan Matriks

Dua matriks A dengan ordo m x n dan matriks B dengan ordo n x p, hasil kali antara A dan B adalah sebuah matriks $C = A \cdot B$ yang berordo m x p, didapat dengan cara mengalikan setiap elemen baris matriks A dengan elemen kolom matriks B.

Jika matriks A berordo m x n dan B berordo p x q dimana $n \neq p$ maka $A \cdot B$ tak terdefinisi. Perhatikan ilustrasi kartu domino pada Gambar 3-2 untuk perkalian dua mariks yang berordo masing-masing 2 x 4 dan 4 x 1.



Hasil kali kedua matriks dengan ordo 2 x 1

Gambar 3-2 Contoh perkalian matriks

Contoh 20

Diketahui $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, tentukan $A \cdot B$

Jawab:

Matriks A berordo 2 x 2 dan B berordo 2 x 3, hasil kali $A \cdot B$ adalah matriks yang berordo 2 x 3. Perhatikan ilustrasi di bawah ini.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{-2 \quad 1} \\ 3 \quad 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & 0 \\ 1 & & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \blacksquare & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$ = $-2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 = 6$ adalah entri baris ke-1 dan kolom ke-2 dari matriks A yang diperoleh dengan cara mengalikan elemen-elemen baris ke-1 matriks sebelah kiri (matriks A) dengan elemen-elemen kolom ke-2 matriks sebelah kanan (matriks B) kemudian menjumlahkannya. Demikian seterusnya untuk mengisi kotak-kotak tersebut.

$$A.B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & -2 \cdot -1 + 1 \cdot 4 & -2 \cdot 0 + 1 \cdot -2 \\ 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot -1 + 5 \cdot 4 & 3 \cdot 0 + 5 \cdot -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 6 & -2 \\ 14 & 17 & -10 \end{pmatrix}$$

Contoh 21

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Tentukan a. $A \cdot B$ b. $B \cdot A$ c. $A \cdot C$ d. Apakah $A \cdot B$ = $B \cdot A$.

Jawab:

a. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \\ 0 \cdot -1 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$

b. $B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 6 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$

c. $A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ = Tidak dapat diselesaikan karena kolom matriks pertama (sebelah kiri) dengan banyaknya baris matriks kedua (sebelah kanan) tidak sama.

d. Dari hasil penyelesaian a dan b di atas, ternyata $A \cdot B \neq B \cdot A$. Jadi, perkalian tidak komutatif.

Contoh 22

Tentukan hasil kali dari matriks-matriks di bawah ini.

a. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

Jawab:

a. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot(-2)+3\cdot 5 \\ -1\cdot(-2)+0\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot 2+(-2)\cdot(-1) & 6\cdot(-3)+(-2)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -26 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \left(1\cdot 3+-2\cdot 6+5\cdot(-5)\right) = (3-12-25) = \left(-34\right)$

Contoh 23

Ibu Ahmad berbelanja di Toko ”Sembako Sejahtera” sebanyak 5 kg beras dengan harga Rp6.000,00 per kg, 4 kg terigu dengan harga Rp7.000,00 per kg, dan 3 liter minyak goreng dengan harga Rp9.000,00 per liter. Ibu Susan berbelanja barang yang sama di toko yang sama dengan kuantitas 10 kg beras, 8 kg terigu, dan 2 liter minyak goreng.

Sederhanakan persoalan di atas dalam bentuk perkalian matriks dan tentukan jumlah yang harus dibayar oleh Ibu Ahmad dan Ibu Susan.

Gambar 3-3 Toko kehidupan sehari-hari

Jawab:

Persoalan di atas jika disajikan dalam bentuk Matriks adalah sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} A \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6.000 \\ 7.000 \\ 9.000 \end{pmatrix}$$

Keterangan A = Ibu Ahmad dan S = Ibu Susan

Jumlah yang harus dibayar Ibu Ahmad dan Ibu Susan adalah:

$$\begin{pmatrix} A \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 10 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.000 \\ 7.000 \\ 9.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x6.000 + 4x7.000 + 3x9.000 \\ 10x6.000 + 8x7.000 + 2x9.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85.000 \\ 134.000 \end{pmatrix}$$

Jadi, jumlah yang harus dibayar Ibu Ahmad adalah Rp85.000,00 dan Ibu Susan adalah Rp134.000,00.

D. Rangkuman Operasi pada Matriks

1. Dua Matriks A dan B dapat dijumlahkan atau digunakan operasi pengurangan bila ordo (baris x kolom) kedua matriks tersebut sama. Hasil jumlah (selisih) didapat dengan cara menjumlahkan (mengurangkan) elemen-elemen yang seletak dari kedua matriks tersebut.
2. Misalkan k sebuah skalar dan A sebuah matriks, maka kA adalah sebuah matriks yang didapat dengan cara mengalikan setiap elemen (entri) matriks A dengan skalar k.
3. Dua buah matriks dapat dikalikan jika banyaknya kolom pada matriks pertama sama dengan banyaknya baris pada matriks kedua.
4. Dua matriks A dengan ordo m x n dan matriks B dengan ordo n x p, hasil kali antara A dan B adalah sebuah matriks C = $A \cdot B$ yang berordo m x p, didapat dengan cara mengalikan setiap elemen baris matriks A dengan elemen kolom matriks B.

LATIHAN 2

1. Diketahui $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ dan $R = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

   Tentukanlah

   a. P + R
   b. (Q + P) + R
   c. $(Q + R - P)^T$
   d. $R^T + Q$
   e. P – (Q + R)
   f. $P^T - R$
   g. $Q^T - P$
   h. (P + Q) + (P + R)
   i. $P - Q - R^T$

2. Hitunglah hasil operasi matriks berikut ini.

   a. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$
   d. $\begin{pmatrix} 8 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -10 \end{pmatrix}$
   e. $3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
   f. $2\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

3. Diketahui $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$, tentukanlah

a. 2P
b. -4P
c. $\frac{1}{2}P$
d. 5P – 3P
e. -2P + 8P
f. P – 5P

4. Tentukan hasil kali dari kedua matriks di bawah ini.

a. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ -1 & 2 & 6 \\ 5 & -2 & 4 \\ 8 & -1 & 10 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

f. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$

5. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Tentukanlah matriks-matriks berikut.

a. A B
b. A (C^T + B)
c. (A + B)(A – B)
d. A B
e. (A^T – C) B
f. A B^T
g. A^2
h. $A^2 + C^2$
i. $A^2 - B^2 + C^2$

6. Tentukan matriks X dari

a. $4X + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - 2X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$

c. $2X + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 7 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

d. $5X - 3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$

7. Diberikan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, tunjukkanlah bahwa $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

8. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, tentukanlah!

a. $A \cdot B$
b. $(B \cdot A)^T$
c. $B \cdot A$
d. $B^T \cdot A^T$
e. $A^T \cdot B^T$
f. $(A \cdot B)^T$

9. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, carilah f(A) = $2A^2 - 4A + 5I$ (I matriks identitas)

10. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

    Periksalah apakah $A \cdot B = 0$

11. Carilah a, b, c, dan d dari persamaan-persamaan berikut.

    a. $\begin{pmatrix} a+3 & 2b+1 \\ c-3 & 2d-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

    b. $\begin{pmatrix} 2a+3 & 2b-2 \\ c-4a & 2d+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

12. Diketahui $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 4 & -1 \\ z & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -17 \\ 21 & 2 \end{pmatrix}$, tentukanlah nilai x, y, dan z.

13. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$. Tentukanlah !

    a. $2A + 3B$
    b. $3A - 6B$
    c. $4(A + B^T + C)$
    d. $5A - B + 3C$
    e. $AB + BC - (AC)^T$
    f. $B(A + 3C)^T$

14. Tentukan nilai a, b, c dan d dari persamaan berikut ini.

    a. $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$

    b. $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a & 3c+2 \\ 5-b & b+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

15. Budi membeli di toko alat-alat tulis, 8 buku dengan harga @Rp4.500,00, 12 pensil dengan harga @Rp2.250,00, dan 5 pulpen dengan harga @Rp5.000,00. Ani membeli barang yang sama di toko yang sama dengan kuantitas 12 buku, 8 pensil dan 2 pulpen. Sederhanakan persoalan di atas dalam bentuk perkalian matriks dan tentukan jumlah yang harus dibayar oleh Budi dan Ani.

16. Perusahaan bus mengatur suatu rute perjalanan busnya dari kota P ke kota T melalui kota Q atau R atau S.

    Dari kota P ke Q, R dan S berturut-turut terdapat 2 rute, 5 rute dan 3 rute sedangkan dari Q, R, dan S ke T berturut-turut terdapat 1 rute, 6 rute dan 4 rute. Sederhanakan persoalan di atas dalam bentuk perkalian matriks dan tentukan jumlah rute yang dapat ditempuh dari kota P ke T.

Gambar 3-4 Bus

E. Determinan dan Invers Matriks

Setelah mempelajari materi pada kompetensi dasar ini, kalian diharapkan dapat:

- menentukan determinan dan invers matriks ordo 2,
- menentukan minor, kofaktor dan adjoin matriks,
- menentukan determinan dan invers matriks ordo 3, dan
- menyelesaikan sistem persamaan linier dengan menggunakan matriks.

1. Determinan Matriks Ordo Dua

Misal $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan A (det(A)) adalah det(A) = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Contoh 24

Tentukan determinan matriks-matriks berikut.

$P = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

Jawab:

$|P| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - (-4) \cdot (-2) = 7$ dan

$|Q| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 - (-6) \cdot 2 = -12 + 12 = 0$

Contoh 25

Jika $\begin{vmatrix} 3x & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 3$, tentukanlah harga x yang memenuhi persamaan tersebut.

Jawab:

$$\begin{vmatrix} 3x & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 3$$

$$3x - (-10) = 2x - 3$$
$$3x + 10 = 2x - 3$$
$$3x - 2x = -3 - 10$$
$$x = -13$$

2. Determinan Matriks Ordo Tiga

Misalkan matriks persegi dengan ordo tiga diberikan di bawah ini

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, determinan dari matriks A adalah

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Banyak cara yang dapat digunakan untuk menghitung determinan matriks dengan ordo 3 x 3, tetapi yang paling banyak digunakan adalah dengan menggunakan aturan *Sarrus*. Dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- ❖ Letakkan kolom pertama dan kedua di sebelah kanan garis vertikal dari determinan.
- ❖ Jumlahkan hasil kali unsur-unsur yang terletak pada diagonal utama dengan hasil kali unsur-unsur yang sejajar diagonal utama pada arah kanan, kemudian dikurangi dengan hasil kali unsur-unsur yang terletak sejajar dengan diagonal samping.

  Perhatikan skema untuk menghitung dengan menggunakan sarrus di bawah ini.

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad - \quad - \quad - \\ \det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right. \\ \qquad\qquad\qquad + \quad + \quad + \end{array}$$

$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{32}\,a_{23}\,a_{11} - a_{33}\,a_{21}\,a_{12}$

= $(a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}) - (a_{31}\,a_{22}\,a_{13} + a_{32}\,a_{23}\,a_{11} + a_{33}\,a_{21}\,a_{12})$

Contoh 26

Tentukan determinan dari matriks $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Jawab:

$$|\,M\,| = \left| \begin{array}{ccc|cc} -1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right.$$

$= (-1\cdot 5\cdot 0 + 2\cdot(-4)\cdot 1 + (-3)\cdot 0\cdot 4) - (1\cdot 5\cdot(-3) + 4\cdot(-4)\cdot(-1) + 0\cdot 0\cdot 2)$

$= (0 - 8 + 0) - (-15 + 16 + 0)$

$= -8 - 1$

$= -9$

Contoh 27

Determinan matriks $Q = \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3x & 2 & 5 \end{pmatrix}$ adalah 5, tentukan nilai x

Jawab:

$|\,Q\,| = (x-1)\cdot 2\cdot 5 + 1\cdot(-4)\cdot 3x + 3\cdot(-1)\cdot 2 - 3x\cdot 2\cdot 3 - 2\cdot(-4)\cdot(x-1) - 5\cdot(-1)\cdot 1$

$= (x-1)10 - 12x - 6 - 18x + 8(x-1) + 5$

$= 10x - 10 - 12x - 6 - 18x + 8x - 8 + 5$

$= -12x - 19$

$$|\,Q\,| = 5$$
$$-12x - 19 = 5$$
$$-12x = 5 + 19$$
$$-12x = 24 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

3. Minor , Kofaktor, dan Adjoin

Jika A adalah sebuah matriks persegi, maka minor entri atau elemen a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan submatriks yang tinggal setelah baris ke-i dan kolom ke-j dicoret dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}$ M_{ij} dinyatakan oleh C_{ij} dinamakan kofaktor entri $a_{ij.}$

Jika A adalah sembarang matriks persegi (n x n) dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij}, maka matriks

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Transpose matriks ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan dengan Adj (A).

Contoh 28

Tentukan minor, kofaktor, matriks kofaktor, dan adjoin dari $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Jawab:

Minor dari matriks A adalah

$M_{11} = 4$ $\quad$ $M_{21} = 1$

$M_{12} = 5$ $\quad$ $M_{22} = -2$

Kofaktor dari matriks A adalah

$C_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11} = (1)\ 4\ =\ 4$ $\quad$ $C_{21} = (-1)^{2+1}\ M_{21} = (-1)\ 1 =\ -1$

$C_{12} = (-1)^{1+2}\ M_{12} = (-1)\ 5\ = -5$ $\quad$ $C_{22} = (-1)^{2+2}\ M_{22} = (1)(-2)\ = -2$

Matriks kofaktornya adalah

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Adjoin dari matriks kofaktor adalah transpose dari matriks kofaktor, sehingga

$$\text{Adj}\ (A) = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Contoh 29

Tentukan minor, kofaktor, matriks kofaktor, dan adjoin dari $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Jawab:

Minor dari matriks tersebut adalah:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - (-2) \cdot (-1) = 10 \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-2) - 4 \cdot 0 = 4$$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) = 7$ $\qquad M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) - 4 \cdot 5 = -20$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 4 \cdot 4 = -18$ $\qquad M_{32} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 = -3$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - (-2) \cdot 5 = 10$ $\qquad M_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 - 1 \cdot 0 = -8$

$M_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = -26$

Kofaktor dari minor-minor tersebut adalah

$C_{11} = (-1)^{1+1}\, M_{11} = (1) \cdot 10 = 10$ $\qquad C_{23} = (-1)^{2+3}\, M_{23} = (-1) \cdot 4 = -4$

$C_{12} = (-1)^{1+2}\, M_{12} = (-1) \cdot 7 = -7$ $\qquad C_{31} = (-1)^{3+1}\, M_{31} = (1) \cdot (-20) = -20$

$C_{13} = (-1)^{1+3}\, M_{13} = (1) \cdot (-18) = -18$ $\qquad C_{32} = (-1)^{3+2}\, M_{32} = (-1) \cdot (-3) = 3$

$C_{21} = (-1)^{2+1}\, M_{21} = (-1) \cdot 10 = -10$ $\qquad C_{33} = (-1)^{3+3}\, M_{33} = (1) \cdot (-8) = -8$

$C_{22} = (-1)^{2+2}\, M_{22} = (1) \cdot (-26) = -26$

Matriks kofaktornya adalah

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & -18 \\ -10 & -26 & -4 \\ -20 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

Adjoin dari matriks kofaktor adalah transpose dari matriks kofaktor, sehingga

$$\text{Adj (A)} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & -18 \\ -10 & -26 & -4 \\ -20 & 3 & -8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 10 & -10 & -20 \\ -7 & -26 & 3 \\ -18 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

4. Invers Matriks

Jika A dan B adalah matriks persegi yang berordo sama, sedemikian sehingga hasil kali AB = BA = I, dengan I matriks identitas maka B adalah invers dari A dan sebaliknya, yaitu B = A^{-1} atau A = B^{-1}.

Contoh 30

Dari $P = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, tunjukkan bahwa kedua matriks saling invers.

Jawab:

$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20+21 & 28-28 \\ -15+15 & 21-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$Q \cdot P = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20+21 & 35-35 \\ -12+12 & 21-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Karena PQ = QP = I , maka P = Q^{-1} dan Q = P^{-1} .

Jika A adalah matriks persegi, maka invers dari matriks A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{ adj (A)}$$

Contoh 31

Tentukan invers dari $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Jawab:

Determinan A (det(A)) adalah det (A) = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Minor dari A adalah

M_{11} = | d | = d $\quad$ M_{21} = | b | = b

M_{12} = | c | = c $\quad$ M_{22} = | a | = a

Kofaktor dari A adalah

$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = d$ $\quad$ $C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -b$

$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -c$ $\quad$ $C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = a$

Matriks kofaktor $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ sedangkan matriks adjoin

$$\text{adj (A)} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Invers matriks A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det (A)} \text{ adj (A)} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Contoh 32

Dengan menggunakan hasil terakhir pada contoh 31 di atas, tentukan invers dari:

a. $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ b. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Jawab:

a. Det(A) = $-4 \cdot 4 - (-2) \cdot 7$ = -16 + 14 = -2 sehingga:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.\text{Adjoin A} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b. Det(A) = $(-2 \cdot 4 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 1 \cdot (-2)) - (4 \cdot 4 \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \cdot 0)$

= (-24 – 0 – 10) – (80 – 4 + 0) = -34 – 76 = -110

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Adjoin (A)}$$ (dari **Contoh 29** diperoleh Adj (A))

$$A^{-1} = -\frac{1}{110} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -20 \\ -7 & -26 & 3 \\ -18 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Catatan

- Matriks yang mempunyai invers adalah matriks yang nilai determinannya $\neq$ 0, matriks seperti ini disebut *matriks nonsingular*, sedangkan matriks yang harga determinannya = 0 disebut *matriks singular .*
- Invers suatu matriks jika ada dan tunggal, maka berlaku sifat
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

Contoh 33

Manakah yang termasuk matriks singular dan matriks nonsingular

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ b. $B = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Jawab:

a. det (A) = $2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 12 - 12 = 0$, karena determinannya 0 maka disebut matriks singular

b. det (B) = $4 \cdot (-5) - (-2) \cdot (-10) = -20 - 20 = -40$, karena determinannya tidak 0 maka disebut matriks nonsingular

Contoh 34

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$, tentukan matriks dari:

a. $(AB)^{-1}$ b. $B^{-1} \cdot A^{-1}$

Jawab:

a. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+25 & 6+80 \\ 3+35 & 9+112 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 86 \\ 38 & 121 \end{pmatrix}$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{27 \times 121 - 38 \times 86} \begin{pmatrix} 121 & -86 \\ -38 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -121 & 86 \\ 38 & -27 \end{pmatrix}$$

b. $$A^{-1} = \frac{1}{2 \times 7 - 3 \times 5} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1 \times 16 - 3 \times 5} \begin{pmatrix} 16 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} . A^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -112-9 & 80+6 \\ 35+3 & -25-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -121 & 86 \\ 38 & -27 \end{pmatrix}$$

Ternyata, dari jawaban a dan b pada contoh soal di atas, diperoleh kesimpulan $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

LATIHAN 3

1. Hitunglah determinan matriks berikut.

a. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ e. $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} -3 & -9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 2,5 \end{vmatrix}$ f. $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

2. Tentukan determinan dari matriks ordo 3 di bawah ini.

a. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

3. Tentukan nilai x dari persamaan di bawah ini.

a. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x & 4 \end{vmatrix} = 0$ c. $\begin{vmatrix} 2x & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = 7x$ e. $\begin{vmatrix} 1-x & -2 \\ 4+2x & 1 \end{vmatrix} = 4-3x$

b. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$ d. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x+2$ f. $\begin{vmatrix} x-1 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2x+5$

4. Tunjukkan bahwa matriks-matriks di bawah ini saling invers.

a. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$

5. Carilah minor, matriks kofaktor, adjoin, dan invers dari matriks-matriks di bawah ini.

a. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$

6. Carilah minor, kofaktor, adjoin, dan invers dari matriks-matriks pada soal nomor 2.

7. Diketahui $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, tentukan

a. P^{-1}

b. Q^{-1}

c. $P^{-1}\ Q^{-1}$

d. $Q^{-1}\ P^{-1}$

e. $(P \cdot Q)^{-1}$

f. $(Q \cdot P)^{-1}$

g. Apakah $(P \cdot Q)^{-1} = Q^{-1}\ P^{-1}$

h. Apakah $(Q \cdot P)^{-1} = P^{-1}\ Q^{-1}$

8. Manakah yang termasuk matriks singular dan nonsingular

a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{6} \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} \sin^2 x & 2 \\ -0,5 & \cos^2 x \end{pmatrix}$

5. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier

Sistem persamaan linier dua atau tiga variabel selain dengan menggunakan eliminasi dan substitusi dapat juga digunakan invers dan kaidah *Cramer* untuk mencari himpunan penyelesaiannya.

Beberapa langkah yang perlu diperhatikan untuk mencari himpunan penyelesaian sistem persamaan linier dengan menggunakan invers, adalah sebagai berikut.

- ❖ Tulislah sistem persamaan dalam bentuk matriks.
- ❖ Nyatakan bentuk tersebut ke dalam perkalian matriks koefisien dengan matriks variabelnya.

$$a_{11}x + a_{12}y = c_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = c_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{C}$$ persamaan matriks berbentuk $A \cdot X = C$

- ❖ Kalikan kedua ruas dengan invers A atau A^{-1}, sehingga menjadi

$$A^{-1} A X = A^{-1}C$$
$$I X = A^{-1}C$$
$$X = A^{-1}C$$

Untuk persamaan yang berbentuk $X \cdot A = C$, maka untuk mendapatkan X, kalikan kedua ruas dengan A^{-1} dari sebelah kanan, sehingga didapat

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = C\, A^{-1}$$
$$X\, I = C\, A^{-1}$$
$$X = C\, A^{-1}$$

Contoh 35

Tentukan nilai x dan y dari sistem persamaan

$$4x - 5y = -2$$
$$-3x + 4y = 4$$

Jawab:

Sistem persamaan $\begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ -3x + 4y = 4 \end{cases}$ jika dibuat dalam bentuk matriks menjadi

$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ perkalian matriks tersebut berbentuk $A \cdot X = C$ dengan

$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{4\cdot 4-(-3)\cdot(-5)}\begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8+20\\ -6+16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\ 10\end{pmatrix}$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah {(12, 10)}.

Di samping menggunakan cara invers dapat juga penyelesaian sistem persamaan linier dicari dengan menggunakan kaidah Cramer.
Jika $A \cdot X = C$ adalah sistem persamaan linear yang terdiri atas n persamaan linier dan n variabel yang tidak diketahui sehingga det (A) $\neq$ 0, maka sistem tersebut mempunyai penyelesaian yang unik (tunggal). Penyelesaian tersebut adalah

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dimana A_j adalah matriks yang didapat dengan cara mengganti entri-entri di dalam kolom ke-j dari A dengan entri-entri di dalam matriks

$$C = \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\end{pmatrix}$$

Contoh 36
Gunakan kaidah Cramer untuk mencari himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut ini.

$3x - 5y = 11$
$2x + y = 3$

Jawab:

Bentuk perkalian matriks sistem persamaan tersebut adalah $\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\ 3\end{pmatrix}$, dari bentuk ini didapat.

$$A = \begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & 1\end{pmatrix} \text{ dan } \det(A) = \begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 2\cdot(-5) = 13$$

$$A_1 = \begin{pmatrix}11 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix} \text{ dan } \det(A_1) = \begin{vmatrix}11 & -5\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 11\cdot 1 - 3\cdot(-5) = 11+15 = 26$$

$$A_2 = \begin{pmatrix}3 & 11\\ 2 & 3\end{pmatrix} \text{ dan } \det(A_2) = \begin{vmatrix}3 & 11\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 3\cdot 3 - 2\cdot 11 = -13$$

sehingga $x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{26}{13} = 2$ dan $y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-13}{13} = -1$

Jadi, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan adalah {(2, -1)}

Contoh 37

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan dengan menggunakan kaidah Cramer.

$$\begin{aligned} x \quad\quad + 2z &= 7 \\ -3x + 4y + 6z &= 7 \\ -x - 2y + 3z &= 12 \end{aligned}$$

Jawab:

Bentuk perkalian matriks sistem persamaan tersebut adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$,

dari bentuk ini didapat

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ \det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right| = 12 + 0 + 12 + 8 + 12 - 0 = 44$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 6 \\ 12 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ \det(A_1) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 7 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 6 & 7 & 4 \\ 12 & -2 & 3 & 12 & -2 \end{array}\right| = 84 + 0 - 28 - 96 + 84 - 0 = 44$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -3 & 7 & 6 \\ -1 & 12 & 3 \end{pmatrix},\ \det(A_2) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 7 & 2 & 1 & 7 \\ -3 & 7 & 6 & -3 & 7 \\ -1 & 12 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right| = 21 - 42 - 72 + 14 - 72 + 63 = -88$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -3 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 12 \end{pmatrix},\ \det(A_3) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 7 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 12 & -1 & -2 \end{array}\right| = 48 + 0 + 42 + 28 + 14 - 0 = 132$$

Dengan demikian,

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{44}{44} = 1,\quad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-88}{44} = -2 \text{ dan } z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{132}{44} = 3$$

Contoh 38

Tentukanlah matriks P dari persamaan matriks di bawah ini:

a. $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b. $P \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

Jawab:

a. Dari $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ diperoleh persamaan:

$A \cdot P = B$, sehingga $P = A^{-1} \cdot B$

$$P = \frac{1}{-10+9}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = -\begin{pmatrix} 20-3 & 0+6 \\ -12+2 & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}$$

b. Dari $P \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ diperoleh persamaan matriks

$P \cdot A = B$, sehingga $P = B \cdot A^{-1}$

Dari persamaan $P = B \cdot A^{-1}$, diperoleh banyaknya kolom matriks B tidak sama dengan banyaknya baris matriks A^{-1}. Dengan demikian $B \cdot A^{-1}$ tidak dapat diselesaikan. Oleh karena itu, tidak ada matriks P dari persamaan matriks di atas.

Contoh 39

Harga 3 baju dan 2 kaos adalah Rp280.000,00. Sedangkan harga 1 baju dan 3 kaos yang sama adalah Rp210.000,00. Tentukan harga 6 baju dan 5 kaos.

Jawab:

Persoalan di atas diterjemahkan dalam bentuk model matematika dengan memisalkan harga tiap baju x dan harga tiap kaos y, sehingga diperoleh sistem persamaan sebagai berikut.

$3x + 2y = 280.000$

$x + 3y = 210.000$

Sistem persamaan $\begin{cases} 3x + 2y = 280.000 \\ x + 3y = 210.000 \end{cases}$ jika dibuat dalam bentuk matriks menjadi

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280.000 \\ 210.000 \end{pmatrix}$ perkalian matriks tersebut berbentuk $A \cdot X = C$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad C = \begin{pmatrix} 280.000 \\ 210.000 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 3 - 1 \cdot 2}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 280.000 \\ 210.000 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \text{ x } 280.000 + (-2) \text{ x } 210.000 \\ -1 \text{ x } 280.000 + 3 \text{ x } 210.000 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 420.000 \\ 350.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60.000 \\ 50.000 \end{pmatrix}$$

Harga 6 baju dan 5 kaos $= \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60.000 \\ 50.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \text{ x } 60.000 + 5 \text{ x } 50.000 \end{pmatrix} = (\ 550.000\ )$

Jadi, harga 6 baju dan 5 kaos adalah Rp550.000,00.

F. Rangkuman Determinan dan Invers Matriks

1. Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

2. Jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, maka

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22}\, a_{13} - a_{32}\, a_{23}\, a_{11} - a_{33}\, a_{21}\, a_{12}$$

3. Jika A adalah sebuah matriks persegi, maka minor dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan submatriks yang tinggal setelah baris ke-i dan kolom ke-j dicoret dari A. Sedangkan $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ dinamakan kofaktor. Transpose matriks kofaktor A disebut adjoin dari A dan dinyatakan dengan Adj (A).

4. Jika A dan B adalah matriks persegi yang berordo sama sedemikian sehingga hasil kali $A \cdot B = B \cdot A = I$, dengan I matriks identitas maka B adalah invers dari A dan sebaliknya, yaitu $B = A^{-1}$ atau $A = B^{-1}$.

5. Jika A adalah matriks persegi, maka invers dari matriks A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj } (A)$$

6. Matriks yang mempunyai invers adalah matriks yang nilai determinannya $\neq 0$, matriks seperti ini disebut *matriks nonsingular*, sedangkan matriks yang harga determinannya = 0 disebut *matriks singular* **.**

7. Pada invers matriks berlaku
   - $(A^{-1})^{-1} = A$
   - $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$
   - Jika $A \cdot B = I$, maka $B = A^{-1}$
   - Jika $A \cdot X = B$ maka $X = A^{-1} \cdot B$
   - Jika $X \cdot A = B$ maka $X = B \cdot A^{-1}$

8. Jika AX = C adalah sistem persamaan linear yang terdiri atas n persamaan linear dan n variabel yang tidak diketahui sehingga det (A) $\neq 0$, maka sistem tersebut mempunyai penyelesaian yang unik (tunggal). Penyelesaian tersebut adalah

   $$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \cdots x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

   dimana A_j adalah matriks yang didapat dengan cara mengganti entri-entri di dalam kolom ke-j dari A dengan entri-entri di dalam matriks C.

LATIHAN 4

Tentukan himpunan penyelesaian dengan menggunakan invers

1. $3x + 8y = -7$
   $x - 4y = 11$

4. $y = 8 - 2x$
   $5x - 3y = 31$

2. $x - 2y = -12$
   $5x + 4y = 10$

3. $4x + y = -19$
   $-2x + y = 11$

5. $y = -3x - 11$
   $y = 0{,}5x + 3$

Gunakan kaidah Cramer untuk mendapatkan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut.

6. $x - 4y = 8$
   $2x + y = -2$

7. $3x + y = 8$
   $2x + 2y = 4$

8. $x + 3y = -11$
   $2x - 6y = 14$

9. $x - 3y + z = 10$
   $2x - y = 4$
   $4x - 3z = -5$

10. $x + y - z = -1$
    $x - y + z = 4$
    $x - y - z = 1$

11. Tentukan matriks X yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

c. $X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -24 \end{pmatrix}$

d. $X \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

f. $\begin{pmatrix} 2 & 37 \\ -1 & -19 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. Carilah x dan y dari persamaan berikut ini.

a. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ -y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -7 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x-4 \\ -y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \end{pmatrix}$

13. Seorang pedagang menjual dua jenis komoditas campuran. Komoditas jenis pertama merupakan campuran dari 10 kg kualitas A dan 30 kg kualitas B, sedangkan komoditas jenis kedua merupakan campuran dari 20 kg kualitas A dan 50 kg kualitas B. Harga komoditas jenis pertama Rp100.000,00 dan jenis kedua Rp170.000,00.
    a. Bentuklah matriks dari pernyataan tersebut.
    b. Selesaikanlah perkalian matriks untuk mendapatkan harga masing-masing kualitas per kilogram.

14. Lima meja dan delapan kursi berharga $115, sedangkan tiga meja dan lima kursi berharga $70. Tentukan harga 6 meja dan 10 kursi.

Uji Kemampuan

A. Soal Pilihan Ganda

Pilihlah satu jawaban a, b, c, d atau e yang dianggap benar

1. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ maka $A \cdot B$ = ...

   a. $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

   maka 2A – B + 2C = ...

   a. $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 24 & 6 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 19 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} -24 & 6 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 15 & 6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$

3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$ dan $X \cdot A = B$.

   Matriks X adalah . . . .

   a. $\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -6 & -10 \\ 20 & 5 \end{pmatrix}$

4. Jika $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ dan $A \cdot B = I$, dengan I matriks satuan , maka B =. . . .

   a. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{5}{4} & 2 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

5. Jika diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

   maka matriks $A \cdot B$ adalah . . . .

a. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

6. Nilai I_1 dan I_2 pada persamaan matriks $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \end{pmatrix}$ berturut-turut adalah. . . .
   a. 3 dan 5 c. 5 dan 3 e. 9 dan 4
   b. 23 dan –2 d. 7 dan -1

7. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ maka det (A) = ...
   a. -2 c. 0 e. 2
   b. -1 d. 1

8. Nilai a, b, c, dan d berturut-turut yang memenuhi persamaan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ adalah . . . .
   a. -1, 1, 2 dan 3 c. -1, -1, 2 dan 3 e. -15, -9, 5 dan 3
   b. -1, 1, 3 dan 2 d. 1, 3, 9 dan 15

9. Matriks X yang memenuhi persamaan $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ adalah. . . .
   a. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

10. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, maka $(A + B)^2$ = ...
   a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$

11. Diketahui $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4$, nilai x yang memenuhi persamaan adalah . . . .
   a. -9 c. 0 e. 9
   b. -4 d. 5

12. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ nilai k yang memenuhi $k \cdot \det(A^T) = \det(A^{-1})$ adalah . . . .

b. -5 c. $-\frac{1}{25}$ e. 5

c. $-\frac{1}{5}$ d. $\frac{1}{25}$

13. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Jika $AX = B^T$, maka matriks X adalah . . .

a. $\begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 16 & -10 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 18 & -12 \\ 16 & -10 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

14. Jika $3Q - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$ matriks Q adalah . . . .

a. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

15. Harga x dan y berturut-turut dari persamaan $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ adalah . . . .

a. 2 dan -1 c. 2 dan $-\frac{1}{3}$ e. -1 dan 4

b. -1 dan 2 d. $-\frac{1}{3}$ dan 2

16. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, X matriks berordo (2x2) yang memenuhi persamaan matriks 2A – B + X = 0, maka X = ...

a. $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$

17. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ maka A x (B – C) =. . . .

a. $\begin{pmatrix} -7 & 19 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 1 & -16 \\ -2 & 22 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -5 & -14 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$

18. Diketahui persamaan matriks $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ maka X adalah . . . .

a. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
e. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

19. Jika $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 11 & 27 \end{pmatrix}$ maka $|A|$ = ...

a. -7
c. 0
e. 7
b. -1
d. 1

20. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & a+d \\ b & c \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ -c & d \end{pmatrix}$; dan $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2b \end{pmatrix}$

Jika $A + B^t = C$ dengan B^t adalah transpos dari B maka nilai d =. . . .

a. -2
c. 0
e. 2
b. -1
d. 1

21. jika $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ maka x + y adalah . . .

a. -31
c. -5
e. 31
b. -21
d. 5

22. Penyelesaian sistem persamaan $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$ dapat dinyatakan sebagai . . . .

a. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$
e. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

23. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & p \\ q & -1 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

nilai p dan q yang memenuhi A + 2B = C Berturut-turut adalah . . .

a. –2 dan –1
c. –2 dan 3
e. 3 dan –2
b. –2 dan 1
d. 1 dan 2

24. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $2A^T - B + 3C$ = . . .

a. $\begin{pmatrix} 6 & 18 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} 24 & 18 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
e. $\begin{pmatrix} 24 & 14 \\ -13 & -6 \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} 24 & 6 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix} 24 & 18 \\ -13 & -6 \end{pmatrix}$

25. Invers matriks A = $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ adalah . . . .

a. $-\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
c. $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
e. $-\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
d. $-\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

A. Soal Essay

Kerjakan soal-soal berikut dengan benar.

1. Tentukan matriks X yang memenuhi persamaan berikut.
   a. $X\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

2. Gunakan kaidah Cramer untuk mendapatkan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut.
   a. $3x - 4y = 60$
      $y = 4 - 4x$
   b. $x - 3y + z = -15$
      $2x - y = -13$
      $4x - 3z = -17$

3. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, tentukanlah:
   a. $(A^T \cdot B)^{-1}$
   b. $(B^{-1})^{-1}$
   c. $A^{-1} B^T$
   d. $(A + B)^{-1}$
   e. $(2B - 3A)^T$
   f. Buktikan $(A\,B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

4. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, carilah f(A) = $3A^2 - 2A + 5I$ (I adalah matriks identitas)

5. Tentukanlah nilai x, y, z, a dan b dari persamaan matriks di bawah ini:
$$\begin{pmatrix} 2 & y & 4 \\ 2x-1 & 4 & -7 \\ 1 & 2z & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 3a & 2 \\ x & 2z-2 & -8 \\ 5 & -8 & 3 \end{pmatrix}^T$$

6. Tentukan matriks X yang memenuhi persamaan berikut ini.
   a. $0{,}25X - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^T$
   b. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^T - 3X = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

Ubahlah cara berpikir kalian,
maka dunia kalian juga akan berubah

4 PROGRAM LINIER

Sumber: Art & Gallery

Standar kompetensi program linier terdiri atas empat kompetensi dasar. Dalam penyajian pada buku ini setiap kompetensi dasar memuat tujuan, uraian materi, dan latihan. Sedangkan rangkuman dipaparkan pada setiap akhir bahasan suatu kompetensi dasar. Kompetensi dasar dalam standar kompetensi ini adalah *grafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linier, model matematika dari soal cerita (kalimat verbal), nilai optimum dari sistem pertidaksamaan linier,* dan *garis selidik*. Standar kompetensi ini digunakan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan tertentu sehingga diperoleh nilai yang optimum pada kehidupan sehari-hari dalam rangka menunjang program keahlian Penjualan dan Akuntansi. Sebelum mempelajari standar kompetensi ini, diharapkan kalian telah menguasai standar kompetensi sistem bilangan riil dan standar kompetensi Persamaan dan Pertidaksamaan.

Pada setiap akhir kompetensi dasar tercantum soal-soal latihan yang disusun dari soal-soal yang mudah hingga yang sulit. Latihan soal digunakan untuk mengukur kemampuan kalian terhadap kompetensi dasar ini. Artinya setelah mempelajari kompetensi dasar ini secara mandiri dengan bimbingan guru sebagai fasilitator, ukurlah sendiri kemampuan kalian dengan mengerjakan soal-soal latihan tersebut.

Untuk melancarkan kemampuan kalian supaya lebih baik dalam mengerjakan soal, disarankan semua soal dalam latihan ini dikerjakan, baik di sekolah dengan bimbingan guru maupun di rumah.

Untuk mengukur standar kompetensi lulusan tiap peserta didik, di setiap akhir kompetensi dasar, guru akan memberikan evaluasi apakah kalian layak atau belum layak mempelajari standar kompetensi berikutnya. Kalian dinyatakan layak jika kalian dapat mengerjakan soal 60% atau lebih soal-soal evaluasi yang akan diberikan guru.

Setelah mempelajari kompetensi ini, peserta didik diharapkan dapat mengaplikasikannya dalam mempelajari kompetensi-kompetensi pada pelajaran matematika, pelajaran lainnya, maupun dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contoh bentuk aplikasi program linier bidang Penjualan dan Akuntansi, yaitu analisis produk yang dibuat atau dibangun untuk mendapatkan keuntungan maksimum atau biaya minimum seperti contoh berikut ini.

Pengembang suatu perumahan akan membangun perumahan yang terdiri atas tiga tipe, yaitu tipe 36, tipe 45 dan tipe 70 dari lahan yang dimilikinya. Lahan yang ada sebagian digunakan untuk fasilitas umum dan sosial.
Dari kondisi tersebut, analisis yang mungkin dilakukan oleh pihak pengembang dalam menentukan jumlah rumah yang dapat dibangun untuk mendapatkan keuntungan maksimal antara lain:

a. harga jual tanah per meter persegi,
b. biaya material per unit untuk tiap tipe,
c. biaya jasa tukang per unit untuk tiap tipe,
d. harga rumah standar per unitnya untuk masing-masing tipe,
e. banyaknya tiap tipe yang harus dibangun, dan
f. modal total yang harus disediakan untuk membangun perumahan tersebut

Gambar 4-1 Tampak perumahan berbagai tipe
Sumber: www.serpongfile.wordpress.com.

Mungkin masih banyak lagi yang harus dianalisis untuk membangun sebuah kompleks perumahan, namun di sini hanya memberikan gambaran penggunaan program linier dalam kegiatan sebuah bisnis. Dari analisis sederhana tersebut dapat diperoleh gambaran komponen apa saja yang terlibat dalam membuat sebuah perumahan. Komponen-komponen ini sebagai variabel yang kemudian disusun menjadi bentuk model pertidaksamaan linier dan dicari solusinya untuk mendapatkan keuntungan yang optimum. Dalam buku ini hanya melibatkan pertidaksamaan-pertidaksamaan dua variabel yang merupakan pengetahuan dasar dan diharapkan setelah mempelajari kompetensi ini peserta didik dapat mengembangkan pertidaksamaan dengan variabel lebih dari dua dalam penyelesaian kehidupan sehari-hari.

A. Grafik Himpunan Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linier

Setelah mempelajari materi pada kompetensi dasar ini, kalian diharapkan dapat:

- menjelaskan pengertian program linier,
- menggambar grafik himpunan penyelesaian pertidaksamaan linier, dan
- menggambar grafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linier dengan 2 variabel.

1. Pengertian Program Linier

Dalam kegiatan produksi dan perdagangan, baik pada industri skala besar maupun kecil tidak terlepas dari masalah laba yang harus diperoleh oleh perusahaan tersebut. Tujuan utamanya adalah untuk memperoleh pendapatan yang sebesar-besarnya dengan meminimumkan pengeluarannya (biaya bahan baku, biaya proses produksi, gaji karyawan, transportasi, dan lain-lain).

Untuk maksud tersebut biasanya pihak manajemen perusahaan membuat beberapa kemungkinan dalam menentukan strategi yang harus ditempuh untuk mencapainya. Misalnya, dalam memproduksi dua macam barang dengan biaya dan keuntungan berbeda. Pihak perusahaan dapat menghitung keuntungan yang mungkin dapat diperoleh sebesar-besarnya dengan memperhatikan bahan yang diperlukan, keuntungan per unit, biaya transportasi, dan sebagainya.

Untuk menyelesaikan masalah tersebut digunakan program linier. Program linier diartikan sebagai cara untuk menyelesaikan suatu persoalan (penyelesaian optimum) dengan menggunakan metode matematik yang dirumuskan dalam bentuk persamaan-persamaan atau pertidaksamaan-pertidaksamaan linier.

Untuk mendapatkan penyelesaian optimum tersebut digunakan metode grafik yang diterapkan pada program linier sederhana yang terdiri atas dua variabel dengan cara uji titik pojok atau garis selidik pada daerah himpunan penyelesaian.

2. Grafik Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Linier Satu Variabel

Grafik himpunan penyelesaian pertidaksamaan linier satu variabel sudah dibahas pada saat kalian belajar matematika di SMP. Namun, untuk mengingatkan kembali perhatikan beberapa contoh di bawah ini.

Contoh 1

Tentukan daerah penyelesaian dari

a. $x \geq 0$	c. $x < 2$	e. $2 \leq x \leq 4$
b. $y \geq 0$	d. $x \geq -1$	f. $-1 < y \leq 2$

Jawab:

a. $x \geq 0$ mempunyai persamaan $x = 0$, ini merupakan garis lurus, yang berimpit dengan sumbu y. Daerah penyelesaian dengan mudah dapat dicari yaitu daerah di sebelah kanan garis atau sumbu y karena yang diminta adalah untuk $x \geq 0$. Daerah penyelesaian ditunjukkan pada gambar 4-2a.

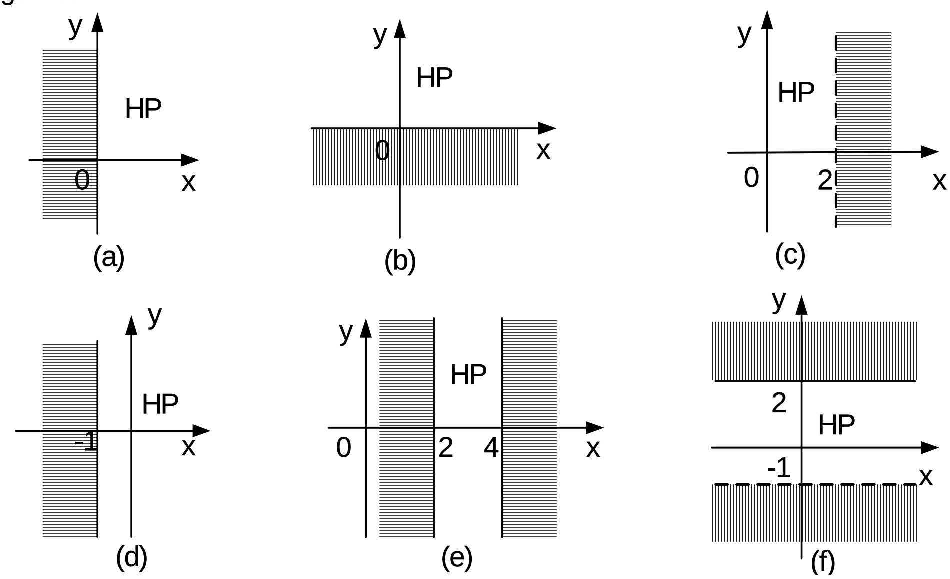
b. $y \geq 0$ mempunyai persamaan $y = 0$, ini merupakan garis lurus yang berimpit dengan sumbu x. Daerah penyelesaian dengan mudah dapat dicari, yaitu daerah di sebelah atas garis atau sumbu x karena yang diminta adalah untuk $y \geq 0$. Daerah penyelesaian ditunjukkan pada gambar 4-2b.

c. $x < 2$ mempunyai persamaan $x = 2$. Daerah penyelesaian adalah daerah di sebelah kiri garis karena yang diminta adalah untuk $x < 2$. Daerah penyelesaian ditunjukkan pada gambar 4-2c.

d. $x \geq -1$ mempunyai persamaan $x = -1$. Daerah penyelesaian adalah daerah di sebelah kanan garis karena yang diminta adalah untuk $x \geq -1$. Daerah penyelesaian ditunjukkan pada gambar 4-2d.

e. $2 \leq x \leq 4$ mempunyai persamaan $x = 2$ dan $x = 4$. Daerah penyelesaian adalah daerah di antara kedua garis tersebut. Daerah penyelesaian ditunjukkan pada gambar 4-2e.

f. $-1 \le y \le 2$ mempunyai persamaan $y = -1$ dan $y = 2$. Daerah penyelesaian adalah daerah di antara kedua garis tersebut. Daerah penyelesaian ditunjukkan pada gambar 4-2f.



Gambar 4-2 Himpunan daerah penyelesaian

3. Grafik Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Linier Dua Variabel

Pertidaksamaan linier dua variabel, yaitu pertidaksamaan yang memuat dua peubah misalnya x dan y. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan tersebut dapat disajikan dalam bidang cartesius. Bentuk-bentuk pertidaksamaan linier adalah

$$ax + by < c, \quad ax + by \le c, \quad ax + by \ge c \text{ atau } ax + by > c.$$

Langkah-langkah yang ditempuh untuk menyelesaikan daerah himpunan pertidaksamaan linier dua variabel adalah sebagai berikut

a. Gambarlah garis $ax + by = c$ pada bidang cartesius dengan cara mencari titik-titik potong grafik dengan sumbu x ($y = 0$) dan sumbu y ($x = 0$).

b. Ambil titik sembarang $P(x_1, y_1)$ yang bukan terletak pada garis tersebut, kemudian dihitung nilai dari $ax_1 + by_1$. Nilai $ax_1 + by_1$ ini dibandingkan dengan nilai c.

c. Daerah penyelesaian untuk pertidaksamaan $ax + by \le c$ ditentukan sebagai berikut
  - Jika $ax_1 + by_1 < c$, maka daerah yang memuat P merupakan daerah penyelesaian.
  - Jika $ax_1 + by_1 > c$, maka daerah yang memuat titik P bukan merupakan daerah penyelesaian.

d. Daerah penyelesaian untuk pertidaksamaan $ax + by \ge c$ ditentukan sebagai berikut
  - Jika $ax_1 + by_1 > c$, maka daerah yang memuat P merupakan daerah penyelesaian.
  - Jika $ax_1 + by_1 < c$, maka daerah yang memuat titik P bukan merupakan daerah penyelesaian.

e. Daerah yang bukan merupakan penyelesaian diberi arsiran, sehingga daerah penyelesaiannya merupakan daerah tanpa arsiran. Hal ini sangat membantu pada saat menentukan daerah yang memenuhi terhadap beberapa pertidaksamaan.

f. Daerah penyelesaian untuk pertidaksamaan yang memuat tanda sama dengan digambar dengan garis penuh, sedangkan daerah penyelesaian pertidaksamaan yang tidak memuat tanda sama dengan digambar dengan garis putus-putus.

Contoh 2

Tentukan daerah penyelesaian dari

a. $2x + y \leq 4$ b. $2x - 3y \geq 6$

Untuk menyelesaikan contoh di atas, gambarkan terlebih dahulu grafik masing-masing garisnya dengan cara mencari titik-titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.

Jawab:

a. $2x + y = 4$

Untuk mencari titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y dicari dengan cara membuat tabel berikut ini.

x	0	2
y	4	0

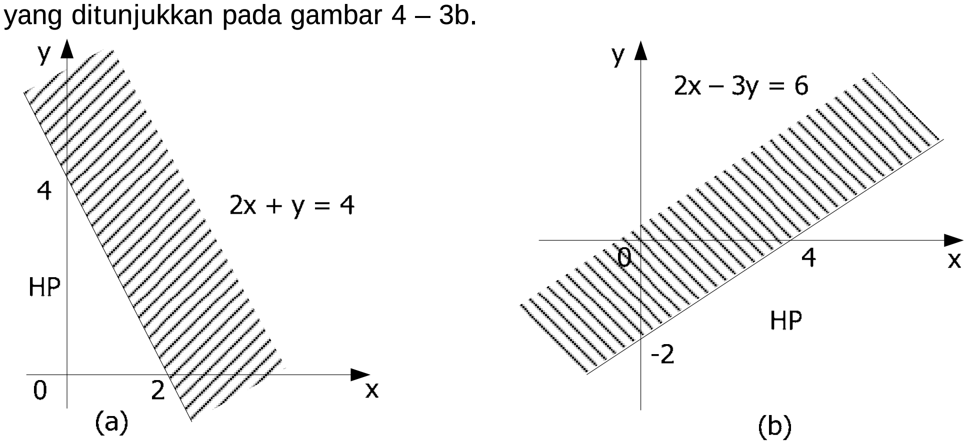
Dengan demikian titik potong dengan sumbu x dan y adalah (2, 0) dan (0, 4). Ambillah titik P(0, 0) sebagai titik uji pada $2x + y \leq 4$ dan diperoleh $2 \cdot 0 + 0 \leq 4$. Daerah yang terdapat titik P merupakan penyelesaian (daerah tidak terarsir) yang ditunjukkan pada gambar 4–3a.

b. $2x - 3y = 6$

Untuk mencari titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y dicari dengan cara membuat tabel berikut ini:

x	0	3
y	-2	0

Dengan demikian titik potong dengan sumbu x dan y adalah (0, -2) dan (3, 0). Ambillah titik P(0,0) sebagai titik uji pada $2x - 3y \geq 6$, dan diperoleh $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \leq 6$. Daerah yang terdapat titik P bukan merupakan penyelesaian (daerah terarsir) yang ditunjukkan pada gambar 4 – 3b.



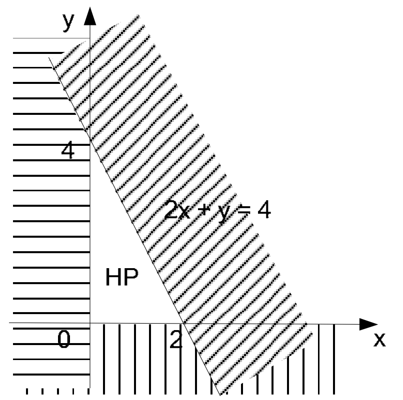
Gambar 4-3 Himpunan daerah penyelesaian pertidaksamaan dua variabel

Contoh 3

Tentukan himpunan penyelesaian dari $x \geq 0$, $y \geq 0$ dan $2x + y \leq 4$

Jawab:

Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan di atas adalah perpotongan atau irisan dari ketiga penyelesaian pertidaksaaan tersebut. Perhatikan (a) dan (b) pada contoh 1 dan (a) pada contoh 2 di atas. Dengan demikian himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan tersebut disajikan seperti tampak pada gambar 4-4 di samping.



Gambar 4-4 HP dari x ≥ 0, y ≥ 0 dan 2x + y ≤ 4

Contoh 4

Tentukan himpunan penyelesaian dari x ≥ 1, y ≥ -1 dan x + 2y ≤ 4.

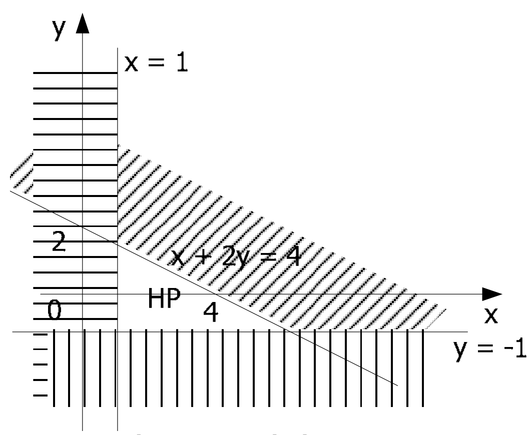
Jawab:

- Untuk x ≥ 1 mempunyai persamaan x = 1. Daerah penyelesaian adalah daerah di sebelah kanan garis karena yang diminta adalah untuk x ≥ 1.
- Untuk y ≥ -1 mempunyai persamaan y = -1. Daerah penyelesaian adalah daerah di sebelah atas garis karena yang diminta adalah untuk y ≥ -1.
- Untuk x + 2y ≤ 4 mempunyai persamaan x + 2y = 4 dan titik potong grafik dengan sumbu koordinat dicari seperti berikut ini.

x	0	4
y	2	0

Titik potong dengan sumbu koordinat adalah (4, 0) dan (0, 2) Ambillah titik P(0, 0) sebagai titik uji pada x + 2y ≤ 4 dan diperoleh 0 + 2⋅0 ≤ 4. Daerah yang memuat titik P merupakan penyelesaian (daerah tidak terarsir).

- Jadi, daerah yang merupakan penyelesaian adalah daerah yang tanpa arsiran seperti gambar 4-5 di samping.



Gambar 4-5 HP dari x ≥ 1, y ≥ -1 dan x + 2y ≤ 4

Contoh 5

Tentukan himpunan penyelesaian dari x ≥ 0, y ≥ 0, x + y ≥ 3, dan 3x + y ≥ 6

Jawab:

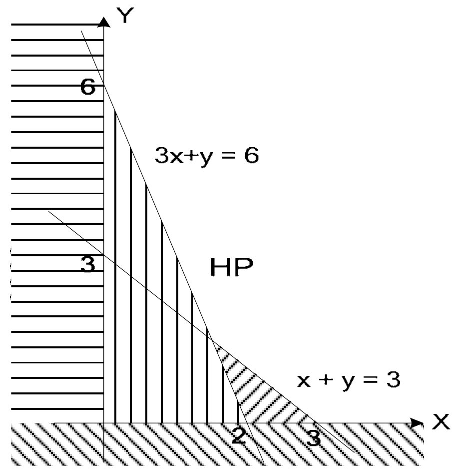
- x + y ≥ 3 mempunyai persamaan x + y = 3 dan titik potong grafik dengan sumbu koordinat dapat dicari seperti berikut ini.

x	0	3
y	3	0

Titik potong dengan sumbu koordinat adalah (3, 0) dan (0, 3). Ambillah titik P(0, 0) sebagai titik uji pada $x + y \geq 3$, dan diperoleh $0 + 0 \leq 3$. Daerah yang memuat titik (0, 0) bukan merupakan penyelesaian (daerah terarsir).

- $3x + y \geq 6$ mempunyai persamaan $3x + y = 6$ dan titik potong grafik dengan sumbu koordinat dapat dicari seperti berikut ini.

x	0	2
y	6	0



Gambar 4-6 HP $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 3$, dan $3x + y \geq 6$

Titik potong dengan sumbu koordinat adalah (2, 0) dan (0, 6). Ambillah titik P(0, 0) sebagai titik uji pada $3x + y \geq 6$, dan diperoleh $3.0 + 0 \leq 6$. Daerah yang memuat titik (0, 0) bukan merupakan penyelesaian (daerah terarsir). Daerah penyelesaiannya merupakan daerah tanpa arsiran seperti pada gambar 4-6

Contoh 6

Tentukan penyelesaian dari $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 4$, $3x + 2y \leq 12$, dan $3x - y \geq -3$, $(x, y \in B)$.

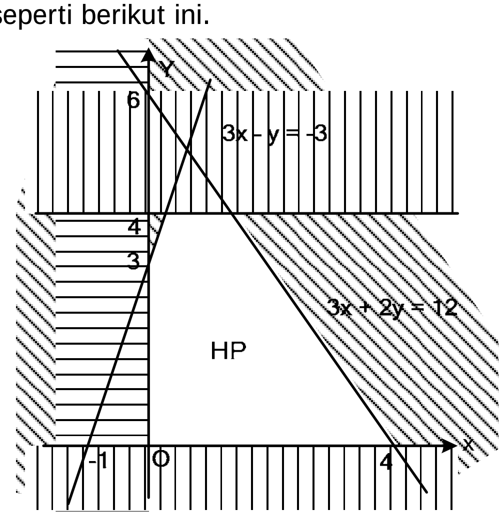
Jawab:

- Untuk $0 \leq y \leq 4$ mempunyai persamaan garis $y = 0$ dan $y = 4$. Daerah penyelesaian adalah daerah di antara $y = 0$ dan $y = 4$.
- Untuk $3x + 2y \leq 12$ mempunyai persamaan $3x + 2y = 12$ dan titik potong grafik dengan sumbu koordinat dapat dicari seperti berikut ini.

x	0	4
y	6	0

Titik potong dengan sumbu koordinat adalah (4, 0) dan (0, 6) Ambillah titik P(0, 0) sebagai titik uji pada $3x + 2y = 12$, dan diperoleh $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 12$. Daerah yang memuat titik P merupakan penyelesaian (daerah tidak terarsir).

- $3x - y \geq -3$ mempunyai persamaan $3x - y = -3$ dan titik potong grafik dengan sumbu koordinat dapat dicari seperti berikut ini.



Gambar 4-7 HP dari $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 4$, $3x + 2y \leq 12$, dan $3x - y \geq -3$

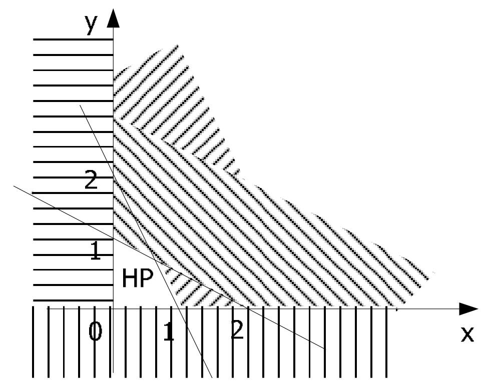
x	0	-1
y	3	0

Titik potong dengan sumbu koordinat adalah (-1, 0) dan (0, 3).
Ambillah titik P(0, 0) sebagai titik uji pada $3x - y \geq -3$, dan diperoleh $3.0 - 0 \geq -3$.
Daerah yang memuat titik P merupakan penyelesaian (daerah tidak terarsir).

- Penyelesaian dari sistem pertidaksamaan ditunjukkan oleh noktah-noktah pada daerah penyelesaian, karena x dan y merupakan bilangan bulat seperti ditunjukkan pada gambar 4,7 di atas. Jika dicari himpunan penyelesaiannya adalah HP = {(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (0, 3) (1, 3), (2, 3), (1, 4)}.

Contoh 7

Daerah HP dari gambar 4-8 di samping merupakan himpunan penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan. Tentukan sistem pertidaksamaan tersebut.



Gambar 4-8 Daerah HP dari suatu sistem pertidaksamaan

Jawab:

Untuk menyelesaikan soal tersebut, yang pertama dilakukan adalah mencari persamaan garis yang melalui titik-titik pada gambar 4-8 dengan menggunakan rumus persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) sebagai berikut.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Misalkan g_1 adalah garis yang melalui titik (1, 0) dan (0, 2), maka g_1 adalah

$$\frac{y-0}{2-0} = \frac{x-1}{0-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{2} = \frac{x-1}{-1} \quad \Rightarrow \quad -y = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad 2x + y = 2$$

dan g_2 adalah garis yang melalui titik (2, 0) dan (0, 1), maka g_2 adalah

$$\frac{y-0}{1-0} = \frac{x-2}{0-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{1} = \frac{x-2}{-2} \quad \Rightarrow \quad -2y = x - 2 \quad \Rightarrow \quad x + 2y = 2$$

Daerah yang diarsir terletak pada sebelah kanan sumbu y, maka $x \geq 0$;
sebelah atas sumbu x , maka $y \geq 0$;
sebelah bawah garis g_1 maka $2x + y \leq 2$;
sebelah bawah garis g_2, maka $x + 2y \leq 2$.

Dengan demikian sistem pertidaksamaan dari daerah yang diarsir adalah

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 2 \\ x + 2y \leq 2 \end{cases}$$

Untuk mencari persamaan garis yang memotong sumbu x dan sumbu y di titik (a, 0) dan (0, b) dapat digunakan rumus

$$bx + ay = ab$$

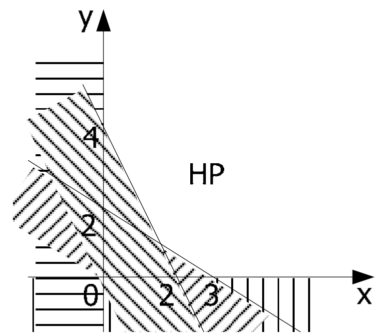
Contoh penggunaan rumus tersebut dapat dilihat pada contoh di bawah ini.

Contoh 8

Daerah yang diarsir dari gambar 4-9 merupakan himpunan penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan. Tentukan sistem pertidaksamaan tersebut.

Jawab:

- Persamaan garis g_1 melalui titik (2, 0) dan (0, 4) adalah:
  $4x + 2y = 8$
  $2x + y = 4$



Gambar: 4-9 Daerah HP dari suatu sistem pertidaksamaan

- Persamaan garis g_2 melalui titik (3, 0) dan (0, 2) adalah $2x + 3y = 6$
- Selain dibatasi oleh garis-garis di atas juga dibatasi oleh garis $x = 0$ dan $y = 0$.

Daerah yang diarsir terletak:
Sebelah kanan sumbu y, maka $x \geq 0$
Sebelah atas sumbu x , maka $y \geq 0$
Sebelah atas garis g_1, maka $2x + y \geq 4$
Sebelah atas garis g_2, maka $2x + 3y \geq 6$

Sehingga sistem pertidaksamaan dari daerah yang diarsir adalah

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 4 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$$

B. Rangkuman Grafik Himpunan Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linier

1. Pertidaksamaan linier dua variabel yaitu pertidaksamaan yang memuat dua peubah misalnya x dan y. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan tersebut dapat disajikan dalam bidang cartesius. Bentuk umumnya adalah
   $ax + by < c$, $ax + by \leq c$, $ax + by \geq c$ atau $ax + by > c$.

2. Langkah-langkah yang ditempuh untuk menyelesaikan daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan linier dua variabel adalah sebagai berikut.
   a. Gambarlah garis $ax + by = c$ pada bidang cartesius dengan cara mencari titik-titik potong grafik dengan sumbu x ($y = 0$) dan sumbu y ($x = 0$).
   b. Ambil titik sembarang $P(x_1, y_1)$ yang bukan terletak pada garis tersebut, kemudian dihitung nilai dari $ax_1 + by_1$ untuk mengetahui apakah nilai P terletak pada daerah penyelesaian atau tidak.
   c. Daerah yang bukan merupakan penyelesaian diberi arsiran, sehingga daerah penyelesaiannya merupakan daerah tanpa arsiran. Hal ini sangat membantu pada saat menentukan daerah yang memenuhi terhadap beberapa pertidaksamaan.

3. Untuk menyelesaikan soal-soal pertidaksamaan membutuhkan rumus-rumus berikut:
   a. Rumus persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2), yaitu

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

   b. Persamaan garis yang memotong sumbu x dan y di titik (a, 0) dan(0, b) dapat digunakan rumus $bx + ay = ab$

LATIHAN 1

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan di bawah ini.

   a. $x \geq 1$
   b. $x \leq -2$
   c. $y \leq 2$
   d. $y \geq -3$
   e. $-1 \leq x \leq 3$
   f. $0 \leq x \leq 4$
   g. $-2 \leq y \leq 0$
   h. $1 \leq y \leq 2$
   i. $x + y \geq 2$
   j. $-x + 2y \leq 4$
   k. $3x + 5y \leq 15$
   l. $2x + y \leq 6$

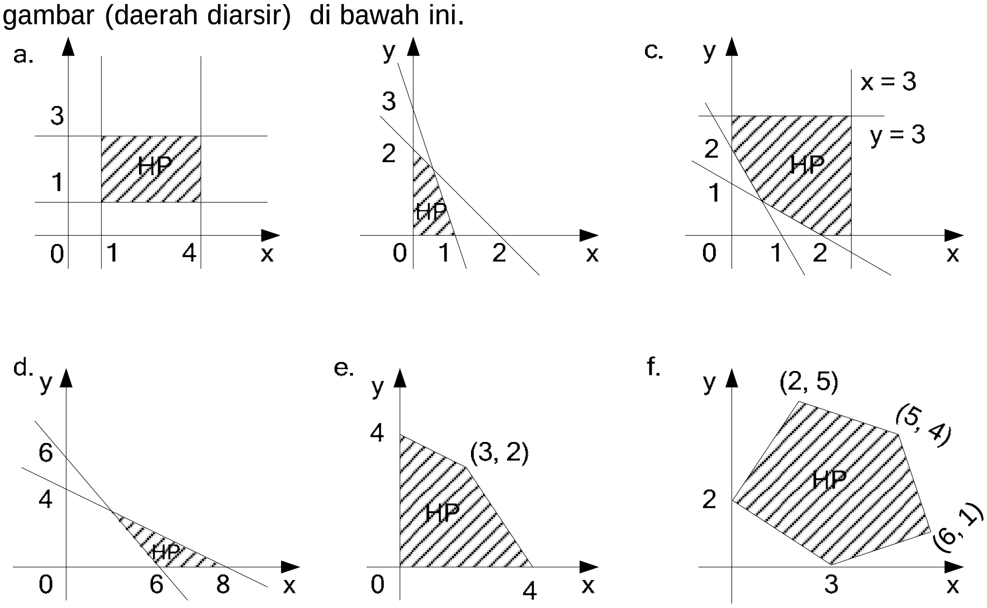
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan di bawah ini.

   a. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1$
   b. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x - y \leq 3$
   c. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + 3y \geq 6$
   d. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + 2y \geq 6$
   e. $x \geq 1,\ y \geq 0,\ 2x + y \leq 6$
   f. $x \geq -1,\ y \leq 3,\ 2x + y \leq 6$
   g. $x + 2y \leq 4,\ 3x + y \leq 6$
   h. $1 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 4,\ x + 2y \leq 6$
   i. $0 \leq x \leq 3,\ -1 \leq y \leq 4,\ 2x + y \leq 5$
   j. $-1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3,\ -x + y \geq 3$
   k. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + 4y \leq 8,\ 2x + y \leq 4$
   l. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 6,\ 2x + y \geq 4$
   m. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ 12x + 3y \leq 36,\ 2x + y \geq 10$
   n. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + 2y \leq 8,\ 3x + y \geq 6$

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan berikut untuk x dan y anggota bilangan bulat.

   a. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \leq 4$
   b. $0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 5$
   c. $-1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2$
   d. $0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3,\ x + y \leq 5$
   e. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ 4x + 5y \leq 20$
   f. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + 2y \leq 12,\ x + 2y \leq 8$

4. Tentukan sistem pertidaksamaan dari himpunan penyelesaian yang disajikan dalam gambar (daerah diarsir) di bawah ini.



C Model Matematika dari Soal Cerita (Kalimat Verbal)

Setelah mempelajari materi pada kompetensi dasar ini, kalian diharapkan dapat:

- menjelaskan pengertian model matematika,
- menyusun model matematika dalam bentuk sistem pertidaksamaan linier,
- menentukan daerah penyelesaian.

1 . Pengertian Model Matematika

Hal terpenting dalam masalah program linier adalah mengubah persoalan verbal ke dalam bentuk model matematika (persamaan atau pertidaksamaan) yang merupakan penyajian dari bahasa sehari-hari ke dalam bahasa matematika yang lebih sederhana dan mudah dimengerti. Jadi model matematika adalah suatu rumusan (dapat berupa persamaan, pertidaksamaan atau fungsi) yang diperoleh dari suatu penafsiran ketika menerjemahkan suatu soal verbal. Model matematika pada persoalan program linier pada umumnya membahas beberapa hal, yaitu:

a. Model matematika berbentuk sistem pertidaksamaan linier dua peubah yang merupakan bagian kendala-kendala yang harus dipenuhi oleh peubah itu sendiri.
b. Model matematika yang berkaitan dengan fungsi sasaran yang hendak dioptimalkan(minimalkan atau maksimalkan)

2. Mengubah Kalimat Verbal menjadi Model Matematika dalam Bentuk Sistem Pertidaksamaan

Untuk mempermudah mengubah soal-soal verbal yang berbentuk program linier ke dalam model matematika digunakan tabel sebagai berikut :

Variabel	Variabel 1 (x)	Variabel 2 (y)	Persediaan
Variabel lain 1			
Variabel lain 2			
Variabel lain 3			

Contoh 9

Untuk membuat roti A diperlukan 200 gram tepung dan 25 gram mentega. Sedangkan untuk roti B diperlukan 100 gram tepung dan 50 gram mentega. Tepung yang tersedia hanya 4 kg dan mentega yang ada 1,2 kg. Jika harga roti A Rp400,00 dan roti B harganya Rp500,00. Buatlah model matematikanya.

Jawab:

Misalkan banyak roti A = x dan banyak roti B = y , berarti variabel yang lain adalah tepung dan mentega. Sehingga tabel yang diperoleh sebagai berikut :

Variabel	Roti A (x)	Roti B (y)	Persediaan
tepung	200 gram	100 gram	4000 gram
mentega	25 gram	50 gram	1200 gram

Terigu dan mentega paling banyak tersedia 4 kg = 4.000 gram dan 1,2 kg = 1.200 gram jadi tanda pertidaksamaan $\leq$. Dari tabel dapat dibuat pertidaksamaan:

$200x + 100y \leq 4.000$ disederhanakan:

$2x + y \leq 40$ . . . (1)

$25x + 50y \leq 1.200$ disederhanakan:

$x + 2y \leq 48$ . . . (2)

karena x dan y adalah bilangan bulat yang tidak negatif maka:

$x \geq 0$ . . . (3)

$y \geq 0$ . . . (4)

Gambar 4-10 Toko roti
www.mallkelapagading.com

keempat pertidaksamaan di atas merupakan persyaratan yang harus dipenuhi disebut *fungsi kendala***.** Harga roti A Rp500,00 dan roti B Rp400,00, maka hasil penjualan dapat dirumuskan dengan $Z = 400x + 500y$ **:** Z disebut *fungsi objektif* atau fungsi sasaran yang dapat dimaksimumkan atau diminimumkan.

Contoh 10

Seorang agen sepeda bermaksud membeli 25 buah sepeda untuk persediaan. Harga sepeda biasa Rp600.000,00 per buah dan sepeda federal Rp800.000,00 per buah. Ia merencanakan untuk tidak membelanjakan uangnya lebih dari Rp16.000.000,00 dengan mengharap keuntungan Rp100.000,00 per buah dari sepeda biasa dan Rp120.000,00 per buah dari sepeda federal. Buatlah model matematikanya.

Jawab:

Misalkan x = jumlah sepeda biasa dan y = jumlah sepeda federal, maka dapat dibuat tabel sebagai berikut.

Variabel	Sepeda biasa (x)	Sepeda federal (y)	Persediaan
Jumlah	1	1	25
Modal	600.000	800.000	16.000.000

Persediaan sepeda dan modal paling banyak 25 buah dan Rp16.000.000,00. Jadi tanda pertidaksamaan $\leq$, sehingga pertidaksamaannya sebagai berikut.

$x + y \leq 25$ . . . . (1)

$600.000x + 800.000y \leq 16.000.000$ disederhanakan

$3x + 4y \leq 80$ . . . . (2)

$x \geq 0$ . . . . (3) dan

$y \geq 0$ . . . . (4)

Bentuk objektifnya $Z = 100.000x + 120.000y$

Contoh 11

Seorang petani memerlukan paling sedikit 30 unit zat kimia A dan 24 unit zat kimia B untuk pupuk kebun sayurnya. Kedua zat kimia itu dapat diperoleh dari pupuk cair dan pupuk kering. Jika setiap botol pupuk cair yang berharga Rp20.000,00 mengandung 5 unit zat kimia A dan 3 unit zat kimia B, sedangkan setiap kantong pupuk kering yang berharga Rp16.000,00 mengandung 3 unit zat kimia A dan 4 unit zat kimia B. Buatlah model matematikanya, sehingga petani dalam membeli dua jenis pupuk tersebut mengeluarkan biaya seminimal mungkin.

Jawab:

Misalkan banyak botol pupuk cair = x dan banyak kantong pupuk kering = y , berarti variabel yang lain adalah zat kimia A dan zat kimia B. Dengan demikian tabel yang diperoleh adalah sebagai berikut

Variabel	Pupuk cair (x)	Pupuk kering (y)	Persediaan
Zat kimia A	5	3	30
Zat kimia B	3	4	24

Zat kimia A dan zat kimia B paling sedikit 30 unit dan 24 unit. Jadi, tanda pertidaksamaan adalah $\geq$. Dari tabel dapat dibuat pertidaksamaan:

$5x + 3y \geq 30$ . . . . (1)

$3x + 4y \geq 24$ . . . . (2)

karena x dan y adalah bilangan bulat yang tidak negatif, maka:

$x \geq 0$ . . . . (3)

$y \geq 0$ . . . . (4)

Dengan harga per botol pupuk cair Rp20.000,00 dan per kantong pupuk kering Rp16.000,00, maka pengeluaran petani untuk membeli pupuk dirumuskan dengan fungsi obyektif $Z = 20.000x + 16.000y$

Contoh 12

Pengembang PT Bangun Propertindo membangun tiga jenis rumah, yaitu tipe 21, tipe 36, dan tipe 45 di daerah Tangerang provinsi Banten.

Luas tanah yang diperlukan untuk membangun masing-masing tipe adalah 60 m^2, 72 m^2, dan 90 m^2 untuk tiap unitnya. Tanah yang tersedia seluas 50 hektar. Tanah yang tersedia digunakan juga untuk membuat jalan serta diwajibkan menyediakan lahan untuk fasilitas sosial dan umum (fasos dan fasum) yang luasnya 5% dari tanah yang tersedia. Apabila banyaknya rumah yang dapat dibangun masing-masing tipe adalah x, y, dan z unit, buatlah model matematika dari persoalan tersebut.

Gambar 4-11 Perumahan di Serpong
www.serpongfile.wordpress.com

Jawab:

Misalkan banyaknya rumah yang dapat dibangun sebagai berikut.
Rumah tipe 21 adalah x unit, Rumah tipe 36 adalah y unit, dan rumah tipe 45 adalah z unit. Luas tanah yang digunakan untuk membangun rumah adalah L. Jadi,

L = luas tanah yang tersedia – luas untuk jalan dan fasos/fasum
= 50 hektar – 5% . 50 hektar
= 47,5 hektar = 475.000 m^2

Dengan demikian model matematika dari persoalan verbal tersebut adalah:

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $60x + 72y + 90z \leq 475.000$

Tanda $\geq$ dimaksudkan bahwa tiap tipe rumah yang dibangun lebih dari sama dengan 0, sedangkan tanda $\leq$ untuk membatasi luas tanah maksimum yang tersedia.
Persoalan yang muncul biasanya pada perusahaan, yaitu bagaimana memaksimumkan keuntungan (pendapatan) atau meminimumkan pengeluaran dari bahan yang digunakan dalam memproduksi suatu barang atau jasa. Variabel atau faktor-faktor lain yang berkaitan proses menentukan nilai *optimum* (maksimum/minimum) perlu diperhitungkan. Pada pembahasan buku ini hanya terdiri atas dua peubah.

Contoh 13

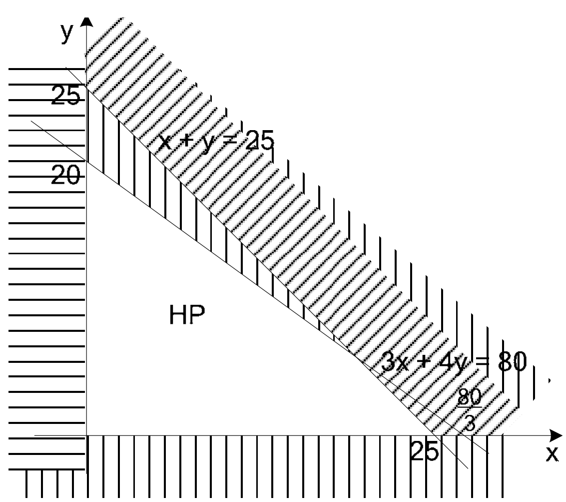
Dari contoh 10, buatlah daerah penyelesaiannya.

Jawab:

Contoh 10, diperoleh sistem pertidaksamaan:

$x + y \leq 25$
$3x + 4y \leq 80$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

dengan menggunakan cara menentukan daerah penyelesaian dari contoh 5 diperoleh grafik daerah penyelesaian sebagai berikut.



Gambar 4-12 Daerah HP $x + y \leq 25$; $3x + 4y \leq 80$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

D. Rangkuman Model Matematika dari Soal Cerita (Kalimat Verbal)

1. Untuk mempermudah mengubah soal-soal verbal yang berbentuk program linier ke dalam model matematika kita gunakan tabel sebagai berikut :

Variabel	Variabel 1 (x)	Variabel 2 (y)	Persediaan
Variabel lain 1			
Variabel lain 2			
Variabel lain 3			

2. Sistem pertidaksamaan $\leq$, jika persediaan dalam soal verbal tersirat kata "paling banyak". Sistem pertidaksamaan $\geq$, jika persediaan dalam soal verbal tersirat kata "paling sedikit".

LATIHAN 2

Dari soal-soal verbal di bawah ini, buatlah model matematikanya, baik fungsi kendala maupun fungsi sasaran. jika ada. Kemudian tentukan daerah penyelesaiannya.

1. Seorang petani ingin memupuk tanaman jagung dan kedelai masing-masing dengan 300 gram Urea dan 150 gram Za untuk jagung, sedangkan untuk kedelai 600 gr urea dan 125 gr Za. Petani tersebut memiliki hanya 18 kg Urea dan 6 kg Za.
2. Produk A membutuhkan 30 kg bahan mentah dan 18 jam waktu kerja mesin. Produk B membutuhkan 20 kg bahan mentah dan 24 jam kerja mesin. Bahan mentah yang tersedia 75 kg dan waktu kerja mesin 72 jam.
3. Seorang penjahit akan membuat pakaian jadi dengan persedian kain polos 20 meter dan kain bergaris 10 meter. Model A membutuhkan 1 meter kain polos dan 1,5 meter kain bergaris. Model B membutuhkan 2 meter kain polos dan 0,5 meter kain bergaris. Keuntungan pakaian model A sebesar Rp15.000,00 dan pakaian model B sebesar Rp10.000,00.
4. Seorang pemilik toko sepatu ingin mengisi tokonya dengan sepatu laki-laki paling sedikit 75 pasang dan sepatu wanita paling sedikit 100 pasang. Toko tersebut hanya dapat memuat 200 pasang sepatu. Keuntungan setiap pasang sepatu laki-laki sebesar Rp15.000,00 dan sepatu wanita Rp10.000,00.
5. Seorang pengusaha ingin menyewakan rumahnya kepada 640 orang mahasiswa. Pengusaha tersebut membangun rumah tidak lebih dari 120 rumah yang terdiri atas tipe I (untuk 4 orang) disewakan Rp500.000,00/bulan dan tipe II (untuk 6 orang) disewakan Rp700.000,00/bulan.
6. Seorang penjaga buah-buahan yang menggunakan gerobak menjual Apel dan jeruk. Harga pembelian apel Rp5.000,00 tiap kg dan jeruk Rp2.000,00 tiap kg. Pedagang tersebut hanya mempunyai modal Rp1.250.000,00 dan muatan gerobak tidak melebihi 400 kg.
7. Diketahui luas daerah parkir 360 m^2. Jika luas rata-rata sebuah mobil 6 m^2 dan sebuah bus 24 m^2, dan daerah parkir tidak dapat memuat lebih dari

20 kendaraan. Biaya parkir untuk sebuah mobil Rp3.000,00 dan sebuah bus Rp5.000,00.

8. Lia membeli kue A dengan harga Rp1.000,00 dan kue B seharga Rp2.000,00. Modal yang dimiliki Lia tidak lebih dari Rp400.000,00. Lia dapat menjual kue A dengan harga Rp1.300,00 dan kue B dengan harga Rp2.200,00. Lia hanya dapat menjual kedua kue sebanyak 300 buah saja setiap hari.
9. Seorang penjahit mempunyai bahan 30 meter wol dan 20 meter katun. Ia akan membuat setelan jas dan rok untuk dijual. Satu setel jas memerlukan 3 meter wol dan 1 meter katun, sedangkan untuk rok memerlukan 1 meter wol dan 2 meter katun. Keuntungan dari 1 setel jas Rp75.000,00 dan 1 setel rok Rp50.000,00.
10. Seorang pengusaha material hendak mengangkut 110 ton barang dari gudang A ke gudang B. Untuk keperluan ini sekurang-kurangnya diperlukan 50 kendaraan truk yang terdiri atas truk jenis 1 dengan kapasitas 3 ton dan truk jenis 2 dengan kapasitas 2 ton. Biaya sewa truk jenis 1 adalah Rp50.000,00 dan truk jenis 2 adalah Rp40.000,00.

E. Nilai Optimum dari Sistem Pertidaksamaan Linier

Setelah mempelajari materi pada kompetensi dasar ini, kalian diharapkan dapat:

- menentukan titik optimum dari daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linier, dan
- menentukan nilai optimum dari fungsi obyektif.

Nilai Optimum Fungsi Sasaran dari Daerah Sistem Pertidaksamaan Linier

Hal terpenting dalam masalah program linier adalah mengubah persoalan verbal ke dalam bentuk model matematika (persamaan atau pertidaksamaan) yang merupakan penyajian dari bahasa sehari-hari ke dalam bahasa matematika yang lebih sederhana dan mudah dimengerti.

Pada pembahasan dalam buku ini hanya menyajikan model matematika sederhana yang hanya melibatkan dua variabel dan penentuan nilai optimum dengan menggunakan *uji titik pojok.* Langkah-langkah yang ditempuh untuk mendapatkan nilai optimum adalah sebagai berikut.

a. Ubahlah persoalan verbal ke dalam model matematika (dalam bentuk sistem pertidaksamaan).
b. Tentukan Himpunan Penyelesaian (*daerah feasible*).
c. Tentukan semua titik-titik pojok pada daerah feasible tersebut
d. Hitung nilai bentuk objektif untuk setiap titik pojok dalam daerah feasible.
e. Dari hasil pada langkah d, nilai maksimum atau minimum dapat ditetapkan.

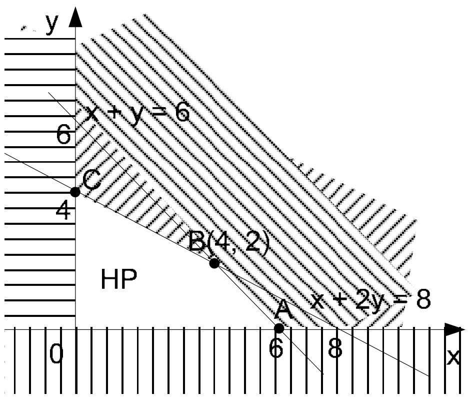
Contoh 14

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $Z = 5x + 3y$, dengan syarat:

$x + 2y \le 8$; $x + y \le 6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

Jawab:

Dengan cara seperti contoh sebelumnya, sistem pertidaksamaan tersebut mempunyai himpunan penyelesaian seperti tampak pada gambar 4-13 yang merupakan daerah tanpa arsiran.



Gambar 4-13 Daerah HP dari $x + 2y \le 8$; $x + y \le 6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

Himpunan Penyelesaian sistem pertidaksamaan berupa segi empat dengan titik pojok O, A, B dan C. Titik B dapat dicari dengan cara eliminasi/substitusi antara garis x + 2y = 8 dan x + y = 6, yaitu

$$\begin{array}{rl} x + 2y &= 8 \\ x + y &= 6 \quad - \\ \hline y &= 2 \end{array}$$

x + 2 = 6

x = 4, sehingga titik B(4, 2)

Kemudian diuji titik-titik pojoknya yang ditunjukkan pada tabel berikut

Titik	x	y	5x + 3y
O (0,0)	0	0	0
A (6,0)	6	0	30
B (4,2)	4	2	26
C (0,4)	0	4	12

Jadi, nilai maksimum adalah 30, terjadi untuk x = 6 dan y = 0. Sedangkan nilai minimum sama dengan 0 untuk x = 0 dan y = 0.

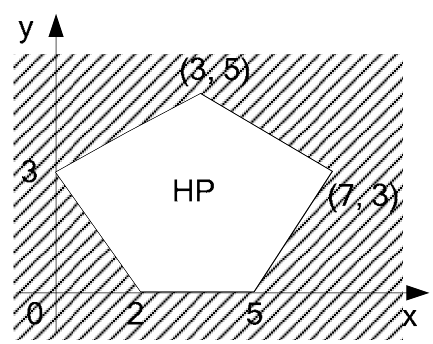
Contoh 15

Tentukan nilai maksimum dan minimum Z = 2x + 3y dari daerah *feasible* yang ditunjukkan pada gambar 4-14

Jawab:

Dengan menggunakan uji titik pojok nilai maksimum dan minimum dicari seperti ditunjukkan pada tabel di bawah ini

Titik	x	y	2x + 3y
(2, 0)	2	0	4
(5, 0)	5	0	10
(7, 3)	7	3	23
(3, 5)	3	5	21
(0, 3)	0	3	9



Gambar 4-14 Daerah *feasible* sistem pertidaksamaan

Dari tabel terlihat bahwa nilai maksimum adalah 23 terjadi pada titik (7, 3) dan nilai minimum 4 terjadi pada titik (2, 0).

Contoh 16

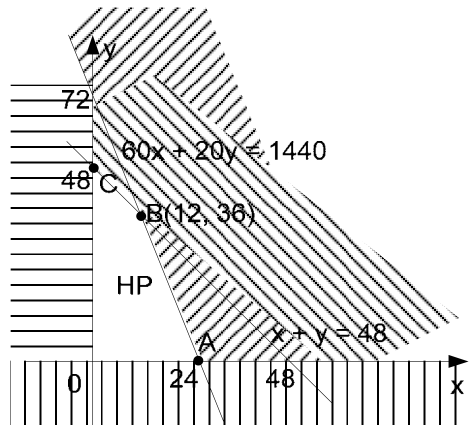
Sebuah pesawat terbang mempunyai kapasitas tempat duduk tidak lebih dari 48 orang. Setiap penumpang kelas utama dapat membawa bagasi seberat 60 kg dan kelas ekonomi 20 kg, sedangkan pesawat tersebut mempunyai kapasitas bagasi tidak lebih dari 1.440 kg. Apabila harga tiket untuk kelas utama dan ekonomi masing-masing adalah Rp1.000.000,00 dan Rp500.000,00 per orang, tentukan banyaknya penumpang setiap kelas agar hasil penjualan tiket maksimum.

Jawab:
Model matematika disusun dengan memisalkan
banyaknya penumpang kelas utama = x orang
banyaknya penumpang kelas ekonomi = y orang

Penumpang	Bagasi	Harga tiket
x	60 kg	1.000.000,00
y	20 kg	500.000,00
48	*1.440*	

Maksimumkan $Z = 1.000.000x + 500.000y$

Syarat daya tampung : $x + y \le 48$
Syarat kapasitas bagasi: $60x + 20y \le 1440$
$x \ge 0$; $y \ge 0$



Gambar 4-15 Daerah HP dari $x + y \le 48$; $2x + y \le 72$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

Dari model matematika di dapat daerah feasible OABC dengan titik B dicari seperti berikut

$$\begin{array}{r|c|r} 60x + 20y = 1440 & \times 1 & 60x + 20y = 1440 \\ x + y = 48 & \times 20 & 20x + 20y = 960 \\ \hline & & 40x = 480 \\ & & x = 12 \end{array}$$

$12 + y = 48$
$y = 36$ koordinat titik B(12, 36)

Uji titik-titik pojok, yaitu titik-titik O, A, B, dan C.

Titik	x	y	1.000.000x + 500.000y
O (0,0)	0	0	0
A (24,0)	24	0	24.000.000
B (12,36)	12	36	30.000.000
C (0,48)	0	48	24.000.000

Nilai maksimum Z adalah Rp30.000.000,00 dipenuhi oleh x = 12 dan y = 36, atau dengan kata lain penjualan tiket akan maksimum jika banyaknya penumpang kelas utama sebanyak 12 orang dan kelas ekonomi 36 orang.

Contoh 17
Kebutuhan gizi minimum tiap pasien suatu rumah sakit per harinya adalah 150 unit kalori dan 130 unit protein. Apabila dalam tiap kilogram daging mengandung 500 unit kalori dan 200 unit protein, sedangkan setiap ikan basah mengandung 300 unit kalori dan 400 protein dengan harga masing-masing kilogramnya adalah Rp40.000,00 dan Rp20.000,00. Tentukan biaya minimum untuk kebutuhan 100 pasien tiap harinya pada rumah sakit tersebut.

Jawab:
Model matematika disusun dengan memisalkan
Banyaknya daging sapi perharinya = x kg
Banyaknya ikan basah perharinya = y kg

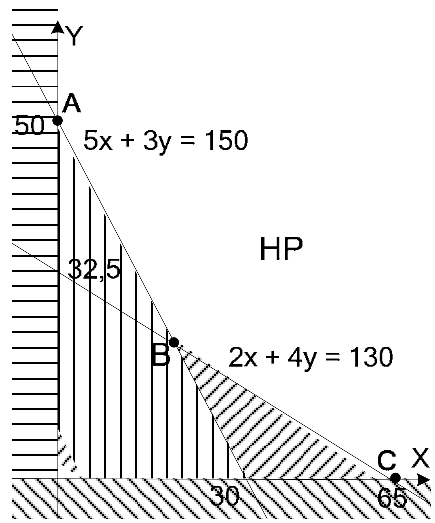
Banyaknya	Kalori	Protein	Harga
x	500/kg	200/kg	40.000
y	300/kg	400/kg	20.000
	150/orang	*130/orang*	

Meminimumkan biaya, $Z = 40.000x + 20.000y$
Syarat kalori 100 orang, $500x + 300y \geq 15.000 \Rightarrow 5x + 3y \geq 150$
Syarat protein 10 orang, $200x + 400y \geq 13.000 \Rightarrow 2x + 4y \geq 130$
$x \geq 0;\ y \geq 0$

Dari model matematika didapat daerah *feasible* ABC (daerah tak terarsir) pada gambar 4-16 dengan titik B dicari seperti berikut

$$\begin{array}{l|l|l} 5x + 3y = 150 & x2 & 10x + 6y = 300 \\ \underline{2x + 4y = 130} & x5 & \underline{10x + 20y = 650}\ - \\ & & -14y = -350 \\ & & \quad y = 25 \end{array}$$

$2x + 4(25) = 130$
$x = 15$ koordinat titik B(15, 25)



Gambar 4-16
Daerah HP dari $5x + 3y \leq 150$; $x + 2y \leq 65$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

Uji titik-titik pojok, yaitu titik-titik A, B dan C.

Titik	x	y	30.000x + 20.000y
A (0, 50)	0	50	1.000.000
B (15, 25)	15	25	950.000
C (65, 0)	65	0	1.950.000

Jadi, biaya minimum tiap hari untuk 100 pasien adalah Rp950.000,00 yaitu untuk 15 kg daging dan 25 kg ikan perharinya.

Contoh 18

Suatu perusahaan mengeluarkan sejenis barang yang diperoduksi dalam tiga ukuran, yaitu ukuran besar, ukuran sedang dan ukuran kecil. Ketiga ukuran itu dihasilkan dengan menggunakan mesin I dan mesin II . Mesin I setiap hari menghasilkan 1 ton ukuran besar, 3 ton ukuran sedang dan 5 ton ukuran kecil. Mesin II setiap hari menghasilkan masing-masing ukuran sebanyak 2 ton. Perusahaan itu bermaksud memperoduksi paling sedikit 80 ton ukuran besar, 160 ton ukuran sedang dan 200 ton ukuran kecil. Bila biaya operasi mesin I adalah Rp500.000,00 tiap hari dan mesin II adalah Rp400.000,00 tiap hari. Dalam berapa hari masing-masing mesin bekerja untuk pengeluaran biaya sekecil-kecilnya dan berapa biaya tersebut.

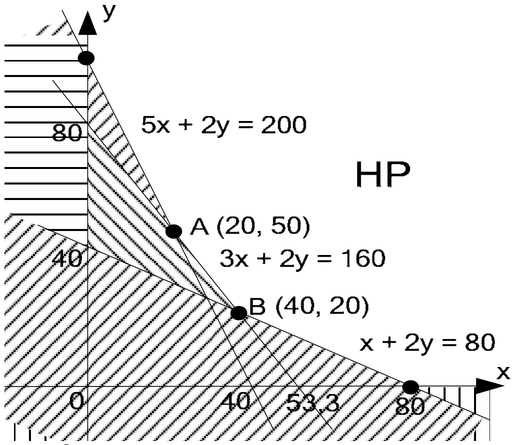
Jawab:
Model matematika disusun dengan memisalkan:
Jumlah hari kerja mesin I adalah x
Jumlah hari kerja mesin II adalah y

Dengan menggunakan tabel diperoleh sebagai berikut

	Mesin I(x)	Mesin II(y)	Persediaan
Ukuran besar	1 ton	2 ton	80 ton
Ukuran sedang	3 ton	2 ton	160 ton
Ukuran kecil	5 ton	2 ton	200 ton

Fungsi objektifnya $Z = 500.000x + 400.000y$
Syarat ukuran besar $x + 2y \geq 80$
Syarat ukuran sedang $3x + 2y \geq 160$
Syarat ukuran kecil $5x + 2y \geq 200$

Dengan cara seperti contoh sebelumnya, sistem pertidaksamaan tersebut mempunyai himpunan penyelesaian seperti tampak pada gambar 4-17 yang merupakan daerah tanpa arsiran



Gambar 4-17 Daerah HP dari $x + 2y \geq 80$; $3x + 2y \geq 160$; $5x + 2y \geq 200$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

Titik A ditentukan dengan cara eliminasi atau substitusi persamaan garis $3x + 2y = 160$ dan $5x + 2y = 200$ diperoleh $x = 20$ dan $y = 50$.
Titik B ditentukan dengan cara eliminasi atau substitusi persamaan garis $3x + 2y = 160$ dan $x + 2y = 80$ diperoleh $x = 40$ dan $y = 20$
Dari daerah penyelesaian di samping, maka dapat disimpulkan bahwa daerah penyelesaian tersebut tidak memiliki nilai maksimum.

Uji titik pojok, yaitu koordinat (0, 100), A(20, 50), B(40, 20), dan (80, 0), yaitu:

Titik	x	y	500.000x + 400.000y
(0, 100)	0	100	40.000.000
A(20, 50)	20	50	30.000.000
B(40, 20)	40	20	28.000.000
(80, 0)	80	0	40.000.000

Jadi, untuk biaya minimum, mesin I bekerja 40 hari dan mesin II 20 hari dengan biaya minimum sebesar Rp28.000.000,00

F. Rangkuman Nilai Optimum dari Sistem Pertidaksamaan Linier

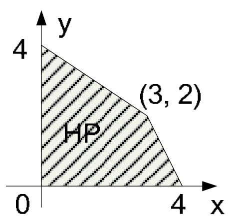
Langkah-langkah yang ditempuh untuk mendapatkan nilai optimum dari soal verbal adalah sebagai berikut,

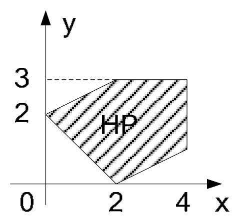
a. Ubahlah persoalan verbal ke dalam model matematika (dalam bentuk sistem pertidaksamaan).
b. Tentukan himpunan penyelesaian (daerah *feasible*).
c. Tentukan semua titik-titik pojok pada daerah *feasible* tersebut.
d. Hitung nilai bentuk objektif untuk setiap titik pojok dalam daerah *feasible*.
e. Dari hasil pada langkah d, nilai maksimum atau minimum dapat ditetapkan.

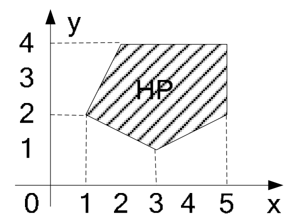
LATIHAN 3

1. Untuk soal-soal berikut, tentukan nilai x dan y yang memberikan nilai optimum serta nilai maksimum atau minimum dari bentuk objektif tersebut dengan menggunakan metode titik pojok.
   a. $5x + 2y \leq 30$; $x + 2y \leq 10$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; bentuk objektif $Z = 3x + 2y$.
   b. $x + y \leq 6$; $x + 3y \leq 6$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; bentuk objektif $Z = 20x + 30y$.
   c. $x + 2y \leq 8$; $3x + 2y \leq 12$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; bentuk objektif $Z = x + y$.
   d. $x + 2y \leq 8$; $x + 2y \leq 10$; $0 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq 6$; bentuk objektif $Z = 2x + 3y$.
   e. $5x + 10y \leq 50$; $x + y \geq 1$; $y \leq 4$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; bentuk objektif $Z = 2x + y$.

2. Tentukan nilai maksimum dan minimum $z = 3x + 4y$ dari daerah feasible berikut ini

a.


b.


c.


3. Suatu jenis roti membutuhkan 150 gram tepung dan 50 gram mentega, sedangkan jenis yang lain membutuhkan 75 gram tepung dan 75 gram mentega. Bahan yang tersedia adalah 26,25 kg tepung dan 16,25 kg metega. Keuntungan yang diperoleh dari hasil penjualan roti jenis pertama dan kedua masing-masing Rp500,00 dan Rp600,00. Tentukan tiap-tiap jenis roti yang harus dibuat supaya didapat hasil keuntungan yang maksimum.

4. Seorang pemborong merencanakan membangun 2 tipe rumah dengan ukuran T.50 dan T.70. Untuk itu, ia meminta uang muka masing-masing 1 juta untuk rumah T.50 dan 2 juta untuk T.70 dan ia mengharapkan uang muka yang masuk paling sedikit 250 juta rupiah dari paling sedikit 150 buah rumah yang hendak dibangunnya. Biaya pembuatan tiap rumah adalah 50 juta untuk T.50 dan 75 juta untuk T.70. Tentukan biaya minimal yang harus disediakan untuk membangun rumah-rumah tersebut.

5. Untuk mengangkut 60 ton barang ke tempat penyimpanan diperlukan alat pengangkut. Untuk keperluan itu disewa dua jenis truk, yaitu jenis I dengan kapasitas 3 ton dan jenis II dengan kapasitas 2 ton. Sewa tiap truk jenis I adalah Rp50.000,00 sekali jalan dan Rp40.000,00 untuk jenis II. Ia diharuskan menyewa truk itu sekurang-kurangnya 24 buah. Berapakah banyaknya tiap jenis truk yang harus disewa agar biaya yang dikeluarkan sekecil-kecilnya dan tentukan biaya minimum tersebut?

6. Seorang pemborong mempunyai persediaan cat warna cokelat 100 kaleng dan abu-abu 240 kaleng. Pemborong tersebut mendapat tawaran untuk mencat ruang tamu dan ruang tidur di suatu gedung. Setelah dikalkulasi ternyata 1 ruang tamu menghabiskan 1 kaleng cat warna cokelat dan 3 kaleng warna abu-abu. Sedang 1 ruang tidur menghabiskan 2 kaleng cat warna cokelat dan 2 kaleng warna abu-abu. Biaya yang ditawarkan pada pemborong setiap ruang tamu Rp30.000,00 dan

tiap ruang tidur Rp25.000,00. Berapakah pendapatan maksimum yang dapat diterima pemborong?

7. Pengusaha logam membuat logam campuran sebagai berikut.
   Logam I terdiri atas baja, besi, dan aluminium dengan perbandingan 2 : 2 : 1.
   Logam II terdiri atas baja, besi, dan aluminium dengan perbandingan 4 : 3 : 3.
   Sedangkan baja, besi dan aluminium hanya tersedia 128 ton, 120 ton dan 90 ton. Logam I dijual dengan harga Rp1.500.000,00 per ton dan logam II dijual dengan harga Rp2.500.000,00 per ton. Tentukan berapa ton logam I dan logam II yang harus diproduksi supaya mendapatkan hasil maksimum dan berapakah hasil maksimum tersebut.

8. Seorang petani menghadapi suatu masalah sebagai berikut.
   Agar sehat, setiap sapi harus diberi makanan yang mengandung paling sedikit 27, 21, dan 30 satuan unsur nutrisi jenis P, Q, dan R setiap harinya. Dua jenis makanan I dan makanan II diberikan kepada sapi tersebut. Satu kg jenis makanan I mengandung unsur nutrisi jenis P, Q, dan R masing-masing sebesar 3, 1, dan 1 satuan. Sedangkan satu kg jenis makanan II mengandung unsur nutrisi jenis P, Q, dan R masing-masing sebesar 1, 1, dan 2 satuan. Harga satu kg makanan I dan makanan II adalah Rp60.000,00 dan Rp40.000,00. Petani tersebut harus memutuskan apakah hanya membeli satu jenis makanan saja atau kedua-duanya kemudian mencampurnya, agar petani tersebut mengeluarkan uang sekecil mungkin. Buatlah model matematika dari persoalan di atas, kemudian tentukan besarnya pengeluaran petani tersebut.

9. Seorang pedagang paling sedikit menyewa 25 kendaraan untuk jenis truk dan colt dengan jumlah yang diangkut 224 karung. Truk dapat mengangkut 14 karung dan colt 8 karung. Ongkos sewa truk Rp100.000,00 dan colt Rp75.000,00 tentukan jumlah kendaraan masing-masing yang harus disewa agar ongkos minimal dan tentukan pula ongkos minimumnya.

10. Sebuah rumah sakit untuk merawat pasiennya, setiap hari membutuhkan paling sedikit 150.000 unit kalori dan 130.000 unit protein. Setiap kg daging sapi mengandung 500 unit kalori dan 200 unit protein, sedangkan setiap kg ikan segar mengandung 300 unit kalori dan 400 unit protein. Harga per kg daging sapi dan ikan segar masing-masing Rp40.000,00 dan Rp30.000,00. Tentukan berapa kg daging sapi dan ikan segar yang harus disediakan rumah sakit supaya mengeluarkan biaya sekecil mungkin.

G. Garis Selidik

Setelah mempelajari materi pada kompetensi dasar ini, kalian diharapkan dapat:
- menjelaskan pengertian garis selidik,
- membuat garis selidik menggunakan fungsi obyektif, dan
- menentukan nilai optimum menggunakan garis selidik.

Garis selidik adalah suatu garis yang digunakan untuk menyelidiki nilai optimum (maksimum atau minimum) yang diperoleh dari fungsi sasaran atau fungsi objektif.

Nilai optimum (maksimum dan minimum) bentuk objektif dari himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan selain dengan menggunakan metode titik pojok dapat juga dicari dengan menggunakan *garis selidik*. Langkah-langkah yang diperlukan untuk mencari nilai optimum dengan menggunakan metode garis selidik adalah sebagai berikut

a. Buatlah garis ax + by = k, dimana ax + by merupakan bentuk objektif yang dicari nilai optimumnya. Untuk mempermudah, ambil k = ab.

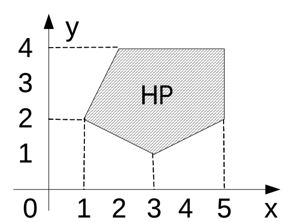
b. Buatlah garis-garis sejajar ax + by = k, yaitu dengan cara mengambil k yang berbeda atau menggeser garis ax + by = k ke kiri atau ke kanan.

   i) Jika $ax + by = k_1$ adalah garis yang paling kiri pada daerah penyelesaian yang melalui titik (x_1, y_1), maka $k_1 = ax_1 + by_1$ merupakan nilai minimum.

   ii) Jika $ax + by = k_2$ adalah garis yang paling kanan pada daerah penyelesaian yang melalui titik (x_2, y_2), maka $k_2 = ax_2 + by_2$ merupakan nilai maksimum bentuk objektif tersebut.

Contoh 19

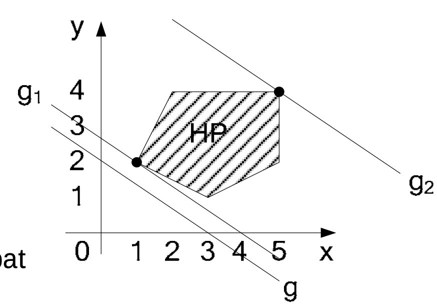
Dengan menggunakan garis selidik, tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi objektif z = 2x + 3y pada daerah feasible yang ditunjukkan pada gambar 4-18



Gambar 4-18 Daerah *feasible* Sistem pertidaksamaan

Untuk menentukan maksimum dan minimum yang pertama dilakukan adalah dengan membuat persamaan garis dari fungsi objektif yang diketahui yaitu 2x + 3y = 6 = k, dan dinamai dengan garis g.

Perhatikan Gambar 4-19. Geserlah garis g sehingga memotong daerah *feasible* di titik yang paling kiri, yaitu garis g_1 yang merupakan garis yang sejajar dengan garis g dan tepat melalui titik (1, 2). Dengan demikian nilai minimum Z adalah $k_1 = 2(1) + 3(2) = 8$. Sedangkan garis g_2 merupakan garis yang paling kanan dan tepat melalui titik (5, 4). Dengan demikian nilai maksimum Z adalah $k_2 = 2(5) + 3(4) = 22$.



Gambar 4-19 titik optimum dengan garis selidik

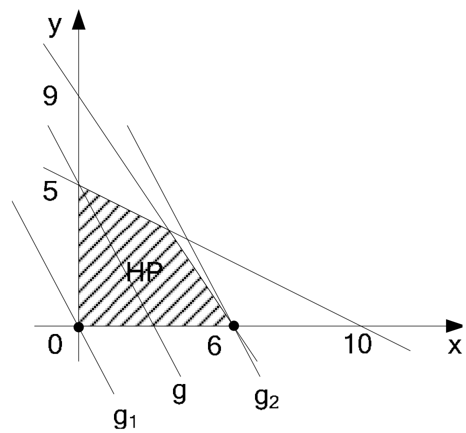
Contoh 20

Tentukan nilai maksimum dan minimum z = 5x + 3y dari daerah *feasible* yang dibatasi oleh $3x + 2y \leq 18$; $x + 2y \leq 10$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x, y \in R$

Jawab:

Persamaan garis dari fungsi objektif yang diketahui, yaitu 5x + 3y = 15 = k, dan dinamai dengan garis g.

Perhatikan gambar 4-20 yang merupakan daerah *feasible* (daerah terarsir) dari sistem pertidaksamaan yang diketahui.
Geserlah garis g, sehingga memotong daerah feasible di titik yang paling kiri, yaitu garis g_1 yang merupakan garis yang sejajar dengan garis g dan tepat melalui titik (0, 0). Nilai minimum Z adalah $k_1 = 5(0) + 3(0) = 0$.
Sedangkan garis g_2 merupakan garis yang paling kanan dan tepat melalui titik (6, 0), sehingga nilai maksimum Z adalah
$k_2 = 5(6) + 3(0) = 30$.



Gambar 4-20 Nilai maksimum daerah *feasible* dengan garis selidik

Contoh 21

Sebuah perusahaan PT Usaha Rotanindo di Cirebon memproduksi dua jenis mebel rotan, yaitu jenis mebel kursi dan meja. Kapasitas produksi perusahaan itu tidak kurang dari 1000 unit barang per bulan. Dari bagian marketing diperoleh informasi bahwa dalam tiap bulan terjual tidak lebih dari 600 unit untuk jenis kursi dan 700 unit untuk jenis meja. Keuntungan yang diperoleh untuk tiap unit kursi adalah Rp50.000,00 dan meja sebesar Rp40.000,00. Berapakah banyaknya mebel jenis kursi dan meja yang harus diproduksi agar keuntungan yang diperoleh sebesar-besarnya?

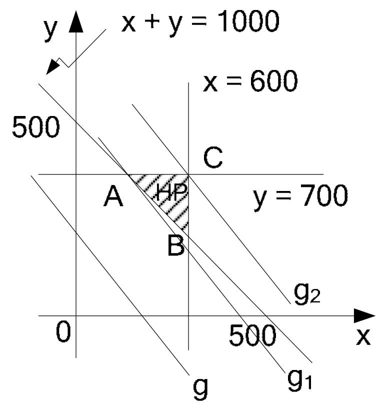
Jawab:

Model matematika disusun dengan memisalkan
banyaknya mebel kursi yang terjual = x unit
banyaknya meja yang terjual = y unit

Banyaknya	penjualan	Keuntungan
x	600	50.000
y	700	40.000
1.000		

Memaksimumkan keuntungan Z = 50.000x + 40.000y
Syarat produksi $x + y \geq 1.000$
Syarat penjualan $x \leq 600$, $y \leq 700$
$x \geq 0$; $y \geq 0$

Perhatikan gambar 4-21 yang merupakan daerah *feasible* (daerah terarsir) dari sistem model matematika yang diketahui.
Geserlah garis g, sehingga memotong daerah feasible di titik yang paling kiri, yaitu garis g_1 dan tepat melalui titik B(300, 700).
Nilai minimum Z adalah
k_1 = 50.000(300) + 40.000(700) = 43.000.000
Sedangkan garis g_2 merupakan garis yang paling kanan dan tepat melalui titik (600, 700), sehingga nilai maksimum Z adalah
k_2 = 50.000(600) + 40.000(700) = 58.000.000



Gambar 4-21
Nilai maksimum daerah *feasible* dengan garis selidik

H. Rangkuman Garis Selidik

1. Garis selidik adalah suatu garis yang digunakan untuk menyelidiki nilai optimum (maksimum atau minimum) yang diperoleh dari fungsi sasaran atau fungsi obyektif.

2 Langkah-langkah yang diperlukan untuk mencari nilai optimum dengan menggunakan metode garis selidik adalah sebagai berikut:
   a. Buatlah garis ax + by = k, dimana ax + by merupakan bentuk objektif yang dicari nilai optimumnya. Untuk mempermudah, ambil k = ab.
   b. Buatlah garis-garis sejajar ax + by = k yaitu dengan cara mengambil k yang berbeda atau menggeser garis ax + by = k ke kiri atau ke kanan.

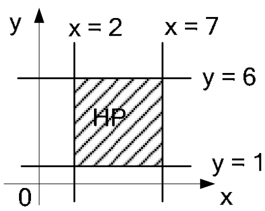
      i) Jika ax + by = k_1 adalah garis yang paling kiri pada daerah penyelesaian yang melalui titik (x_1, y_1) maka $k_1 = ax_1 + by_1$ merupakan nilai minimum.

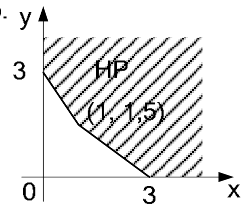
      ii) Jika ax + by = k_2 adalah garis yang paling kanan pada daerah penyelesaian yang melalui titik (x_2, y_2) maka $k_2 = ax_2 + by_2$ merupakan nilai maksimum bentuk objektif tersebut.

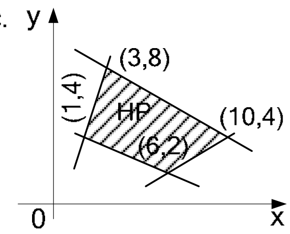
LATIHAN 4

1. Untuk soal-soal berikut, tentukan nilai x dan y yang memberikan nilai optimum serta nilai maksimum atau minimum dari bentuk objektif tersebut dengan menggunakan metode garis selidik.
   a. $x + y \le 5$; $x + 2y \le 8$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; bentuk objektif Z = 2x + y
   b. $5x + 2y \le 10$; $x + 2y \le 6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; bentuk objektif Z = x + 2y
   c. $x + 2y \le 10$; $2x + y \le 12$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; bentuk objektif Z = 3x + 2y
   d. $3x + 2y \ge 12$; $x + 5y \ge 10$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; bentuk objektif Z = 4x + 3y
   e. $2x + y \ge 6$; $x + y \ge 5$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; bentuk objektif Z = x + 2y

2. Tentukan nilai maksimum dan minimum $z = 4x + 5y$ dari daerah *feasible* berikut.

a.


b.


c.


3. Suatu jenis roti membutuhkan 150 gram tepung dan 50 gram mentega, sedangkan jenis yang lain membutuhkan 75 gram tepung dan 75 gram mentega. Bahan yang tersedia adalah 9 kg tepung dan 6 kg mentega. Keuntungan yang diperoleh dari hasil penjualan roti jenis pertama dan kedua masing-masing Rp400,00 dan Rp500,00. Tentukan tiap-tiap jenis roti yang harus dibuat supaya didapat hasil keuntungan yang maksimum dan tentukan pula keuntungan maksimum tersebut.

4. Sebuah toko sepeda menyediakan dua jenis sepeda, yaitu sepeda dengan stang dan tanpa stang yang masing-masing harganya Rp400.000,00 dan Rp500.000,00. Kapasitas toko tersebut tidak lebih dari 50 buah sepeda. Keuntungan dari setiap penjualan sepeda dengan stang dan tanpa stang masing-masing Rp60.000,00 dan Rp40.000,00. Modal yang dimiliki pemilik toko sebesar Rp23.000.000,00. Tentukanlah:
   a. banyaknya masing-masing jenis sepeda yang harus disediakan agar diperoleh keuntungan yang sebanyak-banyaknya.
   b. berapakah keuntungan maksimum tersebut.

5. Pengembang rumah sederhana menyediakan rumah tipe 21 dan tipe 36 dengan harga jual masing-masing Rp30.000.000,00 dan Rp45.000.000,00. Luas tanah yang diperlukan untuk membangun tipe 21 adalah 60 m^2 dan tipe 36 adalah 72 m^2. Sedangkan lahan yang tersedia 20.400 m^2. Biaya untuk membangun rumah-rumah tersebut berasal dari kredit suatu bank swasta yang besarnya tidak lebih dari Rp12.000.000.000,00. Apabila diharapkan keuntungan sebesar Rp2.250.000,00 untuk tiap unit penjualan tipe 21 dan Rp3.000.000,00 untuk tipe 36, tentukanlah:
   a. banyaknya masing-masing rumah yang harus dibangun agar diperoleh keuntunga yang sebesar-besarnya.
   b. keuntungan maksimum tersebut.

Uji Kemampuan

A. Soal Pilihan Ganda

Pilihlah salah satu jawaban a, b, c, d, atau e yang dianggap benar.

1. Sebuah hotel mempunyai dua tipe kamar yang masing-masing berdaya tampung 3 orang dan 2 orang. Jika jumlah kamar seluruhnya 32 kamar dan daya tampung keseluruhan 84 orang, maka banyaknya kamar yang berdaya tampung 2 orang adalah . . . .

   a. 6 c. 14 e. 20
   b. 12 d. 16

2. Seorang pemborong pengecatan rumah mempunyai persediaan 80 kaleng cat warna putih dan 60 kaleng warna abu-abu. Pemborong tersebut mendapat tawaran untuk mengecat ruang tamu dan ruang tidur. Setelah dihitung ternyata 1 ruang tamu menghabiskan 2 kaleng cat putih dan 1 kaleng abu-abu. Sedangkan ruang tidur menghabiskan masing-masing 1 kaleng. Jika banyaknya ruang tamu dinyatakan dengan x dan ruang tidur dengan y, maka model matematika dari pernyataan di atas adalah . . . .
   a. $2x + y \leq 80$; $x + y \leq 60$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   b. $x + y \leq 80$; $2x + y \geq 60$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   c. $x + y \leq 80$; $2x + y \leq 60$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   d. $2x + y \geq 80$; $x + y \leq 60$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   e. $2x + y \leq 80$; $x + y \geq 60$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

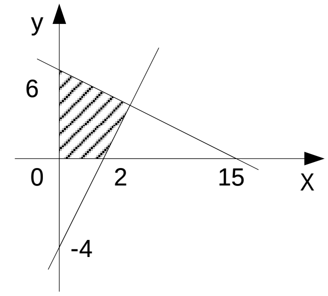
3. Daerah penyelesaian model matematika yang ditunjukkan oleh sistem pertidaksamaan:
   $5x + 2y \leq 20$; $7x + 10y \leq 70$
   $2x + 5y \geq 20$;
   $x \geq 0$; $y \geq 0$
   adalah daerah yang ditunjukkan oleh . . . .

   a. I c. III e. V
   b. II d. IV

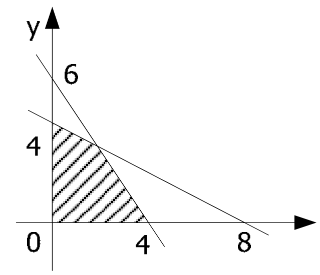
4. Nilai minimum fungsi objektif $f(x, y) = 4x + 3y$ dari sistem pertidaksamaan $2x + y \geq 11$; $x + 2y \geq 10$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ adalah . . . .
   a. 15 c. 25 e. 40
   b. 22 d. 33

5. Suatu pesawat mempunyai tempat duduk tidak lebih dari 48 penumpang. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi 60 kg sedangkan kelas ekonomi 20 kg. Pesawat itu hanya dapat membawa bagasi 1.440 kg. Bila x dan y berturut-turut menyatakan banyaknya penumpang kelas utama dan ekonomi, maka model matematika dari persoalan di atas adalah . . . .
   a. $x + y \leq 48$; $3x + y \geq 72$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   b. $x + y \leq 48$; $x + 3y \leq 72$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   c. $x + y \leq 48$; $3x + y \leq 72$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   d. $x + y \geq 48$; $x + 3y \geq 72$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   e. $x + y \geq 48$; $x + 3y > 72$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

6. Daerah yang diarsir dari gambar di samping adalah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan . . . .
   a. $5x + 3y \leq 30$; $x - 2y \geq 4$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   b. $5x + 3y \leq 30$; $x - 2y \leq 4$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   c. $5x + 2y \leq 30$; $2x - y \leq 4$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   d. $2x + 5y \leq 30$; $2x - y \leq 4$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   e. $5x + 3y \leq 30$; $x - 2y \leq 4$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

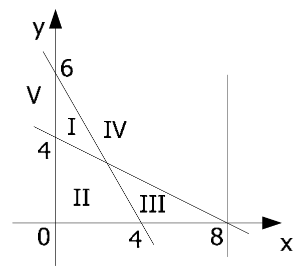


7. Daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah himpunan penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan. Nilai maksimum untuk $5x + 4y$ dari daerah penyelesaian tersebut adalah . . . .
   a. 16 c. 20 e. 24
   b. 18 d. 22



8. Seorang penjual buah-buahan yang menggunakan gerobak mempunyai modal Rp1.000.000,00. Ia telah membeli jeruk dengan harga Rp4.000,00 per kg dan pisang Rp1.600,00 per kg. Banyaknya jeruk yang dibeli x kg dan pisang y kg. Sedangkan muatan gerobak tidak dapat melebihi 400 kg sehingga sistem pertidaksamaan yang memenuhi permasalahan di atas adalah . . . .
   a. $5x + 4y \leq 2.500$; $x + y \leq 400$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   b. $5x + 4y \leq 1.250$; $x + y \leq 400$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   c. $5x + 2y \leq 1.250$; $x + y \leq 400$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   d. $5x + 4y \leq 1.200$; $x + y \leq 400$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
   e. $5x + y \leq 750$; $x + y \leq 400$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

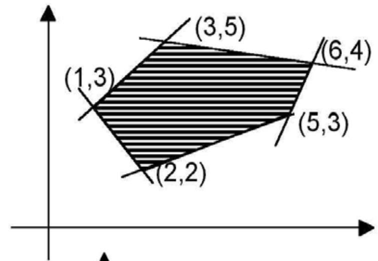
9. Daerah penyelesaian model matematika yang ditunjukkan sistem pertidaksamaan
   $3x + 2y \geq 12$; $x + 2y \leq 8$; $0 \leq x \leq 8$; $y \geq 0$
   adalah daerah yang ditunjukkan oleh . . . .
   a. I c. III e. V
   b. II d. IV



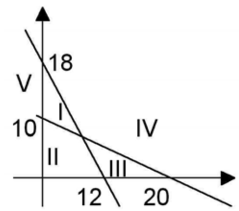
10. Pak Daud membeli es krim jenis I dengan harga per buah Rp500,00 dan jenis II Rp400,00. Lemari es yang dipunyai untuk menyimpan es tersebut tidak dapat memuat lebih dari 300 buah, sementara uang yang dimiliki Pak Daud adalah Rp140.000,00. Jika es krim tersebut dijual kembali dengan mengambil untung masing-masing jenis Rp100,00 per buah, maka banyaknya es krim jenis I dan II yang dijual Pak Daud jika terjual seluruhnya dan mendapat untung yang sebesar-besarnya, masing-masing adalah. . . .
    a. 200 dan 100 c. 100 dan 200 e. 50 dan 250
    b. 150 dan 150 d. 75 dan 225

11. Tempat parkir seluas 360 m^2 dapat menampung tidak lebih dari 30 kendaraan. Untuk parkir sebuah sedan diperlukan rata-rata 6 m^2 dan sebuah bus 24 m^2. Jika banyaknya sedan dinyatakan dalam x dan bus y, maka model matematika dari pernyataan di atas adalah . . . .
    a. $x + y \leq 30$; $x + 4y \leq 60$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
    b. $x + y < 30$; $x + 4y < 60$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
    c. $x + y \leq 30$; $4x + y < 60$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
    d. $x + y < 30$; $4x + y < 60$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
    e. $x + y \leq 30$; $4x + y \leq 60$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

12. Daerah yang diarsir pada gambar di samping merupakan penyelesaian sistem pertidaksamaan linier. Nilai maksimum fungsi objektif f(x,y) = x + 3y adalah . . . .
    a. 8 c. 14 e. 22
    b. 10 d. 18



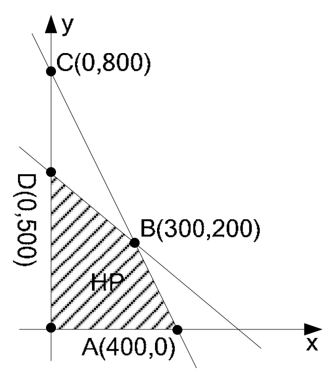
13. Daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $3x + 2y \leq 36$; $x + 2y \geq 20$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ Pada gambar di samping adalah . . . .
    a. I c. III e. V
    b. II d. IV



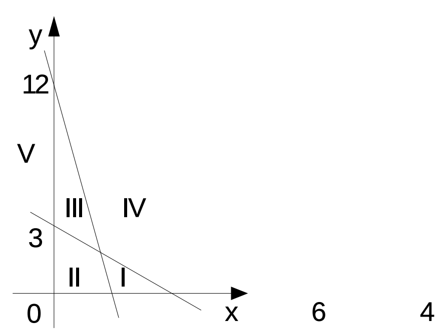
14. Dengan persediaan kain polos 20 m dan kain bergaris 10 m seorang penjahit akan membuat pakaian jadi. Model I memerlukan 1 m kain polos dan 1,5 m kain bergaris, model II memerlukan 2 m kain polos dan 0,5 kain bergaris. Jumlah total pakaian jadi akan maksimum, jika model I dan II masing-masing . . . .
    a. 4 dan 8 c. 6 dan 4 e. 7 dan 5
    b. 5 dan 9 e. 8 dan 8

15. Nilai maksimum dari bentuk objektif f(x,y) = x + 3y pada himpunan penyelesaian pertidaksamaan $2x + y \leq 8$; $x + 2y \geq 7$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ adalah . . . .
    a. 4 c. 16 e. 24
    b. 12 d. 18

16. Daerah yang diarsir adalah himpunan penyelesaian permasalahan program linier. Nilai maksimum dari z = 40x + 30y adalah . . . .
    a. 15.000
    b. 16.000
    c. 18.000
    d. 20.000
    e. 24.000



17. Daerah yang memenuhi pertidaksamaan $x + 2y \leq 6$; $3x + y \geq 12$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ adalah . . . .
    a. I d. IV
    b. II e. V
    c. III



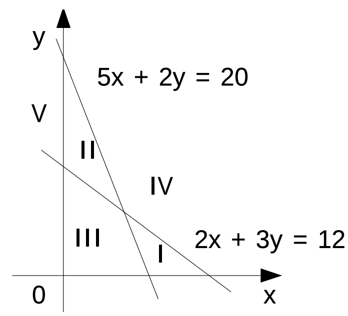
18. Seorang pemborong mempunyai persediaan cat warna cokelat 100 kaleng dan warna abu-abu 240 kaleng. Pemborong tersebut mendapat tawaran untuk mencat

ruang tamu dan ruang tidur suatu gedung. Setelah dikalkulasi ternyata 1 ruang tamu menghabiskan 1 kaleng cat warna cokelat dan 3 kaleng cat warna abu-abu. Sedangkan ruang tidur menghabiskan 2 kaleng cat warna cokelat dan 3 kaleng cat warna abu-abu. Jika biaya yang ditawarkan pemborong setiap ruang tamu Rp30.000,00 dan ruang tidur Rp25.000,00, maka biaya maksimum yang diterima pemborong adalah . . . .

a. Rp1.250.000,00 c. Rp2.400.000,00 e. Rp3.100.000,00
b. Rp2.300.000,00 d. Rp3.000.000,00

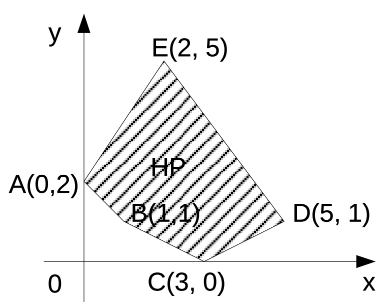
19. Nilai minimum fungsi objektif Z = 3x + 4y yang memenuhi sistem pertidaksamaan: $2x + 3y \geq 12$; $5x + 2y \geq 19$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ adalah . . . .
a. 38 c. 18 e. 15
b. 32 d. 17

20. Daerah penyelesaian model matematika dari sistem Pertidaksamaan $2x + 3y \geq 12$; $5x + 2y \geq 19$ $x \geq 0$; $y \geq 0$ ditunjukkan oleh grafik disamping pada angka . . . .
a. I c. III e. V
b. II d. IV



21. Sebuah perusahaan bola lampu menggunakan 2 jenis mesin. Untuk membuat bola lampu jenis A memerlukan waktu 3 menit pada mesin I dan 5 menit pada mesin II. Bola lampu jenis B memerlukan waktu 2 menit pada mesin I dan 7 menit pada mesin II. Jika mesin I bekerja 1.820 menit dan mesin II bekerja 4.060 menit, maka model matematika dari permasalahan di atas adalah . . . .
a. $3x + 5y \leq 1.820$, $2x + 7y \leq 4.060$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
b. $3x + 7y \leq 1.820$, $2x + 2y \leq 4.060$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
c. $3x + 5y \leq 4.060$, $2x + 7y \leq 1.820$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
d. $3x + 2y \leq 1.820$, $5x + 7y \leq 4.060$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
e. $3x + 7y \leq 4.060$, $2x + 5y \leq 1.820$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

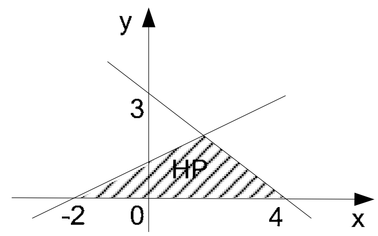
22. Daerah yang diarsir adalah daerah himpunan penyelesaian permasalahan program linier. Nilai minimum dari fungsi z = 2x + 5y adalah . . . .
a. 6 c. 10 e. 29
b. 7 d. 15



23. Nilai maksimum bentuk objektif x + 3y pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \geq 7$, dan $2x + y \leq 8$, adalah . . . .
a. 20 c. 28 e. 33

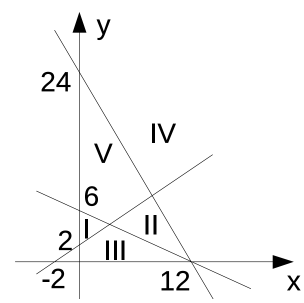
b. 24 d. 30

24. Daerah yang diarsir pada gambar di samping merupakan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan . . . .



a. $x - 2y \geq -2$, $3x + 4y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
b. $x - 2y \leq -2$, $3x + 4y \geq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
c. $-2x + y \geq -2$, $4x + 3y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
d. $-2x + y \leq -2$, $4x + 3y \geq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
e. $x - 2y \leq -2$, $3x + 4y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

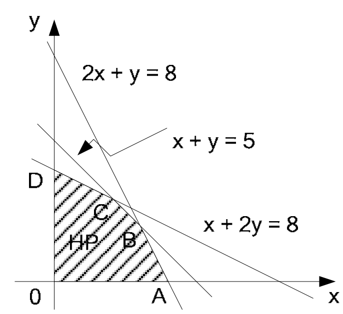
25. Perhatikan gambar di samping, yang merupakan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut $2x + y \leq 24$; $x + 2y \geq 12$; $x - y \geq -2$, $x \geq 0$; $y \geq 0$ adalah daerah . . . .



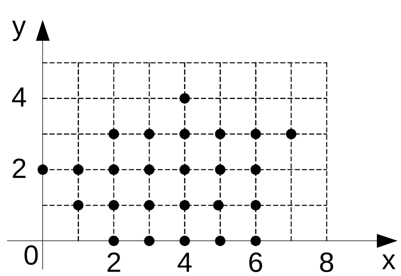
a. I c. III e. V
b. II d. IV

26. Nilai maksimum $Z = 3x + 4y$ dari daerah *feasible* pada gambar di bawah ini terjadi di titik . . . .

a. O
b. A
c. B
d. C
e. D



27.

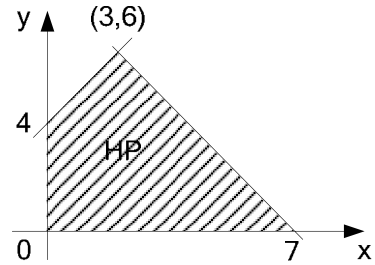


Titik-titik pada gambar di samping merupakan grafik himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan. Nilai maksimum dari $z = 3x + 5y$ adalah . . . .

a. 10 c. 32 e. 44
b. 18 d. 36

28. Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan ditunjukkan pada gambar di samping (daerah terarsir). Sistem pertidaksamaan dari daerah *feasible* tersebut adalah . . . .

a. $3x + 2y \leq 21$, $-2x + 3y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
b. $2x + 3y \leq 21$, $-2x - 3y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
c. $-3x + 2y \geq 21$, $-2x + 3y \geq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
d. $-3x - 2y \geq 21$, $2x + 3y \geq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
e. $3x - 2y \geq 21$, $2x - 3y \geq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$



29. Seorang pedagang kue mempunyai persediaan 9 kg tepung dan 6 kg mentega. Pedagang memproduksi kue jenis isi pisang dan isi keju. Untuk membuat kue jenis isi pisang memerlukan 150 gram tepung dan 50 gram mentega, sedangkan jenis isi keju memerlukan 75 gram tepung dan 75 gram mentega. Apabila harga sebuah kue jenis isi pisang Rp6.000,00 dan isi keju Rp4.000,00, maka keuntungan maksimum pedagang adalah . . . .
    a. Rp30.000,00
    b. Rp32.000,00
    c. Rp36.000,00
    d. Rp40.000,00
    e. Rp42.000,00

30. Nilai minimum $z = 2x + 3y$ pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $2x + y \geq 8$, $x + y \geq 6$, $x + 2y \geq 8$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ adalah . . . .
    a. 12
    b. 14
    c. 16
    d. 20
    e. 24

31. Nilai minimum dari bentuk objektif $P = 4x + 3y$ pada daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan: $2x + 3y \geq 9$; $x + y \geq 4$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ adalah . . . .
    a. 12
    b. 13
    c. 15
    d. 16
    e. 18

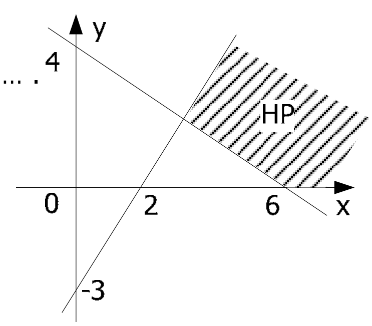
32. Seseorang memproduksi kecap dengan dua macam kualitas yang setiap harinya menghasilkan tidak lebih dari 50 botol. Harga bahan-bahan pembuatan kecap per botol untuk kualitas I adalah Rp4.000,00 dan untuk kualitas II adalah Rp3.000,00. Ia tidak akan membelanjakan untuk pembuatan kecap tidak lebih dari Rp200.000,00. Jika banyaknya kecap kualitas I adalah x dan kualitas II adalah y, maka model matematikanya adalah . . . .
    a. $x + y \leq 50$; $4x + 3y \leq 200$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
    b. $x + y \leq 50$; $3x + 4y \leq 200$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
    c. $x + y \geq 50$; $4x + 4y \leq 200$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
    d. $x + y \geq 50$; $4x + 3y \geq 200$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
    e. $x + y \geq 50$; $3x + 4y \geq 200$; $x \leq 0$; $y \leq 0$

33. Seorang pedagang paling sedikit menyewa 25 kendaraan untuk jenis truk dan colt dengan jumlah yang diangkut 224 karung. Truk dapat mengangkut 14 karung dan colt 8 karung. Jika ongkos sewa truk Rp100.000,00 dan colt Rp75.000,00, jumlah kendaraan masing-masing yang harus disewa agar ongkos minimal adalah . . . .
    a. Colt 25 buah dan tidak disewa truk
    b. Colt 20 buah dan truk 5 buah
    c. Colt 21 buah dan truk 4 buah
    d. Colt 4 buah dan truk 21 buah
    e. Hanya disewa truk 25 buah

34. Rokok A yang harga belinya Rp2.000,00 per bungkus dijual dengan laba Rp400,00 per bungkus, sedangkan rokok B harga belinya Rp1.000,00 dijual dengan laba Rp300,00 per bungkus. Seorang pedagang rokok mempunyai modal Rp800.000,00 dan kiosnya dapat menampung 500 bungkus rokok, akan memperoleh keuntungan sebesar-besarnya jika ia dapat menjual . . . .
    a. 300 bungkus rokok A dan 200 bungkus rokok B
    b. 200 bungkus rokok A dan 300 bungkus rokok B
    c. 250 bungkus rokok A dan 250 bungkus rokok B
    d. 100 bungkus rokok A dan 400 bungkus rokok B
    e. 400 bungkus rokok A dan 100 bungkus rokok B

35. Suatu Perusahaan mebel akan memproduksi meja dan kursi dari kayu. Untuk sebuah meja dan kursi dibutuhkan masing-masing 10 keping papan dan 5 keping papan. Sedangkan biaya sebuah meja adalah Rp60.000,00 dan kursi Rp40.000,00. Perusahaan itu hanya memiliki bahan 500 keping papan dan biaya produksi yang akan dikeluarkan tidak lebih dari Rp3.600.000,00. Jika banyaknya meja yang diproduksi x buah dan kursi y buah, maka model matematika perusahaan di atas adalah . . . .
    a. $2x + y \le 100$; $3x + 2y \le 180$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
    b. $x + 2y \ge 100$; $2x + 3y \le 180$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
    c. $6x + 4y \le 180$; $10x + 5y \le 180$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
    d. $4x + 6y \le 180$; $5x + 10y \le 180$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
    e. $2x + y \le 100$; $5x + 10y \le 180$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

36. Daerah yang diasir pada gambar di samping adalah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan ... .
    a. $2x + 3y \le 12$; $-3x + 2y \ge -6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
    b. $2x + 3y \le 12$; $-3x + 2y \le -6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
    c. $2x + 3y \ge 12$; $-3x + 2y \ge -6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
    d. $2x + 3y \ge 12$; $3x – 2y \ge 6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
    e. $-2x + 3y \le 12$; $3x + 2y \le -6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$



37. Diketahui fungsi objektif $Z = 100x + 80y$. Nilai maksimum Z pada daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan $2x + y \le 10$; $x + 2y \le 10$; $x + y \le 6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; $x, y \in R$ adalah . . . .
    a. 400
    b. 450
    c. 500
    d. 520
    e. 560

38. Diketahui fungsi objektif $P = 100x + 150y$. Nilai minimum P pada daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan:
    $3x + y \ge 9$; $x + y \ge 7$; $x + 4y \le 10$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; $x, y \in R$ adalah . . . .
    a. 700
    b. 750
    c. 1000
    d. 1350
    e. 1500

39. Seorang agen sepeda bermaksud membeli 25 buah sepeda untuk persedian. Harga sepeda biasa Rp600.000,00 per buah dan sepeda federal Rp800.000,00 per buah. Ia merencanakan untuk tidak membelanjakan uangnya lebih dari Rp16.000.000,00

dengan mengharap keuntungan Rp100.000,00 perbuah dari sepeda biasa dan Rp120.000,00 per buah dari sepeda federal. Keuntungan maksimum yang diperoleh agen sepeda tersebut adalah . . . .

a. Rp2.300.000,00
b. Rp2.400.000,00
c. Rp2.500.000,00
d. Rp2.600.000,00
e. Rp2.700.000,00

40. Seorang pemilik toko sepatu ingin mengisi tokonya dengan sepatu laki-laki paling sedikit 100 pasang dan sepatu wanita paling sedikit 150 pasang. Toko tersebut dapat memuat 400 pasang sepatu. Keuntungan tiap pasang sepatu laki-laki adalah Rp10.000,00 dan tiap pasang sepatu wanita adalah Rp5.000,00. Jika banyak sepatu laki-laki tidak boleh melebihi 150 pasang, maka keuntungan terbesar yang dapat diperoleh adalah . . . .

a. Rp2.750.000,00
b. Rp3.000.000,00
c. Rp3.250.000,00
d. Rp3.500.000,00
e. Rp3.750.000,00

B. Soal Essay

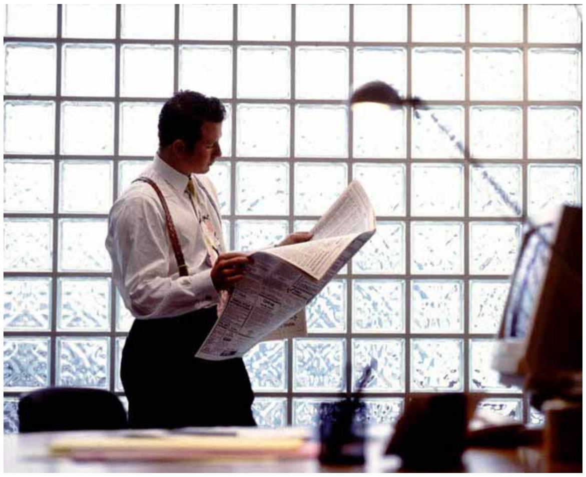
Jawablah pertanyaan berikut dengan tepat.

1. Pengembang perumahan mempunyai tanah seluas 10.000 m^2 akan dibangun tidak lebih dari 125 unit rumah tipe 36 dan 45. Tipe 36 dan 45 memerlukan luas tanah masing-masing 75 m^2 dan 100 m^2. Rumah-rumah tersebut akan dijual dengan harga per unit Rp40.000.000,00 untuk tipe 36 dan Rp60.000.000,00 untuk tipe 45.
   a. Misalkan banyaknya rumah tipe 36 dan 45 yang dapat dibangun adalah x dan y buatlah model matematika dari persoalan di atas.
   b. Tentukan daerah penyelesaiannya (daerah *feasible*)
   c. Tentukan bentuk objektif yang menyatakan hasil penjualan rumah.
   d. Berapakah masing-masing tipe yang harus dibangun agar mendapatkan keuntungan yang sebesar-besarnya (maksimum).
   e. Berapakah keuntungan maksimum tersebut.

2. Sebuah pabrik memproduksi biskuit yang dikemas dalam bentuk kaleng dengan isi 1 kilogram dan 2 kg. Kapasitas produksi tiap hari tidak lebih dari 120 kaleng. Tiap hari biskuit dengan kemasan 1 kg tidak kurang dari 30 kaleng dan kemasan 2 kg 50 kaleng. Keuntungan dari hasil penjualan Rp5.000,00 per kaleng dengan isi 1 kg dan Rp7.000,00 untuk kemasan isi 2 kg. Misalkan banyaknya produksi tiap jenis adalah x dan y. Tentukanlah:
   a. model matematika dari persoalan tersebut
   b. himpunan penyelesaian (daerah *feasible*) dari hasil pada a.
   c. banyaknya produksi masing-masing jenis agar diperoleh keuntungan maksimum dan berapakah keuntungan maksimumnya

Ruang Pengetahuan

TIPS DAN TRIK MELAMAR KERJA



Gambar 4-22 Karyawan kantor
Sumber: CD Image

Lamaran yang kita buat memang harus sesingkat mungkin, namun tetap bisa memasukkan semua unsur yang diperlukan seperti disebutkan di atas tadi. Soalnya, pemeriksaan lamaran biasanya dilakukan cepat, serta si pemeriksa hanya melihat hal-hal yang dibutuhkan atau yang menjadi persyaratan. Dengan pertimbangan itu, kemungkinan kalian dapat diterima juga sangat besar, karena menunjukkan kalau kalian merupakan calon pegawai potensial, dengan potensi yang kalian miliki tersebut.

Jadi, jangan membuat surat lamaran yang membingungkan dengan bermacam-macam keterangan dalam satu bagian. Setidaknya ada empat bagian penting harus dicantumkan.
Catatan: Tiap kop surat lamaran, biasanya berisi nama, alamat, nomor telepon, serta e-mail. Baru kemudian posisi yang kalian inginkan.

a. Panjang
   Setiap lamaran/CV sebaiknya jangan sampai melebihi tiga lembar. Lebih baik dua lembar saja.
b. Lampiran
   Tiap sertifikat ijazah, atau surat-surat referensi tidak perlu dimasukkan dalam surat lamaran. Kalian harus menunjukkannya saat datang dalam wawancara. Bila memang ingin melengkapi salah satu dokumen akademik, lampirkan ijasah terakhir serta referensi kerja sekarang. Sementara soal pas foto, yang paling populer digunakan selama ini memang seukuran pas foto untuk pasport. Namun, soal ukuran ini biasanya ditentukan oleh pemasang iklan dan biasanya tidak menjadi masalah.
c. Lamaran Lewat E-mail
   Dengan berkembangnya internet, lamaran lewat Internet seperti sekarang juga sangat populer. Banyak perusahaan di Indonesia saat ini juga menerima lamaran lewat e-mail ini. Untuk lamaran lewat e-mail ini, kalian juga dapat melampirkan seluruh biodata itu lewat e-mail.
d. Cover Surat
   Kerapian serta bentuk surat ternyata menjadi bagian sangat penting. Ada sebagian orang yang menganggap bahwa wawancara merupakan bagian paling menentukan, tidak peduli apakah surat lamarannya baik atau jelek. Padahal dengan membuat lamaran bagus serta keterangan jelas dan singkat, merupakan salah satu bukti keseriusan Kalian meraih posisi yang diinginkan.(www.astaga.com).

KUNCI JAWABAN BAB 1
SISTEM BILANGAN REAL

Latihan 1

1. a. 45% ; $\frac{9}{20}$ c. 2,5% ; $\frac{1}{40}$ e. 0,15% ; $\frac{3}{2.000}$

3. a $\frac{8}{9}$ c. $\frac{2}{9}$ e. $\frac{70}{111}$ g. $\frac{46}{45}$ i. $\frac{1}{18}$

5. a $\frac{57}{10}$ c. $\frac{5}{36}$ e. $\frac{23}{6}$ g. $\frac{13}{12}$ i. $\frac{2}{3}$ k. $\frac{235}{42}$

7. Warisan masing-masing adalah Rp40.000.000,00;
Rp30.000.000,00;
Rp24.000.000,00; dan
Rp26.000.000,00.

9. Rp10.295.000,00

11. Rp360.000,00

13. Rp250.000,00

15. Rp2.662.500,00

Latihan 2

1. 3 sak

3. 1 meter

5. Tembaga = 60%; Timah hitam = 10% dan Timah putih = 30%

7. 540 km

9. a. 1 : 25 c. 1 : 3 e. 35 : 51 g. 2 : 1 i. 1 : 5 k. 4 : 15

11. Rp1.400.000,00

13. 1,25 meter

15. 2.000 m^2

17. Neni = Rp150.000,00 ; Marliana = Rp60.000,00 dan Devi = Rp180.000,00

19. 100 pekerja

21. Rp150.000,00

Latihan 3

1. 7^6
3. 3^4
5. $\frac{1}{5}$
7. $\frac{1}{2^8}$
9. 10^5
11. $\frac{2}{5}$
13. $\frac{1}{10^{11}}$
15. $5^2 \cdot 2^2$
17. $2^3 \cdot 5^2$
19. $7^2 \cdot 3^3$
21. 2^{23}
23. 81
25. 100.000
27. 162
29. 9
31. 2
33. 3^9
35. 10
37. 13.310
41. a. $x = \frac{5}{2}$; $b = -1$

Latihan 4

1. $27\sqrt{3}$
3. $\sqrt{5} + 12\sqrt{7}$
5. $18\sqrt{3} - 54$
7. $15\sqrt{6}$
8. $13\sqrt{11}$
10. $15\sqrt{10} + 50$
12. $16\sqrt{15} + 120$
13. $5 + 2\sqrt{6}$
15. 1
17. 15
19. 168
21. $14\sqrt{10}$
25. 93
27. $10\sqrt{10}$
29. 90
31. $\sqrt{5}$
33. $2(\sqrt{13} - 2\sqrt{2})$
35. $-11 - 2\sqrt{30}$
37. 0,8
39. $6 + 3\sqrt{3}$

Latihan 5

1. a. 3 c. 3 e. 1,5 g. -3
3. a. 1,380 c. 0,1761 e. 1,9542
5. a. 0,3729 c. 4,7482 e. 0,5378 – 3 g. 0,9443
7. a = 3 c. $-\frac{4}{3}$ e. $-\frac{2}{3}$ g. 4,5
9. a. 280,2

Uji Kemampuan

1	E	11	E	21	C	31	A	41	A
2	D	12	A	22	D	32	B	42	B
3	D	13	E	23	B	33	E	43	E
4	C	14	A	24	B	34	D	44	A
5	B	15	C	25	A	35	B	45	D
6	E	16	A	26	B	36	D	46	E
7	B	17	B	27	C	37	B	47	B
8	E	18	B	28	E	38	D	48	D
9	D	19	A	29	C	39	E	49	B
10	D	20	A	30	D	40	C	50	D

KUNCI JAWABAN BAB 2
PERSAMAAN dan PERTIDAKSAMAAN

Latihan 1

1. a. $x = -20$
   c. $x = -17$
   e. $x = 13$
   g. $x = -4$
   i. $x = \frac{11}{10}$
   k. $x = 9$
   m. $x = \frac{23}{2}$
   o. $x = \frac{23}{2}$
   q. $x = \frac{144}{5}$
   s. $x = -\frac{27}{4}$

3. a. $\{ x \mid x > -3\}$
   c. $\{ x \mid x \geq -20\}$
   e. $\{ x \mid x > -12\}$
   g. $\{ x \mid x \geq 0 \}$
   i. $\{ x \mid x < -\frac{16}{5}\}$
   k. $\{ p \mid p > -\frac{11}{5}\}$
   m. $\{ x \mid x \geq \frac{5}{6}\}$
   o. $\{ x \mid x \leq -\frac{4}{7}\}$
   q. $\{ x \mid x \geq -66\}$
   s. $\{ x \mid x \geq -\frac{16}{5}\}$

5. a. $\{(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})\}$
   c. $\{(-2, 1)\}$
   e. $\{(3, -2)\}$
   g. $\{(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})\}$
   i. $\{(7, -4)\}$

7. a. Meja = \$15 , Kursi = \$5, Harga 1 meja + 1 kursi = \$20
   c. Bilangan tersebut adalah 40 dan 15
   e. Banyak murid laki-laki = 37 orang dan murid perempuan = 15 orang
   g. Umur anak sekarang = 10 tahun dan umur ayahnya sekarang = 35 tahun

Latihan 2

1. $x_1 = 1$ dan $x_2 = 6$
3. $x_1 = -2$ dan $x_2 = 2$
27. $x_1 = -2$ dan $x_2 = 2$
29. $x_1 = -\frac{9}{2}$ dan $x_2 = -1$

5. $x_1 = -3$ dan $x_2 = 2$

7. $x_1 = \frac{1}{5}\sqrt{30}$ dan $x_2 = -\frac{1}{5}\sqrt{30}$

9. $x_1 = -5$ dan $x_2 = 2$

11. $x_1 = -\frac{1}{2}$ dan $x_2 = -3$

13. $x_1 = -\frac{3}{2}$ dan $x_2 = -1$

15. $x_1 = \frac{8}{9}$ dan $x_2 = 2$

17. $x_1 = -3$ dan $x_2 = \frac{7}{3}$

19. $x_1 = -\frac{3}{2}$ dan $x_2 = 2$

21. $x_1 = -2$ dan $x_2 = 5$

23. $x_1 = -6$ dan $x_2 = 2$

25. $x_1 = -1 + \sqrt{5}$ dan $x_2 = -1 - \sqrt{5}$

31. $x_1 = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ dan $x_2 = \frac{-1-\sqrt{7}}{2}$

33. $x_1 = -4$ dan $x_2 = 0{,}5$

35. $x_{1,2} = 3$

37. $x_1 = 0$ dan $x_2 = 2$

39. $x_1 = -1$ dan $x_2 = 2$

41. $x_1 = 2$ dan $x_2 = 4$

43. $x_1 = -\frac{2}{3}$ dan $x_2 = \frac{3}{2}$

45. $x_1 = -\frac{1}{3}$ dan $x_2 = 3$

47. $x_1 = -1$ dan $x_2 = \frac{4}{3}$

49. $x_1 = -3$ dan $x_2 = 3$

51. c = 1, akar lainnya 1

53. $m_1 = -6$ dan $m_2 = 8$

55. Persamaan kuadratnya adalah $3x^2 + 7x - 6 = 0$ dan akar-akarnya adalah $x_1 = -3$ dan $x_2 = \frac{2}{3}$

57. Persamaan kuadratnya adalah $3x^2 - 14x + 15 = 0$, akar-akarnya adalah $x_1 = 3$ dan $x_2 = \frac{5}{3}$

59. $\{x \mid -3 < x < 1\}$

61. $\{x \mid 1 \leq x \leq 7\}$

63. $\{x \mid -2 < x < 13\}$

65. $\{x \mid x < -2 \text{ atau } x > \frac{1}{2}\}$

67. $\{x \mid x < 1 \text{ atau } x > \frac{5}{2}\}$

69. $\{x \mid -11 < x < 4\}$

71. $\{x \mid -4 < x < 10\}$

73. $\{x \mid x \in R\}$

75. $\{x \mid -5 < x < \frac{7}{2}\}$

Latihan 3

1. a. D = 0, akar-akarnya sama atau kembar
   c. D = -3, akar-akarnya tidak real atau akar-akarnya imajiner
   e. D = 40, akar-akarnya real dan berbeda

3. a. -4 b. 3 c. 10 d. -12 e. $\frac{10}{3}$ f. $-\frac{4}{3}$

5. a. 1 b. 0 c. 1 d. 0 e. 1 f. tidak terdefinisi

Latihan 4

1. a. $x^2 - x - 6 = 0$ g. $x^2 - 1 = 0$
   c. $x^2 - 2 = 0$ i. $x^2 - 8x + 4 = 0$
   e. $5x^2 - 27x + 10 = 0$

3. $5x^2 - 4x + 1 = 0$

5. $4x^2 - 13x + 1 = 0$

7. Ukuran tanah Pak Ali adalah 250 m x 40 m dan ukuran tanah Ibu Selvi adalah 50 m x 50 m

Uji Kemampuan

1	B	11	E	21	B
2	C	12	E	22	E
3	E	13	C	23	A
4	E	14	E	24	D
5	C	15	D	25	C
6	C	16	B	26	C
7	B	17	E	27	C
8	B	18	B	28	B
9	E	19	C	29	B
10	D	20	A	30	A

KUNCI JAWABAN BAB 3 MATRIKS

Latihan 1

1. a. 4 c. 1, 4, -3, 0 dan 10 e. -6, -3, -8 dan 6 g. -3 i. kolom ke-5
3. a . 2 x 2 b. 4 x 1 c. 4 x 2 d. 1 x 3

5. a. $x = 3$ dan $y = -4$ c. $x = 2$ dan $y = -3$ e. $x = 2$ dan $y = -3$
   b. $x = 2$ dan $y = -1$ d. $x = 1$, $y = -2$ dan $z = 2$ f. $x = -3$, $y = 2{,}5$ dan $z = -\frac{1}{12}$

7. $w = -0{,}75$ $x = 0{,}5$ $y = -0{,}5$ $z = -2$

Latihan 2

1. a. $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -13 & 6 \end{pmatrix}$ g. $\begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ i. $\begin{pmatrix} -1 & -12 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$

3. a. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ -2 & -2,5 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ -28 & -35 \end{pmatrix}$

5. a. $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -24 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -10 & 48 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$ g. $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix}$ i. $\begin{pmatrix} 4 & 53 \\ -19 & 6 \end{pmatrix}$

8. a. $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 10 & 20 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \\ -9 & -18 & -8 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 10 & 3 & -9 \\ 20 & 6 & -18 \\ 6 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 15 & 18 \\ 12 & 33 \end{pmatrix}$

11. a. a = 1, b = -1, c = 11 dan d = 10,5

    b. a = -8, b = 8,5, c = -15 dan d = 4,75

13. a. $\begin{pmatrix} 3 & 25 \\ 17 & 22 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 8 & 68 \\ 56 & 0 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 37 & -45 \\ 31 & 27 \end{pmatrix}$

Latihan 3

1. a. 8 c. -6 e. 37

3. a. x = 14 c. x = -15 f. $x = \frac{8}{7}$

5. a. Minor : $M_{11} = -2$, $M_{12} = 0$, $M_{21} = 4$ dan $M_{22} = 3$

   Matriks kofaktor = $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ dan Matriks adjoin = $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

   c. Minor : $M_{11} = 6$, $M_{12} = -7$, $M_{21} = 4$ dan $M_{22} = -5$

   Matriks kofaktor = $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ dan Matriks adjoin = $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

7. a. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ g. $(P.Q)^{-1} = Q^{-1}. P^{-1}$

Latihan 4

1. x = 3 dan y = -2
3. x = -5 dan y =1
5. x = -4 dan y = 1
7. x = 3 dan y = -1
9. x = 1, y = -2 dan z = 3
11. a. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -5 & 3 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 4 & 11 & -5 \\ -7 & -18 & 10 \end{pmatrix}$
13. Kualitas A harganya Rp1.000,00
 Kualitas B harganya Rp3.000,00

Uji Kemampuan

1	A	11	A	21	D
2	E	12	D	22	D
3	C	13	E	23	E
4	B	14	A	24	D
5	C	15	A	25	B
6	C	16	C		
7	B	17	D		
8	E	18	C		
9	A	19	E		
10	B	20	A		

KUNCI JAWABAN BAB 2
PROGRAM LINEAR

Latihan 1

4. a. $\begin{cases} 1 \le x < 4 \\ 1 \le y \le 3 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + 2y \ge 2 \\ 2x + y \ge 2 \\ 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$ e. $\begin{cases} 2x + 3y \le 12 \\ 2x + y \le 8 \\ x \ge 0 \ ; \ y \ge 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y \le 2 \\ 3x + y \le 3 \\ x \ge 0 \; ; \; y \ge 0 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x + 2y \le 8 \\ x + y \le 6 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Latihan 2

1. Misalkan jumlah tanaman jagung = x
   jumlah tanaman kedelai = y, maka:

   Fungsi kendalanya $\begin{cases} x + 2y \le 60 \\ 6x + 5y \le 240 \\ x \ge 0 \; ; \; y \ge 0 \end{cases}$

3. Misalkan jumlah pakaian model A = x
   Jumlah pakaian model B = y, maka:

   Fungsi kendalanya: $\begin{cases} x + 2y \le 20 \\ 3x + y \le 20 \\ x \ge 0 \; ; \; y \ge 0 \end{cases}$

   Fungsi sasaran: Z = 15.000x + 10.000y

5. Misalkan jumlah rumah tipe 1 = x
   Jumlah rumah tipe 2 = y, maka:

   Fungsi kendalanya: $\begin{cases} x + 2y \le 120 \\ 2x + 3y \le 320 \\ x \ge 0 \; ; \; y \ge 0 \end{cases}$

   Fungsi sasaran: Z = 500.000x + 700.000y

7. Misalkan jumlah mobil yang parkir = x
   Jumlah bus yang parkir = y, maka:

   Fungsi kendalanya: $\begin{cases} x + y \le 20 \\ x + 4y \le 60 \\ x \ge 0 \; ; \; y \ge 0 \end{cases}$

   Fungsi sasaran: Z = 3.000x + 5.000y

9. Misalkan jumlah jas yang dibuat = x
   Jumlah rok yang dibuat = y, maka:

   Fungsi kendalanya: $\begin{cases} 3x + y \le 30 \\ x + 2y \le 20 \\ x \ge 0 \; ; \; y \ge 0 \end{cases}$

   Fungsi sasaran: Z = 75.000x + 50.000y

Latihan 3

1. a. Titik minimum (0, 0) dengan nilai minimum 0
   Titik maksimum (5, $\frac{5}{2}$) dengan nilai maksimum 20

   b. Titik minimum (0, 0) dengan nilai minimum 0
   Titik maksimum (0, 6) dengan nilai maksimum 180

   c. Titik minimum (0, 0) dengan nilai minimum 0
   Titik maksimum (2, 3) dengan nilai maksimum 5

   e. Titik minimum (0, 1) dengan nilai minimum 1
   Titik maksimum (10, 0) dengan nilai maksimum 20

3. Untuk mendapatkan keuntungan maksimal, maka roti jenis pertama dibuat sebanyak 100 buah dan roti jenis kedua sebanyak 150 buah dengan keuntungan maksimal Rp140.000,00

5. Untuk mengeluarkan biaya seminimal mungkin, maka truk jenis pertama dan kedua disewa masing-masing sebanyak 12 buah dengan biaya minimal Rp1.080.000,00

7. Untuk mendapatkan keuntungan maksimal, maka logam jenis pertama dibuat sebanyak 48 buah dan logam jenis kedua sebanyak 8 buah dengan hasil maksimal Rp92.000.000,00

9. Untuk mengeluarkan biaya seminimal mungkin, maka truk yang disewa 4 buah dan colt yang disewa 21 buah dengan sewa minimal Rp1.975.000,00

Latihan 4

1. a. Titik minimum (0, 0) dengan nilai minimum 0
   Titik maksimum (5, 0) dengan nilai maksimum 10

   c. Titik minimum (0, 0) dengan nilai minimum 0
   Titik maksimum (6, 0) atau ($\frac{14}{3}$, $\frac{8}{3}$) dengan nilai maksimum 18

   e. Titik minimum (5, 0) dengan nilai minimum 5
   Titik dan nilai maksimum tidak ada.

3. Untuk mendapatkan keuntungan maksimal, maka roti jenis pertama dibuat sebanyak 30 buah dan roti jenis kedua sebanyak 150 buah dengan keuntungan maksimal Rp42.000,00

5. a. Rumah tipe 21 sebanyak 100 buah dan type 36 sebanyak 200 buah
   b. Keuntungan maksimum Rp825.000.000,00

Uji Kemampuan

1	B	11	A	21	D	31	E
2	A	12	D	22	A	32	A
3	B	13	A	23	B	33	C
4	C	14	A	24	A	34	A
5	C	15	E	25	B	35	A
6	D	16	C	26	E	36	D
7	D	17	A	27	D	37	E
8	C	18	B	28	A	38	B
9	C	19	B	29	E	39	D
10	A	20	D	30	B	40	A

GLOSARIUM

Bilangan real	:	terdiri atas dua jenis bilangan yaitu bilangan rasional dan irasional.
Bilangan Rasional	:	bilangan yang dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$ dengan b $\neq 0$
Bilangan komposit	:	bilangan yang memiliki faktor lebih dari dua
Persen	:	pembagian dengan seratus
Perbandingan senilai	:	dua perbandingan yang nilainya sama
Perbandingan berbalik nilai	:	dua perbandingan yang harganya saling berbalikan
Skala	:	bentuk perbandingan senilai dari ukuran suatu besaran nyata
Bilangan berpangkat	:	a^n didefinisikan dengan $\underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n}$
Bentuk akar	:	akar dari suatu bilangan yang nilainya merupakan bilangan irasional
Logaritma	:	$a^c = b$ identik dengan ${}^a\log b = c$
Mantise	:	bilangan desimal dari hasil pengambilan logaritma
indeks atau karakteristik	:	bilangan bulat dari hasil pengambilan logaritma
Persamaan	:	Kalimat terbuka yang memuat tanda " sama dengan "
Pertidaksamaan	:	kalimat terbuka yang memuat tanda " $<$, $\leq$, $>$, $\geq$
Persamaan atau pertidaksamaan linear	:	suatu persamaan atau pertidaksamaan dengan variabelnya berpangkat satu.
Eliminasi	:	melenyapkan
Subtitusi	:	mengganti atau menyatakan salah satu variabel dengan variabel lainnya.

Persamaan kuadrat	:	persamaan dimana pangkat tertinggi dari variabel (peubah) adalah dua
Akar-akar persamaan kuadrat	:	penyelesaian persamaan kuadrat
Diskriminan	:	pembeda persamaan kuadrat, $D = b^2 - 4ac$
Matriks	:	susunan elemen-elemen atau entri-entri yang berbentuk persegipanjang yang diatur dalam baris dan kolom
Ordo matriks	:	banyaknya elemen baris diikuti banyaknya kolom. A_{mxn} berarti matriks A berordo m x n
Matriks diagonal	:	matriks yang seluruh elemennya nol kecuali pada diagonal utamanya tidak semuanya nol.
Matriks identitas	:	matriks yang semua elemen pada diagonal utamanya adalah satu dan elemen lainnya adalah nol.
Transpose matriks	:	mengubah susunan matriks dari baris menjadi kolom atau sebaliknya
minor	:	determinan submatriks yang tinggal setelah baris ke-i dan kolom ke-j dicoret dari A
Matriks singular	:	matriks yang harga determinannya = 0 atau matriks yang tidak memiliki invers
Program Linear	:	cara untuk menyelesaikan suatu persoalan (penyelesaian optimum) dengan menggunakan metode matematik yang dirumuskan dalam bentuk persamaan-persamaan atau pertidaksamaan-pertidaksamaan linear
Model matematika	:	suatu rumusan (dapat berupa persamaan, pertidaksamaan atau fungsi) yang diperoleh dari suatu penafsiran ketika menterjemahkan suatu soal verbal.
Nilai optimum	:	maksimum atau minimum
Garis selidik	:	suatu garis yang digunakan untuk menyelidiki nilai optimum (maksimum atau minimum) yang diperoleh dari fungsi sasaran atau fungsi objektif.

INDEKS

I

K

L

M

N

O

P

R

S

T

V

DAFTAR PUSTAKA

Alders, C.J. 1987. *Ilmu Aljabar*. Jakarta: Pradnya Paramita.

Anton, Howard. 1988. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga

Ayres, Frank.Jr. 1972. *Calculus 2 edition,Schum Outline Series*. Mc. Graw Hill London: Book Company.

Anonim. 1976*. Matematika 8*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan

Anonim. 1976*. Matematika 11*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan

Anonim. 2003*. Kurikulum SMA dan MA*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan

Ilman, M. Oetjoep, Gunawan dkk. 1968. *Aljabar dan Ilmu Ukur Analitik*. Jakarta: Widjaya.

Murdhana, D.M. Agung, dkk. 1986. *2000 Bank soal SMA Matematika A3*. Bandung: Armico

Pratikno, Gawatri U.R, Sukamto, Nurbaya. 1999. *Matematika SMK 1*.Jakarta: Yudhistira

Purcell, Edwin J. Varberg Dole. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: Erlangga.

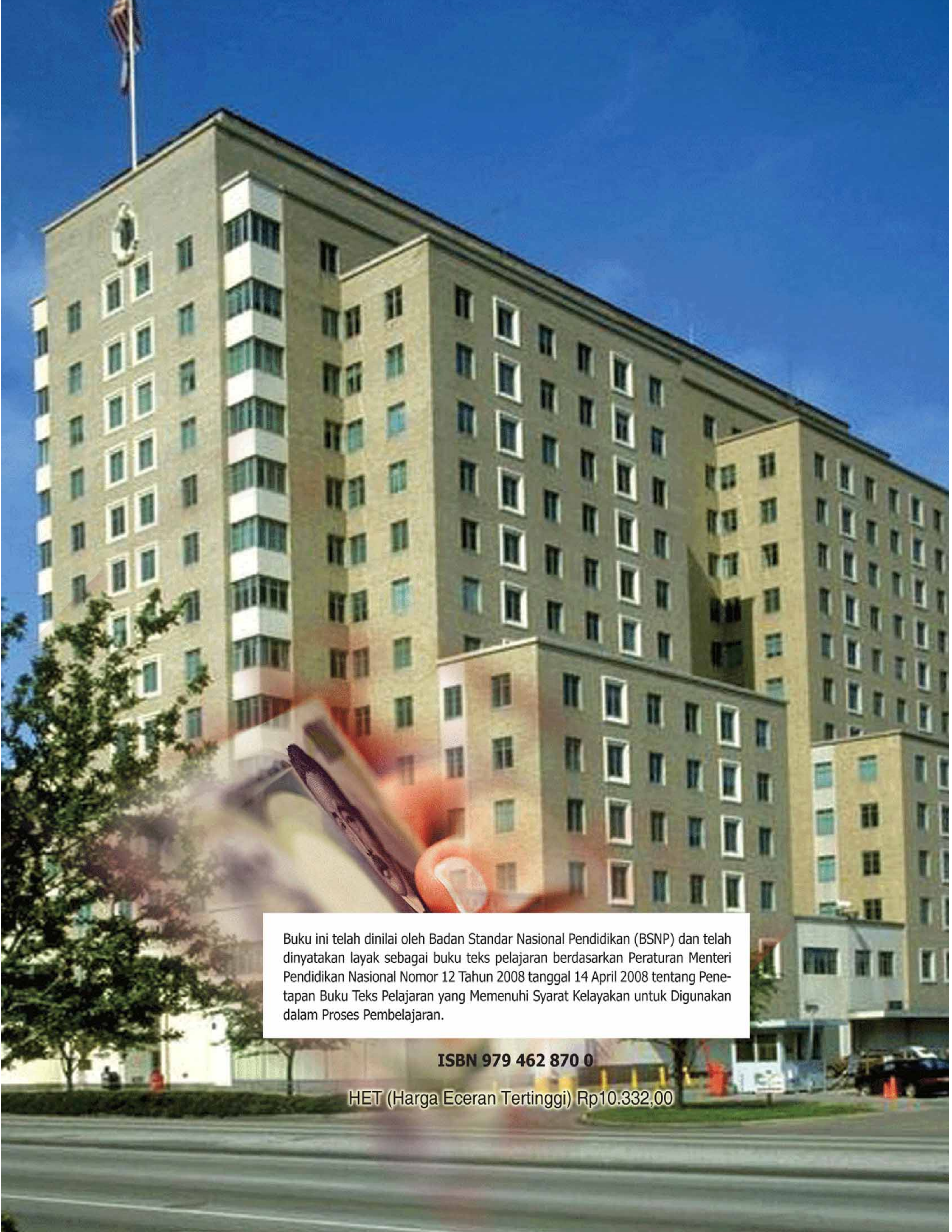
Sadler, A.J. 1999. *Introductory Calculus Second Edition*. Australia: Sadler Family Trust.

Saltzherr, J.P, L.P. Ritchi, Lumban tobing. 1973. *Aljabar dan Teori Berhitung*. Jakarta: Pradnya Paramita.

Setya budhi, Wono. 1999. *Matematika SMU IB*. Jakarta: Pusgrafin

Spiegel, Murray R, PhD. 1993. *Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Wirodikromo, Sartono. 1996. *Matematika Untuk SMU Kelas 2*. Jakarta: Erlangga



Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 12 Tahun 2008 tanggal 14 April 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

ISBN 979 462 870 0

HET (Harga Eceran Tertinggi) Rp10.332,00