PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

BUKU SEKOLAH bse ELEKTRONIK

Kreatif Menggunakan Matematika

untuk Kelas XI
Sekolah Menengah Kejuruan/Madrasah Aliyah Kejuruan
Rumpun Seni, Pariwisata, dan Teknologi Kerumahtanggaan

Heri Retnawati
Harnaeti

2

Kreatif Menggunakan Matematika untuk Kelas XI SMK/MAK Rumpun Seni, Pariwisata, dan Teknologi Kerumahtanggaan Heri Retnawati dan Harnaeti

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Kreatif Menggunakan Matematika

untuk Kelas XI
Sekolah Menengah Kejuruan/Madrasah Aliyah Kejuruan
Rumpun Seni, Pariwisata, dan Teknologi Kerumahtanggaan

Heri Retnawati
Harnaeti

2

Mtgcvkh'Ogpi i wpcmcp'Ocvgo cvkmc

Untuk SMK/MAK Kelas XI
Rumpun Seni, Pariwisata, dan Teknologi Kerumahtanggaan

Penulis	:	Heri Retnawati
		Harnaeti
Ilustrasi, Tata Letak	:	Tim Visindo Media Persada
Perancang Kulit	:	Tim Visindo Media Persada

Ukuran Buku : 17,6 × 25 cm

510.71
RET RETNAWATI, Heri
k Kreatif menggunakan matematika 2 : untuk kelas XI Sekolah Menengah Kejuruan/Madrasah Aliyah Kejuruan Rumpun Seni, Pariwisata, dan Teknologi Kerumahtanggaan/ Heri Retnawati, Harnaeti. -- Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2008.
vi, 162 hlm. : ilus.; 25 Cm.

Bibliografi : hlm.162
Indeks
ISBN 979-462-940-5

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Harnaeti

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

Diperbanyak oleh ...

Mcvc'Uco dwcp

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2008, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/ penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (website) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (down load), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juli 2008

Kepala Pusat Perbukuan

Mcvc'Rgpi cpvct

Matematika merupakan ilmu yang sangat berkaitan dengan kehidupan. Sebagai ibu dari ilmu pengetahuan, matematika merupakan ilmu dasar yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah dalam bidang ilmu yang lain. Misalnya, Fisika, Kimia, Biologi, Akuntansi, Ekonomi, Sosial, dan Astronomi.

Melihat betapa pentingnya matematika maka perlu adanya peningkatan kualitas pendidikan matematika di sekolah agar membentuk manusia yang memiliki daya nalar dan data pikir yang kreatif dan cerdas dalam memecahkan masalah, serta mampu mengomunikasikan gagasan-gagasannya. Pendidikan matematika harus dapat membantu Anda menyongsong masa depan dengan lebih baik.

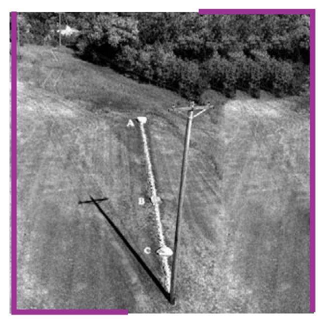
Atas dasar inilah, kami menyusun buku Kreatif Menggunakan Matematika ini ke hadapan Anda, khususnya para siswa sekolah menengah kejuruan. Buku ini menghadirkan aspek konstektual bagi Anda dengan menggunakan pemecahan masalah sebagai bagian dari pembelajaran untuk memberikan kesempatan kepada Anda membangun pengetahuan dan mengembangkan potensi diri.

Materi pelajaran matematika dalam buku ini bertujuan membekali Anda dengan pengetahuan dan sejumlah kemampuan untuk memasuki jenjang yang lebih tinggi, serta mengembangkan ilmu matematika dalam kehidupan sehari-hari. Oleh karena itu, menempatkan Kreatif Menggunakan Matematika sebagai teori dalam kelas akan membantu pencapaian tujuan pembelajaran. Materi-materi bab di dalam buku ini disesuaikan dengan perkembangan ilmu dan teknologi terkini. Buku ini juga diajikan dengan bahasa yang mudah dipahami dan komunikatif sehingga mempermudah siswa dalam mempelajari buku ini.

Kami menyadari bahwa penerbitan buku ini tidak akan terlaksana dengan baik tanpa dukungan dan bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu, dengan hati yang tulus, kami ucapkan terima kasih atas dukungan dan bantuan yang diberikan. Semoga buku ini dapat memberi kontribusi bagi perkembangan dan kemajuan pendidikan di Indonesia.

Tim Penyusun

Fchvct'Kuk



Bab 1

Program Linear

Sumber: dianekawhy.blogspot.com

Pada bab ini, Anda diajak menyelesaikan masalah program linear dengan cara membuat grafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear, menentukan model matematika dari soal cerita, menentukan nilai optimum dari sistem pertidaksamaan linear, dan menerapkan garis selidik.

A. Grafik Himpunan Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linear

B. Model Matematika dari Soal Cerita

C. Menentukan Nilai Optimum dari Fungsi Objektif pada Sistem Pertidaksamaan Linear

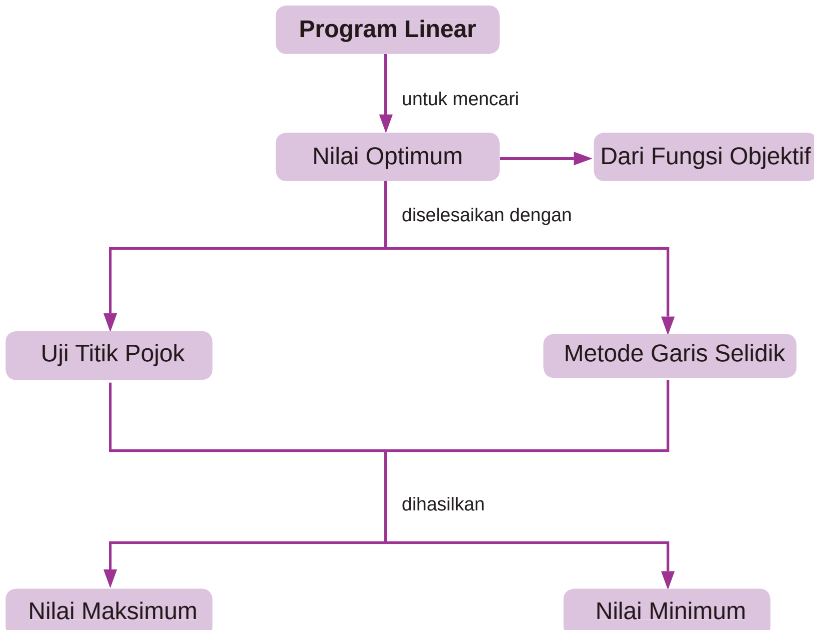
D. Menentukan Nilai Optimum dengan Garis Selidik

Program linear merupakan salah satu ilmu matematika yang digunakan untuk memaksimumkan atau meminimumkan fungsi objektif dengan kendala tertentu. Program linear perlu dipelajari di SMK karena dalam kehidupan sehari-hari, Anda sering menemukan berbagai persoalan yang berkaitan dengan masalah maksimum dan minimum (masalah optimasi) dengan sumber terbatas. Masalah-masalah tersebut sering dijumpai dalam bidang industri, jasa, koperasi, juga dalam bidang perdagangan. Salah satunya adalah permasalahan berikut.

Rina, seorang lulusan SMK Tata Boga membuat dua jenis kue untuk dijual di kantin makanan tradisional asal Jawa Barat, yaitu kue lupis dan kue kelepon. Untuk membuat satu adonan kue lupis, diperlukan 500 gram tepung beras ketan dan 300 gram gula. Untuk satu adonan kue kelepon diperlukan 400 gram tepung beras ketan dan 200 gram gula. Rina memiliki persediaan 15 kg tepung beras ketan dan 8 kg gula. Keuntungan dari satu adonan kue lupis Rp30.000,00 dan satu adonan kue kelepon Rp25.000,00. Bagaimanakah model matematika dari permasalahan program linear tersebut agar Rina mendapatkan keuntungan yang sebesar-besarnya?

Peta Konsep

Materi mengenai Program Linear dapat digambarkan sebagai berikut.



Soal Pramateri

Kerjakanlah soal-soal berikut sebelum Anda mempelajari bab ini.

1. Gambarlah pertidaksamaan berikut pada sistem koordinat Cartesius.
   - **a.** $x + y < 2$
   - **b.** $2x - 3y > 1$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut dalam bentuk grafik.
   - **a.** $x - y > 1$
   - **b.** $5x + 2y > 9$
   - **c.** $3x - y < 8$
   - **d.** $-2x + 4y > 6$

A Grafik Himpunan Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linear

Pada materi program linear, Anda akan mempelajari sistem persamaan linear seperti contoh berikut.

$ax + by \leq r$

$cx + dy \leq s$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Namun, sebelum Anda mempelajari program linear sebaiknya Anda terlebih dahulu mempelajari cara membuat grafik himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel.

Kata Kunci

- grafik pertidaksamaan linear
- daerah himpunan penyelesaian
- sistem pertidaksamaan linear

1. Grafik Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Pertidaksamaan linear dua variabel adalah suatu pertidaksamaan yang di dalamnya memuat dua variabel yang masing-masing variabel berderajat satu dan tidak terjadi perkalian antarvariabelnya. Bentuk-bentuk pertidaksamaan linear dua peubah dengan a, b, $c \in R$ serta x dan y peubah adalah:

$ax + by < c$

$ax + by \leq c$

$ax + by > c$

$ax + by \geq c$

Himpunan penyelesaian adalah himpunan semua titik (x, y) pada sistem koordinat Cartesius yang memenuhi pertidaksamaan linear dua peubah. Misalnya, untuk menggambar daerah yang memenuhi pertidaksamaan linear $ax + by \geq c$ maka terlebih dahulu gambarlah garis $ax + by = c$ yang memotong sumbu-x di $(\frac{c}{a}, 0)$ dan memotong sumbu-y di $(0, \frac{c}{b})$. Kemudian, ambil satu titik lain di luar garis. Jika titik yang diambil memenuhi $ax + by \geq$ c maka daerah yang diarsir adalah daerah di mana titik tersebut berada. Daerah arsiran tersebut merupakan himpunan penyelesaiannya. Sebaliknya, jika titik yang diambil tidak memenuhi $ax + by \geq c$ maka daerah yang diarsir adalah daerah yang tidak memuat titik tersebut.

Apabila pertidaksamaannya menggunakan tanda > atau < maka garis digambar putus-putus. Titik-titik yang berada pada garis tersebut bukan merupakan penyelesaiannya.

Apabila pertidaksamaannya menggunakan tanda ≥ atau ≤ maka garis digambar tidak putus-putus. Titik-titik yang berada pada garis tersebut merupakan penyelesaiannya.

Agar Anda lebih memahami penjelasan tersebut, perhatikanlah cara penyelesaian soal berikut.

Contoh Soal 1.1

Tentukanlah grafik himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linear, jika x dan y bilangan real.

a. $2x + 3y \leq 6$

b. $3x + 4y \geq 12$

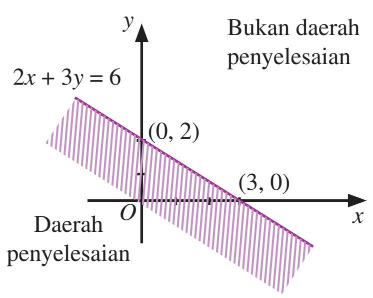
Jawab:

a. Grafik $2x + 3y \leq 6$

Langkah-langkah untuk membuat grafik adalah sebagai berikut.

1) Menentukan batas daerahnya, yaitu gambarlah garis dengan persamaan $2x + 3y = 6$ pada bidang Cartesius.

- Jika $x = 0$ maka $y = 2$ sehingga diperoleh koordinat titik potong dengan sumbu-y adalah (0, 2)
- Jika $y = 0$ maka $x = 3$ sehingga diperoleh koordinat titik potong dengan sumbu-x adalah (3, 0)



2) Menentukan uji sebarang titik, yaitu menentukan daerah yang memenuhi $2x + 3y \leq 6$.

Ambil sebarang titik yang tidak terletak pada garis $2x + 3y = 6$, misalnya titik $O(0, 0)$ maka diperoleh

$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 6$

$0 \leq 6$

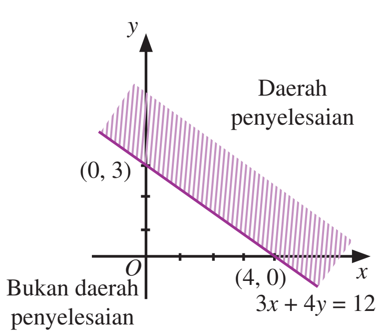
Jadi, titik $O(0, 0)$ terletak pada daerah himpunan penyelesaian. Dengan demikian, daerah yang diarsir pada gambar di samping menunjukkan himpunan penyelesaian $2x + 3y \leq 6$.

b. Grafik $3x + 4y \geq 12$

Langkah-langkah untuk membuat grafik adalah sebagai berikut.

1) Menentukan batas daerahnya, yaitu gambarlah garis dengan persamaan $3x + 4y \geq 12$ pada bidang Cartesius.

- Jika $x = 0$ maka $y = 3$ sehingga diperoleh koordinat titik potong dengan sumbu-y adalah (0, 3)
- Jika $y = 0$ maka $x = 4$ sehingga diperoleh koordinat titik potong dengan sumbu-x adalah (4, 0)



2) Menentukan uji sebarang titik, yaitu menentukan daerah yang memenuhi $3x + 4y \geq 12$.

Ambil sebarang titik yang tidak terletak pada garis $3x + 4y = 12$, misalnya titik $O(0, 0)$ maka diperoleh

$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \geq 12$

$0 \geq 12$ (salah)

Jadi, titik $O(0, 0)$ tidak terletak pada daerah himpunan penyelesaian. Daerah yang diarsir pada gambar menunjukkan himpunan penyelesaian $3x + 4y \geq 12$.

Kegiatan Siswa 1.1

Buatlah kelompok yang beranggotakan empat orang siswa. Setiap anggota kelompok menentukan daerah penyelesaian dan anggota daerah penyelesaian dari salah satu soal-soal berikut.

1. $4x + 3y \leq 12$

2. $4x + 3y \geq 12$

3. $4x + 3y < 12$

4. $4x + 3y > 12$

Kemukakan hasil yang telah Anda peroleh di depan kelas. Kesimpulan apa yang dapat diambil?

2. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Sistem pertidaksamaan linear adalah sistem yang komponen-komponennya terdiri atas sejumlah pertidaksamaan linear. Penyelesaian dari sistem pertidaksamaan merupakan irisan penyelesaian dari setiap pertidaksamaan. Jika Anda memperoleh penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear, penyelesaian tersebut merupakan penyelesaian untuk satu sistem, bukan penyelesaian masing-masing pertidaksamaan.

Contoh Soal 1.2

Gambarlah grafik himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan berikut dengan x dan $y \in \mathbb{R}$.

a. $3x + 2y \leq 6$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

b. $2x + y \leq 6$
$x + 3y \leq 9$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Jawab:

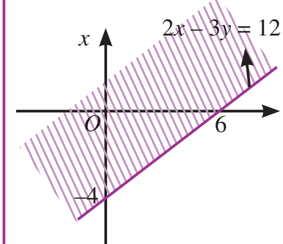
a. Langkah pertama menggambar grafik himpunan penyelesaian adalah menentukan daerah himpunan penyelesaian untuk masing-masing pertidaksamaan, kemudian tentukan daerah irisannya.

- Menentukan daerah penyelesaian $3x + 2y \leq 6$
  Titik potong garis $3x + 2y = 6$ dengan sumbu-x dan sumbu-y adalah (0, 3) dan (2, 0).

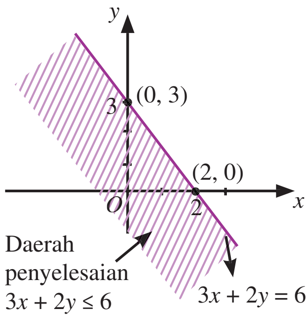
Soal Pilihan

Soal Terbuka

Pertidaksamaan $2x - 3y \geq 12$ memiliki daerah himpunan penyelesaian seperti pada grafik Cartesius berikut.

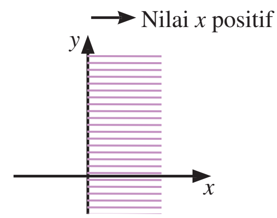


Titik $O(0, 0)$ merupakan salah satu anggota daerah himpunan penyelesaian. Tentukanlah titik-titik lain yang juga merupakan anggota daerah himpunan penyelesaian.

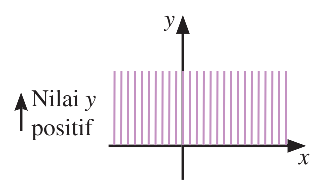


Ambil sebarang titik di luar garis $3x + 2y = 6$. Misal, ambil $O(0, 0)$. Substitusikan ke dalam pertidaksamaan $3x + 2y \leq 6$. Untuk $x = 0$ dan $y = 0$, titik tersebut memenuhi pertidaksamaan sehingga titik $O(0, 0)$ merupakan anggota himpunan penyelesaian $3x + 2y \leq 6$.
Daerah penyelesaiannya ditunjukkan oleh gambar di samping

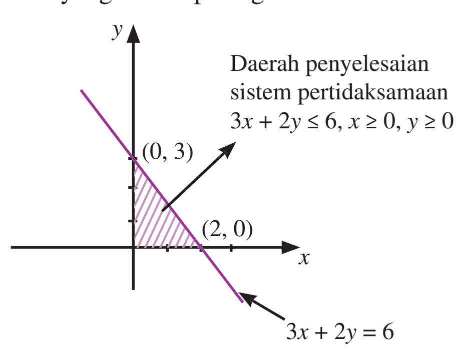
- Menentukan daerah $x \geq 0$
  Pertidaksamaan $x \geq 0$ artinya semua nilai x yang dimaksud bernilai positif. Pernyataan ini digambarkan oleh grafik pada gambar berikut.



- Menentukan daerah $y \geq 0$
  Pertidaksamaan $y \geq 0$ artinya semua nilai y yang dimaksud bernilai positif. Pernyataan ini digambarkan oleh grafik pada gambar berikut.

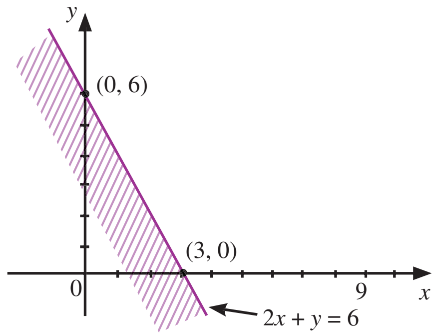


Daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $3x + 2y \leq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ merupakan irisan dari daerah himpunan penyelesaian $3x + 2y \leq 6$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ yang telah dijelaskan sebelumnya. Daerah irisan yang menjadi daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $3x + 2y \leq 6$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ ditunjukkan oleh daerah yang diarsir pada gambar berikut.

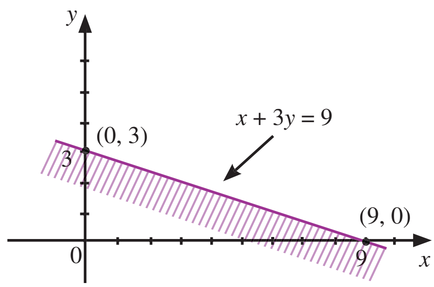


b. Dengan cara yang sama, diperoleh daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $2x + y \leq 6$, $x + 3y \leq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, yaitu irisan daerah himpunan penyelesaian elemen-elemen sistem tersebut.

- Daerah himpunan penyelesaian $2x + y \leq 6$

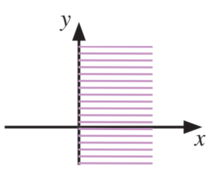


- Daerah himpunan penyelesaian $x + 3y \leq 9$

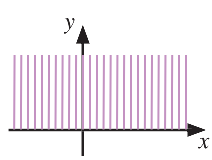


- Daerah himpunan penyelesaian $x \geq 0$ dan $y \geq 0$

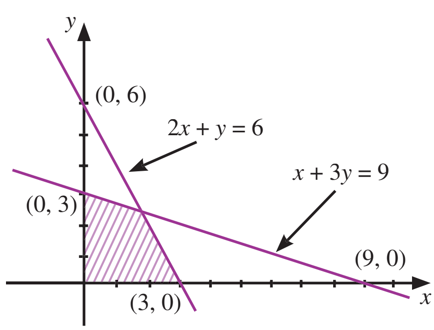
$x \geq 0$



$y \geq 0$



Dari daerah penyelesaian tersebut, irisannya merupakan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan $2x + y \leq 6$, $x + 3y \leq 9$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ yang ditunjukkan oleh gambar berikut.



Selanjutnya, bagaimana jika Anda diminta untuk menentu-

Jelajah Matematika

Simbol > dan < untuk "lebih besar dari" dan "lebih kecil dari" telah ada sejak karya Thomas Harriot yang berjudul Artist Analyticae Praxis dipublikasikan pada tahun 1631.

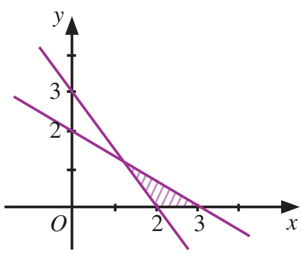
Simbol yang diperkenalkan Harriot merupakan simbol yang paling umum digunakan. Namun, pada abad ke–18, Oughtered juga mengembangkan beberapa variasi simbol pertidaksamaan.

Sumber: *www.Drmath*.com.

kan sistem pertidaksamaan linear dari suatu daerah himpunan penyelesaian yang diketahui? Anda dapat melakukan langkah-langkah seperti pada contoh berikut untuk menentukan sistem pertidaksamaan linear.

Contoh Soal 1.3

Tentukan sistem pertidaksamaan linear untuk daerah himpunan penyelesaian yang ditunjukkan oleh gambar di samping.



Jawab:

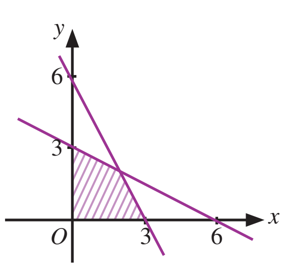
- Semua daerah yang diarsir berada di kuadran I, artinya nilai $x \geq 0$ dan $y \geq 0$
- Persamaan garis yang melalui titik (2, 0) dan (0, 3) adalah $3x + 2y = 6$. Ujilah dengan salah satu titik. Ambil titik $O(0, 0)$. Substitusikan titik O ke persamaan $3x + 2y = 6$ sehingga diperoleh $(3 \cdot 0) + (2 \cdot 0)6 = 0 < 6$.
  Titik (0, 0) tidak terletak di daerah himpunan penyelesaian sehingga daerah himpunan penyelesaian yang memenuhi adalah $3x + 2y \geq 6$.
- Persamaan garis yang melalui titik (3, 0) dan (2, 0) adalah $2x + 3y = 6$. Ujilah dengan salah satu titik. Ambil titik $O(0, 0)$. Substitusikan titik O ke persamaan $2x + 3y = 6$ sehingga diperoleh $(2 \cdot 0) + (3 \cdot 0)\ 0 < 6$.
  Titik (0, 0) terletak di daerah penyelesaian sehingga daerah himpunan penyelesaian yang memenuhi adalah $2x + 3y \leq 6$.

Jadi, sistem pertidaksamaan linear untuk daerah himpunan penyelesaian grafik tersebut adalah

$$\begin{aligned} 3x + 2y &\geq 6 \\ 2x + 3y &\leq 6 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Contoh Soal 1.4

Tentukan sistem pertidaksamaan linear untuk daerah himpunan penyelesaian yang ditunjukkan oleh gambar di samping.



Jawab:

- Semua daerah yang diarsir berada di kuadran I, artinya nilai $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.
- Persamaan garis yang melalui titik (6, 0) dan (0, 3) adalah $3x + 6y = 18$. Ujilah dengan salah satu titik. Ambil titik $O(0, 0)$, kemudian substitusikan titik O ke persamaan $3x + 6y = 18$ sehingga diperoleh $(3, 0) + (6, 0) = 0 < 18$. Titik (0, 0) terletak didaerah penyelesain sehingga daerah himpunan penyelesaian yang memenuhi adalah $3x + 6y \leq 18$.

- Persamaan garis yang melalui titik (3, 0) dan (0, 5) adalah $5x + 3y = 15$. Ujilah dengan salah satu titik. Ambil titik $O(0, 0)$, kemudian substitusikan titik O ke persamaan $5x + 3y = 15$ sehingga diperoleh $(5, 0) + (3, 0) = 0 \leq 15$. Titik (0, 0) terletak di daerah penyelesaian sehingga daerah himpunan penyelesaian yang memenuhi adalah $5x + 3y \leq 15$.

Jadi, sistem pertidaksamaan linear untuk daerah himpunan penyelesaian grafik tersebut adalah

$3x + 6y \leq 10$

$5x + 3y \leq 15$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Evaluasi Materi 1.1

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan berikut.

   a. $x + y \leq 3$
   $x + 2y \geq 4$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$

   b. $2x + 3y \leq 12$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$

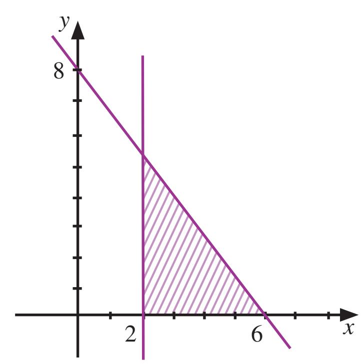
   c. $x + 2y \geq 4$
   $0 \leq x \leq 4$
   $0 \leq y \leq 5$

   d. $x + 4y \geq 8$
   $y - x \leq 2$
   $x \leq 4$

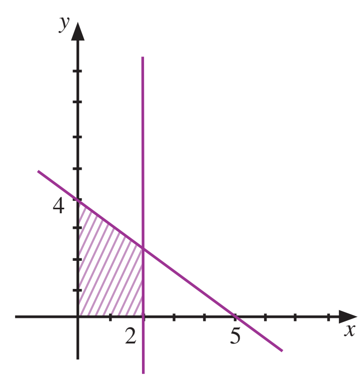
   e. $2x + y \leq 6$
   $y \geq 2$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$

2. Tentukan sistem pertidaksamaan yang dinyatakan oleh daerah berarsir pada grafik berikut.

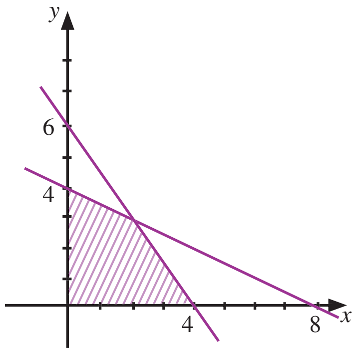
   a.



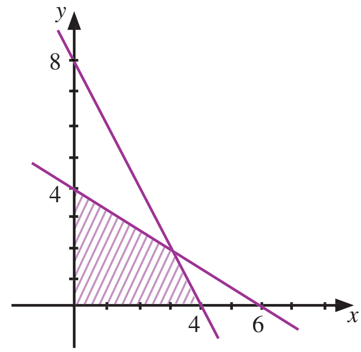
   b.



c.



d.



B Model Matematika dari Soal Cerita

Kata Kunci

- model matematika
- fungsi kendala

Pada Subbab A, Anda telah mempelajari grafik penyelesaian sistem persamaan linear. Pada Subbab B, Anda akan menggunakan materi tersebut untuk menerjemahkan permasalahan sehari-hari ke dalam bahasa matematika. Permasalahan sehari-hari akan lebih mudah diselesaikan jika telah dibuat ke dalam model matematika.

1. Model Matematika

Model matematika merupakan penerjemahan permasalahan sehari-hari ke dalam kalimat matematika. Berikut ini merupakan contoh masalah sehari-hari yang dibuat model matematikanya.

Sumber: *bangbangrattan.com*

Gambar 1.1

Produksi kursi dapat dibuat model matematikanya.

Contoh Soal 1.5

Pabrik A memproduksi dua jenis kursi, yaitu kursi rotan dan kursi jati. Biaya produksi untuk dua set kursi rotan dan tiga set kursi jati adalah Rp18.000.000,00. Pabrik B yang merupakan cabang dari pabrik A memproduksi tiga set kursi rotan dan dua set kursi jati dengan biaya produksi Rp20.000.000,00. Buatlah model matematika untuk persoalan tersebut.

Jawab:

Jika biaya produksi satuan untuk kursi rotan adalah x dan biaya produksi satuan untuk kursi jati adalah y maka

Biaya produksi di pabrik A adalah $2x + 3y = 18.000.000$

Biaya produksi di pabrik B adalah $3x + 2y = 20.000.000$

Biaya produksi pembuatan kursi tidak mungkin bernilai negatif maka $x \geq 0$ dan $y \geq 0$. Oleh karena itu, model matematika untuk persoalan tersebut adalah

$$2x + 3y = 18.000.000$$
$$3x + 2y = 20.000.000$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

2. Model Matematika Permasalahan Program Linear

Pada umumnya, model matematika pada program linear terdiri atas pertidaksamaan sebagai fungsi kendala dan sebuah fungsi objektif. Ciri khas model matematika pada program linear adalah selalu bertanda " ≤ " atau " ≥ " dengan nilai peubah x dan y yang selalu positif.

Contoh Soal 1.6

Rina, seorang lulusan SMK Tata Boga membuat dua jenis kue untuk dijual di kantin makanan tradisional, yaitu kue lupis dan kue kelepon. Untuk membuat satu adonan kue lupis, diperlukan 500 gram tepung beras ketan dan 300 gram gula, sedangkan untuk satu adonan kue kelepon diperlukan 400 gram tepung beras ketan dan 200 gram gula. Rina memiliki persediaan 15 kg tepung beras ketan dan 8 kg gula. Keuntungan dari satu adonan kue lupis Rp30.000,00 dan satu adonan kue kelepon Rp25.000,00. Buatlah model matematika dari permasalahan program linear tersebut agar Rina mendapatkan keuntungan yang sebesar-besarnya.

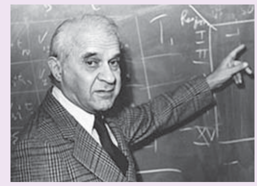
Jawab:
Agar lebih mudah dalam membuat model matematika, masukkan informasi pada soal cerita ke dalam tabel berikut.

	Kue lupis	Kue kelepon	Persediaan
Terigu	500 gram	400 gram	15.000 gram
Gula	300 gram	200 gram	8.000 gram
Keuntungan	Rp30.000,00	Rp25.000,00	

Buatlah pemisalan dari permasalahan tersebut. Misalkan, banyaknya adonan kue lupis = x dan banyaknya adonan kue kelepon = y.
x dan y menunjukkan jumlah adonan kue sehingga $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.
Oleh karena banyaknya terigu dan gula terbatas maka Anda dapat membuat kendalanya sebagai berikut.

$$500x + 400y \leq 15.000 \quad \rightarrow \quad 5x + 4y \leq 150$$
$$300x + 200y \leq 8.000 \quad \rightarrow \quad 3x + 2y \leq 80$$

Jelajah Matematika



Sumber: *upload.wikimedia.org*

Program linear (*Linear Programming*) merupakan matematika terapan yang baru berkembang pada awal abad ke-20. Program linear dikembangkan oleh seorang ekonom bernama W. W. Leontief. Program linear dapat digunakan untuk mengkaji berbagai permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya masalah industri, masalah transportasi, atau masalah diet bagi penderita penyakit tertentu agar memperoleh kombinasi makanan sehingga diperoleh gizi terbaik.

Sumber: *Kalkulus dan Geometri Analisis*, *Purcell*, 2002

Fungsi objektif merupakan fungsi keuntungan yang dapat diperoleh, yaitu

$f(x, y) = 30.000x + 25.000y$

sehingga model matematika dari permasalahan tersebut adalah

$5x + 4y \leq 150$

$3x + 2y \leq 80$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

dengan fungsi objektif $f(x, y) = 30.000x + 25.000y$.

3. Menggambar Grafik Kendala Sistem Pertidaksamaan Linear

Kendala pada program linear terdiri atas beberapa pertidaksamaan linear. Jika Anda ingin menggambar grafik suatu kendala, berarti Anda harus menggambar grafik semua pertidaksamaan linear pada kendala tersebut. Agar Anda lebih memahami pernyataan tersebut, perhatikan contoh berikut.

Contoh Soal 1.7

Gambar 1.2

Produksi kaos olahraga dapat dibuat model matematikanya.

Adi, seorang lulusan SMK Tata Busana memiliki perusahaan konveksi yang membuat kemeja dan kaos olahraga. Untuk membuat satu kemeja, diperlukan $2\frac{1}{2}$ m kain katun dan $1\frac{1}{2}$ m kain wol. Untuk membuat kaos olahraga, diperlukan 2 m kain katun dan 4 m kain wol. Persediaan kain wol yang dimiliki Adi adalah 36 m dan persediaan kain katun 40 m. Gambarlah kendala permasalahan tersebut.

Jawab:

Agar lebih mudah dalam membuat model matematika, buatlah tabel yang berisi informasi soal.

Kain	Kemeja (x)	Kaos (y)	Persediaan
Katun	$2\frac{1}{2}$	2	40
Wol	$1\frac{1}{2}$	4	36

Misalkan, x adalah jumlah maksimum kemeja yang dapat dibuat dan y adalah jumlah maksimum kaos yang dapat dibuat maka kendalanya:

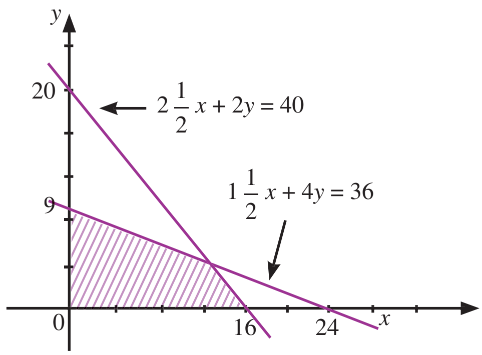
- Kain katun:

  $2\frac{1}{2}x + 2y \leq 40$

- Kain wol:

  $1\frac{1}{2}x + 4y \le 36$

Oleh karena jumlah kemeja dan kaos tidak mungkin bernilai negatif maka $x \ge 0$ dan $y \ge 0$. Kendala tersebut dapat digambarkan dalam diagram Cartesius berikut yang langkah-langkahnya telah dijelaskan pada Subbab A halaman 5.



Tugas Siswa 1.1

Amatilah permasalahan sehari-hari di sekitar Anda. Pilihlah satu masalah yang berhubungan dengan program linear. Buatlah masalah tersebut menjadi soal program linear. Kemudian, buatlah model matematikanya.

Evaluasi Materi 1.2

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Bagas membeli 5 kg pisang dan 7 kg rambutan. Bagas harus membayar Rp41.000,00. Sementara itu, Ayu membeli 3 kg buah pisang dan 6 kg buah rambutan. Ayu harus membayar Rp33.000,00. Jika harga 1 kg buah pisang adalah x dan 1 kg rambutan adalah y rupiah, buatlah model matematika untuk masalah tersebut.

Sumber: *www.kqed.org, www.essentialoil.in*

2. Sebuah tempat wisata memiliki tempat parkir yang luasnya 176 m^2. Tempat parkir tersebut mampu menampung 20 kendaraan (sedan dan bus). Jika luas rata-rata sedan adalah 4 m^2 dan bus 20 m^2, serta biaya parkir untuk sedan dan bus berturut-turut adalah Rp2.000,00/jam dan Rp5.000,00/jam, tentukan model matematika untuk permasalahan tersebut.
3. Seorang pengusaha topi akan membuat 2 jenis topi yang terdiri atas dua warna kain, yaitu warna kuning dan biru. Persediaan kain warna kuning 100 m dan kain warna biru 140 m. Topi jenis I memerlukan kain

warna kuning 25 cm dan warna biru 15 cm. Topi jenis II memerlukan kain warna kuning 15 cm dan warna biru 30 cm. Keuntungan dari topi jenis I adalah Rp3.000,00 dan topi jenis II adalah Rp 5.000,00. Buatlah model matematika dari permasalahan tersebut agar diperoleh keuntungan yang sebesar-besarnya.

4. Seorang pengrajin mebel tradisional memproduksi dua jenis barang, yaitu jenis *A* dan jenis *B*. Jenis *A* memerlukan bahan baku kayu sebanyak 10 unit dan 10 unit bambu, sedangkan jenis *B* memerlukan bahan baku kayu sebanyak 40 unit dan bambu sebanyak 20 unit. Persediaan kayu sebanyak 24 unit, sedangkan persediaan bambu sebanyak 16 unit. Jika laba pembuatan barang jenis *A* Rp60.000,00 per unit dan jenis *B* adalah Rp50.000,00, buatlah model matematika dari permasalahan tersebut.

Sumber: *www.sahabatbambu.com*

5. Perusahaan bahan bangunan memproduksi dua jenis barang, yaitu barang jenis I dan II. Untuk jenis I memerlukan bahan baku pasir sebanyak 12 unit dan memerlukan waktu penyelesaian 6 jam. Sementara itu, barang jenis II memerlukan bahan baku pasir sebanyak 8 unit dan menghabiskan waktu 12 jam. Bahan baku yang tersedia 96 unit dan waktu yang tersedia 72 jam. Laba dari barang jenis I adalah Rp50.000,00 per unit dan dari jenis II adalah Rp40.000,00 per unit. Buatlah model matematika dari permasalahan tersebut.

6. Suatu perusahaan kerajinan ukiran akan memproduksi meja dan kursi. Material yang diperlukan untuk meja dan kursi masing-masing adalah 12 unit dan 8 unit. Jam kerja masing-masing adalah 6 jam dan 12 jam. Material yang tersedia adalah 96 unit dan jam kerja yang tersedia adalah 72 jam. Gambarkan grafik penyelesaian untuk permasalahan tersebut.

7. Seorang pengusaha di bidang tataboga membuat dua jenis kue. Kue jenis *A* memerlukan 450 gram tepung dan 60 gram mentega, sedangkan kue jenis *B* diperlukan 300 gram tepung dan 90 gram mentega. Jika tersedia 18 kilogram tepung dan $4\frac{1}{2}$ kilogram mentega, gambarkan kendala untuk permasalahan tersebut.

8. Arni lulusan SMK Tata Boga mendirikan perusahaan selai. Perusahaan tersebut membuat dua jenis selai, yaitu selai A dan selai B. Selai A memerlukan nanas 120 kg dan 60 kg apel, sedangkan selai B memerlukan nanas 180 kg dan 60 kg apel. Persediaan nanas 420 kg dan apel 480 kg. Gambarlah grafik penyelesaian untuk permasalahan tersebut.

Sumber: *www.21food.com*

C Menentukan Nilai Optimum dari Fungsi Objektif pada Sistem Pertidaksamaan Linear

Perlu Anda ketahui, inti persoalan dalam program linear adalah menentukan nilai optimum (maksimum atau minimum) dari suatu fungsi. Dalam kehidupan sehari-hari, permasalahan nilai optimum salah satunya adalah masalah penentuan jumlah kursi penumpang terbanyak agar keuntungan yang diperoleh sebesar-besarnya, tentu saja dengan batas-batas tertentu. Fungsi yang ditentukan nilai optimumnya disebut fungsi objektif, fungsi sasaran, atau fungsi tujuan. Nilai fungsi objektif ditentukan dengan mengganti variabel (biasanya x dan y) dalam fungsi tersebut dengan koordinat titik-titik pada himpunan penyelesaian.

Nilai optimum yang diperoleh dari suatu permasalahan program linear dapat berupa nilai terbesar atau nilai terkecil. Model kendala yang menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi objektif. Titik yang membuat nilai fungsi menjadi optimum disebut titik optimum.

Nilai optimum dari sistem pertidaksamaan linear dapat ditentukan dengan beberapa cara, di antaranya metode uji titik pojok dan garis selidik. Pada subbab ini, Anda akan mempelajari penentuan nilai optimum menggunakan metode titik pojok. Pada metode uji titik pojok, penentuan nilai optimum fungsi dilakukan dengan cara menghitung nilai fungsi objektif $f(x, y) = ax + by$ pada setiap titik pojok daerah himpunan penyelesaiannya. Bandingkan nilai-nilai $f(x, y) = ax + by$ tersebut, kemudian tetapkan hal berikut.

a. Nilai terbesar dari $f(x, y) = ax + by$, dan
b. Nilai terkecil dari $f(x, y) = ax + by$.

Contoh Soal 1.8

Dengan uji titik pojok, tentukanlah nilai maksimum fungsi objektif $f(x, y) = 100x + 80y$ pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $2x + y \leq 8$; $2x + 3y \leq 12$; $x \geq 0$; dan $y \geq 0$.

Kata Kunci

- titik optimum
- nilai optimum
- uji titik pojok

Notes

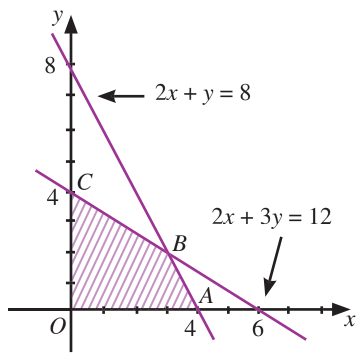
- Nilai yang terbesar merupakan nilai maksimum dari fungsi objektif
- Nilai yang terkecil merupakan nilai minimum dari fungsi objektif

Jawab:

Langkah-langkah penyelesaiannya sebagai berikut.

a. Tentukan grafik himpunan penyelesaian pertidaksamaan $2x + y \le 8$; $2x + 3y \le 12$; $x \ge 0$; dan $y \ge 0$.

Grafik himpunan penyelesaiannya ditunjukkan oleh gambar berikut.



Daerah *OABC* adalah daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan tersebut.

b. Tentukan koordinat titik-titik pojok dari daerah himpunan penyelesaian.

Dari keempat titik-titik *O*, *A*, *B*, dan *C*, koordinat titik *B* belum diketahui. Tentukanlah koordinat titik *B* tersebut. Titik *B* merupakan titik potong garis $2x + y = 8$ dan $2x + 3y = 12$. Anda dapat menggunakan cara eliminasi.

$$\begin{array}{r} 2x + y = 8 \\ 2x + 3y = 12 \\ \hline -2y = -4 \\ y = 2 \end{array} -$$

Substitusikan $y = 2$ ke salah satu persamaan, misalkan $2x + y = 8$.

$\Leftrightarrow 2x + y = 8$

$\Leftrightarrow 2x + 2 = 8$

$\Leftrightarrow 2x = 6$

$x = 3$

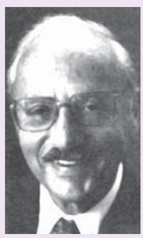
Dari perhitungan, diperoleh titik potongnya, yaitu titik *B* dengan koordinat (3,2). Jadi, semua koordinat titik pojoknya adalah $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(3, 2)$, dan $C(0, 4)$.

c. Tentukan nilai maksimum $f(x, y) = 100x + 80y$ pada titik pojok daerah penyelesaian.

Substitusikanlah semua koordinat titik pojok ke dalam fungsi objektif. Diperoleh hasil pada tabel berikut.

Titik Pojok (x, y)	**Fungsi Objektif $f(x, y) = 100 + 80y$**
Titik $O(0, 0)$	$f(0, 0) = 100(0) + 80(0) = 0$
Titik $A(4, 0)$	$f(4, 0) = 100(4) + 80(0) = 400$
Titik $B(3, 2)$	$f(3, 2) = 100(3) + 80(2) = 460$
Titik $C(0, 4)$	$f(0, 4) = 100(0) + 80(4) = 320$

Jelajah Matematika



Sumber: *Finite Mathematics and Its Applications*, 1994

Untuk mendapatkan solusi optimum dari permasalahan program linear, dapat menggunakan metode simpleks. Metode ini dikembangkan oleh G. B. Dantzig. Metode simpleks diaplikasikan dan disempurnakan oleh Angkatan Udara Amerika Serikat untuk memecahkan persoalan transportasi udara. Sekarang, program linear dapat diselesaikan menggunakan program komputer yang terdapat pada software Lindo, Mathcad, atau Eureka the Solver.

Sumber: *Kalkulus dan Geometri Analitis*, 1994

Dari tabel tersebut, nilai maksimum fungsi diperoleh pada titik $B(3, 2)$, yaitu sebesar 460.
Jadi, nilai maksimumnya adalah 460 pada titik $B(3,2)$.

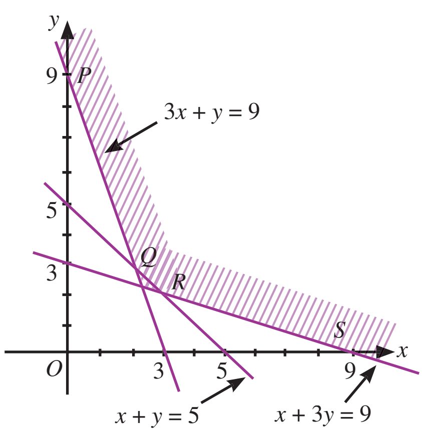
Contoh Soal 1.9

Dengan menggunakan uji titik pojok, tentukan nilai minimum fungsi objektif $f(x, y) = 1.000x + 1.500y$ pada daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut.

$x + y \geq 5$
$x + 3 \geq 9$
$3x + y \geq 9$, jika diketahui $x \geq 0$ dan $y \geq 0$

Jawab:
Langkah-langkah penyelesaiannya sebagai berikut.

a. Tentukan grafik himpunan penyelesaian pertidaksamaan.
$x + y \geq 5$, $x + 3y \geq 9$, $3x + y \geq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
Grafik himpunan penyelesaiannya ditunjukkan oleh gambar berikut.



Daerah yang diarsir adalah himpunan penyelesaian pertidaksamaan tersebut.

b. Tentukan koordinat titik-titik pojok dari daerah himpunan penyelesaiannya.
Dari daerah penyelesaian fungsi terdapat 4 titik pojok. Dari keempat titik tersebut, koordinat titik Q dan R belum diketahui. Tentukanlah koordinat titik Q dan R.

- Titik Q merupakan titik potong garis $3x + y = 9$ dan garis $x + y = 5$.
  Dengan mengeliminasi kedua persamaan tersebut, diperoleh hasil sebagai berikut.

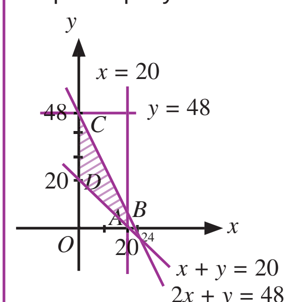
$$\begin{array}{r} x + y = 5 \\ 3x + y = 9 \\ \hline -2x = -4 \\ x = 2 \end{array} -$$

Solusi Cerdas

Nilai maksimum dari $f(x, y) = 20x + 8$ untuk nilai x dan y yang memenuhi $x + y \geq 20$; $2x + y \leq 48$; $0 \leq x \leq 20$, dan $0 \leq y \leq 48$ adalah ....

a. 408
b. 456
c. 464
d. 480
e. 488

Jawab:
Buatlah grafik daerah himpunan penyelesaian



Titik B merupakan titik potong garis $2x + y = 48$ dengan $x = 20$.
Substitusikan $x = 20$ ke persamaan $2x + y = 48$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 48 \\ 2(20) + y &= 48 \\ 40 + y &= 48 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

Jadi, koordinat titik B (20, 8)

Titik Pojok Daerah	$f(x, y) = 20x + 8$
A(20, 0)	20(20) + 8 = 40
B(20, 8)	20(20) + 8 = 408
C(0, 48)	20(0) + 8 = 8
D(0, 20)	20(0) + 8 = 8

Jadi, nilai maksimum $f(x, y) = 20x + 8$ adalah 408

Jawaban: a

Soal SPMB, 2005

Substitusikan $x = 2$ ke dalam salah satu persamaan, misalnya ke persamaan $x + y = 5$.

$x + y = 5$
$y = 5 - x$
$y = 5 - 2$
$= 3$

Jadi, koordinat titik Q adalah (2, 3).

- Titik R merupakan titik potong garis $x + y = 5$ dan garis $x + 3y = 9$.

  Dengan mengeliminasi kedua persamaan tersebut, diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x + 3y = 9 \\ \hline -2y = -4 \\ y = 2 \end{array} -$$

  Substitusikan $y = 2$ ke dalam salah satu persamaan, misalnya $x + y = 5$.

$x + y = 5$
$x = 5 - y$
$x = 5 - 2$
$= 3$

  Jadi, koordinat titik R adalah (3, 2).

Dari perhitungan tersebut, diperoleh semua titik pojok daerah penyelesaian, yaitu $P(0, 9)$, $Q(2, 3)$, $R(3, 2)$, $S(9, 0)$.

c. Tentukan nilai $f(x, y) = 100x + 80y$ pada titik pojok daerah penyelesaian.

Substitusikanlah semua koordinat titik pojok ke dalam fungsi objektif $f(x, y) = 1.000x + 1.500y$. Hasil perhitungannya sebagai berikut.

Titik Pojok (x, y)	Fungsi Objektif $f(x, y) = 1.000x + 1.500y$
Titik $P(0, 9)$	$f(0, 9) = 1.000(0) + 1.500(9) = 13.500$
Titik $Q(2, 3)$	$f(2, 3) = 1.000(2) + 1.500(3) = 6.500$
Titik $R(3, 2)$	$f(3, 2) = 1.000(3) + 1.500(2) = 6.000$
Titik $S(9, 0)$	$f(9, 0) = 1.000(9) + 1.500(0) = 9.000$

Dari tabel tersebut, nilai minimum fungsi yaitu 6.000 diperoleh pada titik $R(3, 2)$.

Jadi, titik optimumnya $R(3, 2)$ dengan nilai optimum 6.000.

Soal Pilihan

Nilai maksimum dari $x + y - 6$ yang memenuhi $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 8y \leq 340$, $7x + 4y \leq 280$ adalah ....

a. 52
b. 51
c. 50
d. 49
e. 48

Soal SPMB, 2002

Contoh Soal 1.10

Pengusaha kue bolu membuat dua jenis adonan kue bolu, yaitu kue bolu A dan kue bolu B. Kue bolu A memerlukan 300 gram terigu dan 40 gram mentega. Kue bolu B memerlukan 200 gram terigu dan

60 gram mentega. Jika tersedia 12 kilogram terigu dan 3 kilogram mentega, berapa banyak adonan kue bolu *A* dan kue bolu *B* yang harus dibuat agar diperoleh jumlah kue sebanyak-banyaknya?

Sumber: *blog.fatfreevegan.com*

Gambar 1.3

Program linear dapat digunakan pada industri kue bolu.

Jawab:

Langkah-langkah pengerjaannya sebagai berikut.

a. Buatlah model matematika.

Anda dapat membuat tabel seperti berikut untuk memudahkan penerjemahan soal cerita ke dalam model matematika.

Bahan yang Diperlukan	Jenis Kue Bolu		Bahan yang Tersedia
	A	*B*	
Terigu	300 gram	200 gram	12.000 gram
Mentega	40 gram	60 gram	3.000 gram

Misalkan, x adalah banyaknya adonan kue bolu *A* dan y adalah banyaknya adonan kue bolu *B*.

Dari tabel tersebut, dapat Anda buat model matematikanya sebagai berikut.

$300x + 200y \leq 12.000 \quad \rightarrow \quad 3x + 2y \leq 120$

$40x + 60y \leq 3.000 \quad \rightarrow \quad 2x + 3y \leq 150$

Banyaknya adonan kue tidak mungkin bernilai negatif maka nilai $x \geq 0$ dan $y \geq 0$. Dari soal cerita, Anda diminta menentukan banyak adonan kue bolu *A* dan kue bolu *B* agar diperoleh jumlah kue sebanyak-banyaknya. Artinya, Anda diminta mencari nilai maksimum dari fungsi objektif.

Fungsi objektif permasalahan ini adalah $f(x, y) = x + y$ (jumlah kue bolu *A* dan kue bolu *B* yang dapat diperoleh).

b. Buatlah grafik himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan dari model matematika yang telah dibuat dengan fungsi kendala berikut.

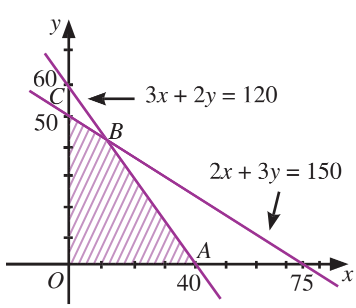
$3x + 2y \leq 120$

$2x + 3y \leq 150$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Grafik penyelesaiannya ditunjukkan oleh gambar berikut.



Daerah yang diarsir adalah daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan.

c. Menentukan koordinat titik pojok dari daerah penyelesaian.
Dari gambar daerah penyelesaian tersebut, terdapat 4 titik pojok, yaitu titik O, A, B, dan C. Dari keempat titik tersebut, koordinat titik B belum diketahui. Tentukanlah koordinat titik B tersebut.
Titik B merupakan titik potong garis $3x + 2y = 120$ dan garis $2x + 3y = 150$ sehingga eliminasilah kedua persamaan garis tersebut untuk memperoleh koordinat titik B.

$$\begin{array}{r|c|r} 3x+2y=120 & \times 3 & 9x+6y=360 \\ 2x+3y=150 & \times 2 & 4x+6y=300 \\ \hline & & 5x=60 \\ & & x=12 \end{array} \; -$$

Substitusikan nilai $x = 12$ ke salah satu persamaan tersebut, misalnya $3x + 2y = 120$.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 120 \\ 3(12) + 2y &= 120 \\ 36 + 2y &= 120 \\ 2y &= 84 \\ y &= 42 \end{aligned}$$

Jadi, koordinat titik B adalah (12, 42).
Dengan demikian, semua koordinat titik pojoknya adalah $O(0, 0)$, $A(40, 0)$, $B(12, 42)$, dan $C(0, 50)$.

d. Menentukan nilai fungsi objektif $f(x, y) = x + y$ pada titik pojok daerah penyelesaian.
Substitusikan semua koordinat titik pojok ke dalam fungsi objektif $f(x, y) = x + y$ sehingga diperoleh hasil seperti pada tabel berikut.

Titik Pojok (x, y)	**Fungsi Objektif $f(x, y) = x + y$**
Titik $O(0, 9)$	$f(0, 0) = 0 + 0 = 0$
Titik $A(40, 0)$	$f(40, 0) = 40 + 0 = 40$
Titik $B(12, 42)$	$f(12, 42) = 12 + 42 = 54$
Titik $C(0, 50)$	$f(0, 50) = 0 + 50 = 50$

Dari tabel tersebut nilai maksimum fungsi objektif adalah 54 untuk nilai $x = 12$ dan nilai $y = 42$.
Jadi, agar diperoleh jumlah kue bolu sebanyak-banyaknya, harus dibuat adonan kue bolu A sebanyak 12 dan adonan kue bolu B sebanyak 42.

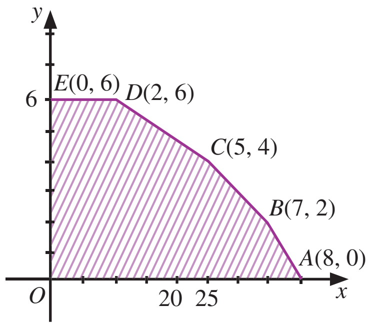
Tugas Siswa 1.2

Tentukanlah nilai maksimum dan minimum dari model matematika yang Anda buat pada Tugas Siswa 1.1. Kemudian, kumpulkan tugas tersebut pada guru Anda.

Evaluasi Materi 1.3

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Gambar berikut adalah grafik himpunan penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan.



Pada daerah himpunan penyelesaian tersebut, tentukan nilai maksimum dari fungsi-fungsi berikut ini.

a. $f(x, y) = x + y$
b. $f(x, y) = 2x + y$
c. $f(x, y) = 500x + 400y$

2. Tentukan nilai maksimum fungsi objektif $f(x, y) = 3x + 2y$ dari sistem pertidaksamaan berikut.

$2y + x \leq 50$
$2y + 5x \leq 30$
$x \geq 0, y \geq 0$

3. Tentukan titik optimum, yaitu titik yang memberikan nilai minimum pada fungsi objektif $f(x, y) = 3x + y$ pada daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan
$x + 2y \geq 8$
$y - x \leq 5$
$2 \leq x \leq 6$

4. Dari sistem pertidaksamaan
$x + y \geq 4$
$x + 2y \geq 6$
$y - x \leq 4$
$x \leq 4$
Tentukan titik optimum, yaitu titik yang memberikan nilai minimum fungsi objektif $f(x, y) = 2x + y$.

5. Tentukan nilai minimum dari fungsi objektif $f(x, y) = 2x + 3y$ pada sistem pertidaksamaan berikut.
$x + y \geq 3$
$x + 4y \leq 6$
$4x + y \geq 6$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

6. Seorang pengusaha tas memiliki modal Rp840.000,00. Ia bermaksud memproduksi dua model tas, yaitu model *A* dan model *B*. Biaya pembuatan untuk sebuah tas model *A* adalah Rp30.000,00 dan biaya pembuatan sebuah tas model *B* adalah Rp40.000,00. Keuntungan dari penjualan setiap tas model *A* adalah Rp5.000,00 dan dari tas model *B* adalah Rp8.000,00. Pengrajin tas tersebut hanya akan membuat 25 tas karena tempat penyimpanan terbatas. Tentukanlah besar keuntungan maksimum yang bisa diperoleh. Berapa banyak tas model *A* dan *B* yang harus dibuat untuk mendapatkan keuntungan maksimum tersebut?

Sumber: *www.abletools.co.uk*

7. Seorang pedagang pakaian mendapatkan keuntungan Rp1.000,00 dari setiap penjualan kemeja dewasa yang harganya Rp10.000,00 dan mendapat keuntungan Rp750,00 untuk setiap penjualan kemeja anak yang harganya Rp8.000,00. Modal yang ia miliki seluruhnya adalah Rp4.000.000,00, sedangkan kapasitas tokonya adalah 450 kemeja.

a. Berapa banyaknya kemeja dewasa dan kemeja anak yang harus dibeli agar pemilik toko tersebut mendapat untung yang sebesar-besarnya?

b. Berapa keuntungan maksimum dari penjualan pakaian tersebut?

8. Seorang pengrajin membuat sapu lidi dan sapu ijuk. Dalam satu hari paling banyak ia membuat 18 buah (untuk kedua jenis). Biaya yang dikeluarkannya untuk membuat sebuah sapu lidi adalah Rp500,00 dan untuk sebuah sapu ijuk adalah Rp1.000,00. Pengrajin tidak mengeluarkan uang lebih dari Rp13.000,00 untuk pembelian bahan dalam satu hari.Tentukan keuntungan maksimum yang diperoleh jika untuk setiap sapu lidi ia memperoleh keuntungan Rp200,00 dan Rp300,00 untuk setiap sapu ijuk. Tentukan pula banyaknya sikat dan sapu yang harus dibuat untuk mendapatkan keuntungan maksimum tersebut.

Sumber: *farm1.static.flickr.com*

9. Seorang petani memiliki tanah tidak kurang dari 8 ha. Ia merencanakan akan menanam padi seluas 2 ha sampai dengan 6 ha, dan menanam sayur-sayuran seluas 3 ha sampai dengan 7 ha. Biaya penanaman padi per ha Rp400.000,00, sedangkan untuk menanam sayuran diperlukan biaya Rp200.000,00 per ha.

a. Buatlah model matematikanya.

b. Gambarlah grafik daerah himpunan penyelesaiannya.

c. Tentukan fungsi objektifnya.

d. Berapa ha masing-masing tanah harus ditanam agar biaya yang dikeluarkan seminimal mungkin?

10. Seorang pengusaha menerima pesanan 100 stel pakaian seragam SD dan 120 stel pakaian seragam SMP. Pengusaha tersebut memiliki dua kelompok pekerja, yaitu kelompok A dan kelompok B. Kelompok A setiap hari dapat menyelesaikan 10 stel pakaian seragam SD dan 4 stel pakaian seragam SMP dengan ongkos Rp100.000,00 per hari. Adapun kelompok B setiap hari dapat menyelesaikan 5 stel pakaian seragam SD dan 12 stel pakaian seragam SMP, dengan ongkos Rp80.000,00 per hari. Jika kelompok A bekerja x hari dan kelompok B bekerja y hari, tentukan:

a. model matematika;

b. grafik himpunan penyelesaian;

c. fungsi objektif;

d. biaya yang seminimal mungkin.

Sumber: *farm1.static.flickr.com*

D Menentukan Nilai Optimum dengan Garis Selidik

Selain dengan menggunakan uji titik pojok, nilai optimum juga dapat ditentukan dengan menggunakan garis selidik. Persamaan garis selidik dibentuk dari fungsi objektif. Jika fungsi objektif suatu program linear $f(x, y) = ax + by$ maka persamaan garis selidik yang digunakan adalah $ax + by = ab$, dengan $ab \in \mathbb{R}$.

Kata Kunci

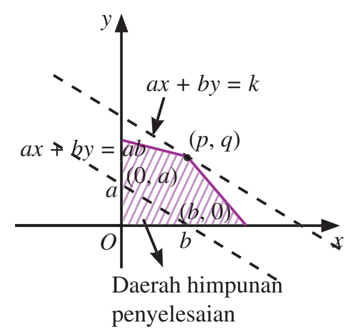
- garis selidik
- fungsi objektif
- nilai maksimum
- nilai minimum

1. Menentukan Nilai Maksimum Fungsi Objektif $f(x, y) = ax + by$

Untuk menentukan nilai maksimum suatu fungsi objektif $f(x, y) = ax + by$ menggunakan garis selidik, ikutilah langkah-langkah berikut dan perhatikan Gambar 1.4.

a. Setelah diperoleh daerah himpunan penyelesaian pada grafik Cartesius, bentuklah persamaan garis $ax + by = ab$ yang memotong sumbu-x di titik $(b, 0)$ dan memotong sumbu-y di titik $(0, a)$.

b. Buatlah garis-garis yang sejajar dengan $ax + by = ab$. Temukan garis sejajar yang melalui suatu titik pojok daerah himpunan penyelesaian dan terletak paling jauh dari titik $O(0, 0)$. Misalnya, garis sejajar tersebut adalah $ax + by = k$, melalui titik pojok (p, q) yang terletak paling jauh dari titik $O(0, 0)$. Titik (p, q) tersebutlah yang merupakan titik maksimum. Nilai maksimum fungsi objektif tersebut adalah $f(p, q) = ap + bq$.



Gambar 1.4

Contoh garis selidik pada suatu daerah himpunan penyelesaian.

Contoh Soal 1.10

Suatu program linear dapat diterjemahkan ke dalam model matematika berikut.

$x + 3y \le 9$
$2x + y \le 8$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

Tentukan titik maksimum fungsi objektif $f = x + 2y$. Kemudian, tentukan nilai maksimumnya.

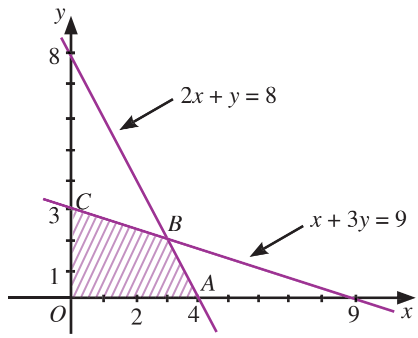
Search

Ketik: http://matematika-sma.blogspot.com/2007/08/utak-atik-program-linear.html
Website tersebut memuat informasi mengenai program linear.

Jawab:

Langkah-langkah penyelesaian

a. Gambar grafik himpunan penyelesaian dari model matematika.



Daerah *OABC* adalah daerah himpunan penyelesaian pertidak-samaan.

b. Carilah titik *B*.

Titik *B* merupakan perpotongan garis $x + 3y = 9$ dengan garis $2x + y = 8$. Dengan cara eliminasi dan substitusi, tentukanlah koordinat titik *B*.

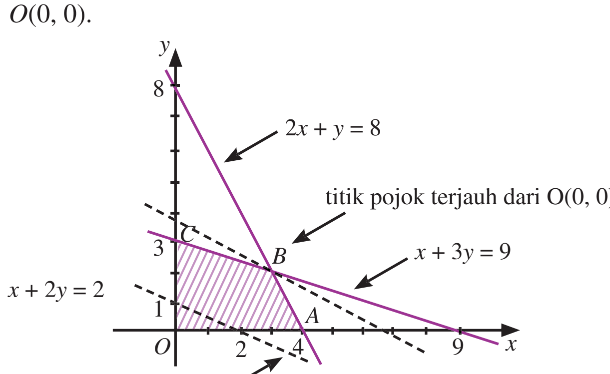
$$\begin{array}{r|c|r} x+3y=9 & \times 1 & x+3y=9 \\ 2x+y=8 & \times 3 & 6x+3y=24 \\ \hline & & -5x=-15 \\ & & x=3 \end{array}$$

Substitusikanlah $x = 3$ ke salah satu persamaan. Misalnya, ke persamaan $x + 3y = 9$.

$x + 3y = 9$
$3y = 9 - x$
$3y = 9 - 3$
$\Leftrightarrow\ 3y = 6$
$\Leftrightarrow\ \ y = 2$

Jadi, koordinat titik $B(3, 2)$.

c. Gambar garis $x + 2y = 2$ sebagai garis selidik. Kemudian, gambarlah garis-garis yang sejajar dengan garis $x + 2y = 2$ sampai diperoleh garis yang melalui titik pojok terjauh dari titik $O(0, 0)$.



Dari gambar tersebut, titik $B(3, 2)$ adalah titik terjauh yang dilalui oleh garis yang sejajar dengan garis selidik $x + 2y = 2$. Oleh karena itu, titik $B(3, 2)$ adalah titik maksimum. Nilai maksimumnya diperoleh dengan menyubstitusikan titik $B(3, 2)$ ke fungsi objektif.

$f(x, y) = x + 2y$

$f(3, 2) = 3 + 2(2) = 7$.

Dengan demikian, diperoleh nilai maksimum fungsi objektif $f(x, y) = x + 2y$ adalah 7.

Contoh Soal 1.12

Seorang pedagang roti memiliki modal Rp60.000,00. Ia merencanakan menjual roti *A* dan roti *B*. Roti *A* dibeli dari agen Rp600,00 per bungkus, sedangkan roti *B* dibeli dari agen Rp300,00 per bungkus. Keuntungan yang diperoleh pedagang itu adalah Rp150,00 untuk setiap penjualan sebungkus roti *A* dan Rp100,00 untuk setiap penjualan sebungkus roti *B*.

Oleh karena keterbatasan tempat, pedagang roti itu hanya akan menyediakan 150 bungkus roti. Tentukan keuntungan maksimum yang dapat diperoleh oleh pedagang. Berapa bungkus roti *A* dan roti *B* yang harus disediakan? Selesaikanlah masalah tersebut dengan menggunakan metode garis selidik.

Sumber: *farm2.static.flickr.com*

Gambar 1.5

Perhitungan keuntungan maksimum roti dapat dilakukan dengan metode garis selidik.

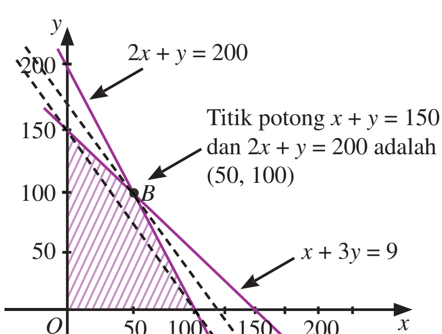
Jawab:

Misalkan, pedagang menyediakan x bungkus roti *A* dan y bungkus roti *B* maka model matematika yang diperoleh adalah

$$600x + 300y \le 60.000 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + y \le 200$$
$$x + y \le 150$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

$f(x, y) = 150x + 100y$

Daerah himpunan penyelesaiannya adalah daerah yang diarsir pada gambar berikut.

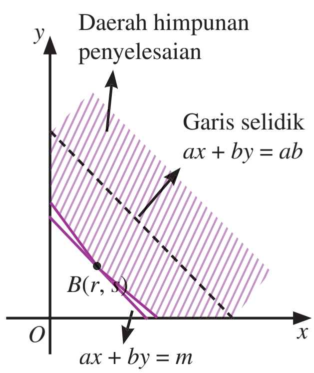


Buatlah garis selidik $150x + 100y = 15.000$ dan buatlah garis-garis yang sejajar dengan garis $150x + 100y = 15.000$ tersebut.

Garis sejajar yang terletak paling jauh dari $O(0, 0)$ melalui titik $B(50, 100)$. Titik maksimum fungsi diperoleh untuk titik $B(50, 100)$. Nilai maksimum fungsi = $f(50, 100) = 150(50) + 100(100) = 17.500$.
Jadi, pedagang tersebut akan memperoleh keuntungan maksimum sebesar Rp17.500 dengan menjual roti *A* sebanyak 50 bungkus dan roti *B* sebanyak 100 bungkus.

Tugas Siswa 1.3

Kerjakanlah bersama teman Anda. Selesaikan Contoh 1.9 dan 1.10 dengan menggunakan cara garis selidik. Setelah itu, selesaikan Contoh 1.11 dan 1.12 dengan menggunakan uji titik pojok. Apakah hasilnya sama? Cara mana yang Anda anggap lebih mudah? Kemukakan alasannya.



Gambar 1.6

Contoh garis selidik untuk menentukan nilai minimum fungsi objektif.

2. Menentukan Nilai Minimum Fungsi Objektif $f(x, y) = ax + by$

Untuk menentukan nilai minimum suatu bentuk fungsi objektif $f(x, y) = ax + by$ dengan menggunakan garis selidik, ikutilah langkah-langkah berikut dan perhatikan Gambar 1.6.

a. Bentuklah persamaan garis $ax + by = ab$ memotong sumbu-x di titik $(b, 0)$ dan memotong sumbu-y di titik $(0, a)$

b. Buatlah garis-garis yang sejajar dengan $ax + by = ab$ sehingga ditemukan garis yang melalui titik pojok yang terdekat dari titik $O(0, 0)$. Misalkan garis $ax + by = m$, melalui titik (r, s) yang terletak pada daerah himpunan penyelesaian dan terletak paling dekat dengan titik $O(0, 0)$ titik (r, s) tersebut merupakan titik minimum. Nilai minimum fungsi objektif tersebut adalah $f(r, s) = ar + bs$.

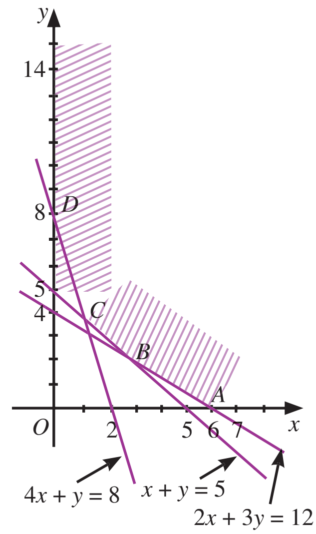
Contoh Soal 1.13

Suatu masalah program linear dapat diterjemahkan ke dalam model matematika berikut.
$2x + 3y \geq 12$
$x + y \geq 5$
$4x + y \geq 8$
$x \geq 0$
$y \geq 0$
Tentukan titik minimum fungsi objektif $f(x, y) = 14x + 7y$ dan tentukan nilai minimumnya.

Jawab:

Langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut.

a. Gambar daerah himpunan penyelesaian model matematika seperti pada gambar di samping.
Daerah yang diarsir adalah daerah himpunan penyelesaiannya



b. Carilah koordinat titik B dan C.
Titik B merupakan perpotongan garis $2x + 3y = 12$ dan garis $x + y = 5$. Dengan cara eliminasi dan substitusi dapat diperoleh koordinat titik B.

$$\begin{array}{r|l|l} 2x+3y=12 & \times 1 & 2x+3y=12 \\ x+\ \ y=\ 5 & \times 3 & 3x+3y=15 \\ \hline & & -x=-3 \\ & & x=3 \end{array}$$

Substitusikan $x = 3$ ke salah satu persamaan tersebut, misalnya ke $x + y = 5$.

$x + y = 5$
$\Leftrightarrow y = 5 - 3$
$\Leftrightarrow y = 2$

Jadi, koordinat titik B adalah (3, 2)

Titik C merupakan perpotongan garis $4x + y = 8$ dan garis $x + y = 5$. Dengan cara eliminasi dan substitusi, dapat diperoleh koordinat titik C.

$$\begin{array}{r} 4x+y=8 \\ x+y=5 \\ \hline 3x=3 \\ x=1 \end{array} -$$

Substitusikan $x = 1$ ke salah satu persamaan tersebut, misalnya ke $x + y = 5$.

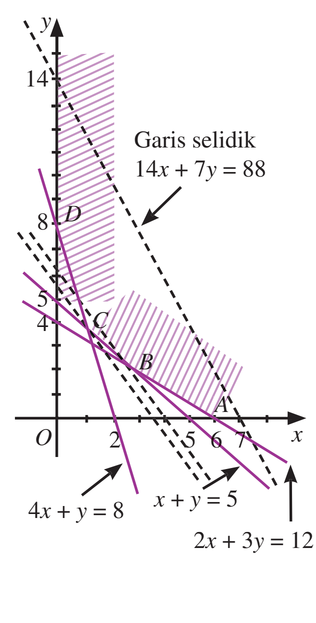
$x + y = 5$
$y = 5 - x$
$\Leftrightarrow = 5 - 1$
$\Leftrightarrow = 4$

Jadi, koordinat titik $C(1, 4)$.

c. Buat garis selidik dari fungsi objektif $f(x, y) = 14x + 7y$.
Gambarlah garis selidik $14x + 7y = 88$ atau sederhanakan menjadi $2x + y = 14$. Gambarlah garis-garis yang sejajar dengan $2x + y = 14$. Temukan titik pojok yang terdekat dari titik $O(0, 0)$ yang dilalui garis sejajar tersebut.
Terlihat pada gambar titik $C(1, 4)$ dilalui oleh garis yang sejajar dengan garis selidik $2x + y = 14$. Oleh karena itu, titik $C(1, 4)$ merupakan titik minimum.
Nilai minimum fungsi objektif diperoleh dengan menyubstitusikan C(1, 4) ke dalam $f(x, y) = 14x + 7y$.

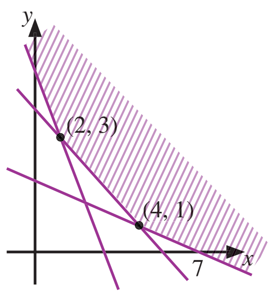
$$\begin{aligned} f(1, 4) &= 14\ (1) + 7\ (4) \\ &= 14 + 28 \\ &= 42 \end{aligned}$$

Dengan demikian, nilai minimumnya adalah 42.



Soal Pilihan

Perhatikan gambar berikut.



Daerah yang diarsir pada gambar tersebut menyatakan daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan. Nilai minimum $x + y$ pada daerah penyelesaian tersebut adalah ....

a. 9 **d.** 3
b. 7 **e.** 1
c. 5

Kegiatan Siswa 1.2

Carilah informasi mengenai penggunaan Microsoft Excel pada penyelesaian masalah program linear. Kerjakan soal-soal Evaluasi Materi 1.3 dengan menggunakan Microsoft Excel. Bandingkan hasilnya dengan perhitungan manual. Kemukakan hasilnya di depan kelas.

Tugas Siswa 1.4

Diskusikan bersama teman sekelompok Anda untuk memperoleh solusi dari persoalan berikut. Bagilah anggota kelompok menjadi dua bagian. Satu bagian mengerjakan soal dengan metode uji titik pojok dan yang lainnya menggunakan metode garis selidik. Bandingkan dan apa yang dapat Anda simpulkan?

Pabrik x memproduksi dua model arloji, yaitu arloji bermerek terkenal dan arloji bermerek biasa. Untuk memproduksi arloji tersebut dilakukan melalui dua tahap. Tahap pertama, untuk arloji bermerek terkenal memerlukan waktu produksi selama 6 jam dan pada tahap kedua selama 8 jam. Sementara itu, arloji bermerek biasa memerlukan waktu produksi selama 5 jam pada tahap pertama dan 4 jam pada tahap kedua. Kemampuan karyawan melakukan produksi tahap pertama maksimum 560 jam setiap minggu dan untuk melakukan produksi tahap kedua maksimum 500 jam setiap minggu. Kedua model arloji ini akan dipasarkan dengan keuntungan sebesar Rp120.000,00 per buah untuk arloji bermerek terkenal dan sebesar Rp80.000, 00 per buah untuk arloji bermerek biasa.

1. Buatlah model matematika masalah program linear tersebut.
2. Berapakah banyaknya setiap model arloji harus diproduksi supaya memberikan keuntungan maksimum?
3. Berapakah keuntungan maksimum yang diterima oleh pabrik tersebut?

Evaluasi Materi 1.4

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

Gunakan garis selidik untuk menyelesaikan sistem pertidaksamaan berikut.

1. Tentukan nilai maksimum dari fungsi objektif $f(x, y) = 2x + 3y$ untuk sistem pertidaksamaan berikut.
   a. $2x + 5y \leq 20$
      $2x + 5y \leq 16$
      $x \geq 0$
      $y \geq 0$
   b. $8x + y \leq 8$
      $7x + 2y \leq 28$
      $x \geq 0$
      $y \geq 0$
2. Tentukan nilai maksimum fungsi objektif $f(x, y) = 2x + 5y$ pada sistem pertidaksamaan berikut.
   $x + y \leq 12$
   $x + 2y \leq 16$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$
3. Tentukan nilai minimum dari $f(x, y) = 4x + 3y$ untuk kendala sebagai berikut.
   a. $4x + 2y \geq 8$
      $2x + 6y \geq 8$
      $x \geq 0$
      $y \geq 0$
   b. $2x + 3y \geq 12$
      $2x + 2y \geq 10$
      $x \geq 0$
      $y \geq 0$
4. Tentukan nilai minimum dari $f(x, y) = 3x + 4y$ pada sistem pertidaksamaan berikut.
   $2x + y \geq 8$
   $x + 2y \geq 8$
   $x + y \geq 6$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$
5. Seorang pengusaha pemancingan ikan memiliki tanah seluas 456 m^2. Dia akan membuat dua macam kolam ikan, yaitu beberapa kolam ikan lele dengan luas masing-masing 6 m^2 dan beberapa kolam ikan nila dengan luas masing-masing 24 m^2. Banyak kolam yang akan dibuat tidak lebih dari 40 buah. Jika dari tiap kolam ikan lele akan diperoleh hasil Rp200.000,00 dan dari setiap kolam ikan nila akan diperoleh hasil Rp300.000,00, tentukan:
   a. model matematikanya;
   b. bentuk objektifnya;
   c. hasil yang dapat diperoleh sebanyak-banyaknya.
6. Untuk membuat jam kayu dari pinus, seorang seniman memerlukan waktu 2 jam dan 1 ons cairan pernis. Adapun untuk membuat jam kayu oak diperlukan waktu 2 jam dan 4 ons cairan pernis. Tersedia 16 ons pernis dan waktu kerja 20 jam. Keuntungan penjualan jam kayu pinus dan jam kayu oak berturut-turut Rp24.000,00 dan Rp32.000,00 per buah. Berapa banyak jam yang harus dibuat untuk setiap jenis jam agar mendapat keuntungan maksimum?
7. Sinta membuat dua jenis taplak meja, kemudian dijual. Taplak jenis pertama memerlukan 1 m kain dan taplak jenis kedua memerlukan 6 m kain. Kain yang diperlukan untuk membuat taplak jenis pertama adalah 1 m dan taplak jenis kedua adalah 6 m, sedangkan kain yang tersedia adalah 24 m. Keuntungan penjualan taplak jenis pertama adalah Rp8.000,00 dan keuntungan penjualan taplak jenis kedua adalah Rp32.000,00. Berapa banyak taplak setiap jenisnya yang harus terjual agar mendapat keuntungan maksimum?

Ringkasan

- Program linear merupakan salah satu ilmu matematika yang digunakan untuk memaksimumkan atau meminimumkan fungsi objektif dengan kendala tertentu.
- Program linear terdiri atas fungsi objektif dan kendala. Kendala pada program linear berbentuk pertidaksamaan.
- Untuk menentukan nilai optimum (nilai maksimum atau nilai minimum) suatu fungsi objektif dapat digunakan metode uji titik pojok dan metode garis selidik.

Kaji Diri

Setelah mempelajari materi Bab Program Linear ini, adakah materi yang belum Anda pahami? Materi manakah yang belum Anda pahami? Diskusikanlah bersama teman dan guru Anda.

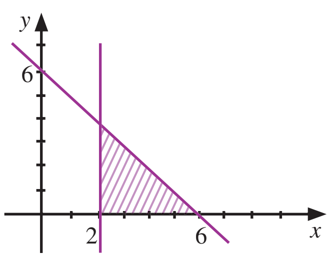
Evaluasi Materi Bab 1

Kerjakan di buku latihan Anda.

A. Pilihlah satu jawaban yang tepat.

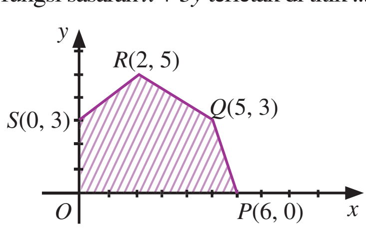
1. Seorang koki membuat 2 jenis roti. Roti I memerlukan 100 g tepung dan 25 g mentega, sedangkan roti jenis II memerlukan 50 g tepung dan 50 g mentega. Koki memiliki persediaan 1,5 kg tepung dan 1 kg mentega. Jika x merupakan banyak roti I dan y merupakan banyak roti II, pertidaksamaan yang mungkin untuk membuat kedua jenis roti sebanyak-banyaknya adalah ....
   a. $2x + y \leq 20, x + 2y \leq 60, x \geq 0, y \geq 0$
   b. $4x + y \leq 60, x + y \leq 20, x \geq 0, y \geq 0$
   c. $2x + y \leq 30, 2x + 3y \leq 60, x \geq 0, y \geq 0$
   d. $x + 2y \leq 20, 2x + 2y \leq 40, x \geq 0, y \geq 0$
   e. $2x + y \leq 30, x + 2y \leq 40, x \geq 0, y \geq 0$

2. Daerah yang diarsir pada gambar berikut merupakan himpunan penyelesaian dari ....



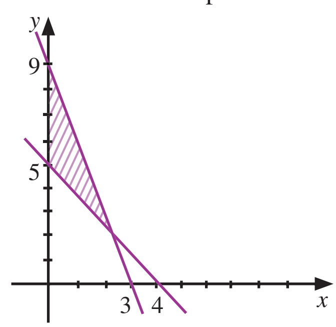
   a. $x + y \leq 6, x \geq 2, y \geq 0$
   b. $x - y \leq 6, x \leq 2, y \geq 0$
   c. $x + y \leq 6, x \leq 2, y \geq 0$
   d. $x + y \leq 6, x \leq 2, y \leq 0$
   e. $x - y \leq 6, x \geq 2, y \geq 0$

3. Jika segilima $OPQRS$ merupakan himpunan penyelesaian program linear maka maksimum fungsi sasaran $x + 3y$ terletak di titik ....



   a. $O(0, 0)$
   b. $P(6, 0)$
   c. $Q(5, 3)$
   d. $R(2, 5)$
   e. $S(0, 3)$

4. Daerah yang diarsir pada diagram berikut memenuhi sistem pertidaksamaan ....

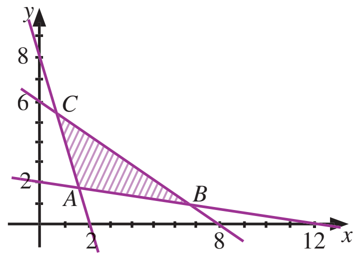


   a. $3x + y \leq 9, 5x + 4y \leq 20, x \geq 0, y \geq 0$
   b. $3x + y \geq 9, 5x + 4y \leq 20, x \geq 0, y \geq 0$
   c. $3x + y \geq 9, 5x + 4y \geq 20, x \geq 0, y \geq 0$
   d. $3x + y \leq 9, 5x + 4y \geq 20, x \geq 0, y \geq 0$
   e. $3x + y \geq 9, 5x + 4y \leq 20, x \geq 0, y \geq 0$

5. Nilai minimum fungsi objektif $f(x, y) = 3x + 7y$ untuk sistem pertidaksamaan $2x + 3y \geq 6$, $x + 3y \geq 3$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ adalah ....
   a. 6
   b. 7
   c. 8
   d. 9
   e. 10

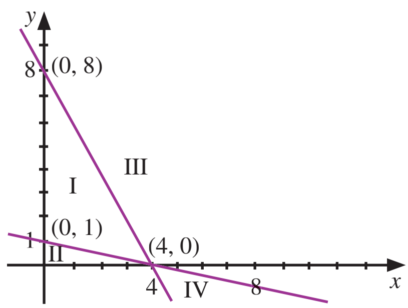
6. Jika diketahui $P = x + y$ dan $Q = 5x + y$ maka nilai maksimum dari P dan Q pada sistem pertidaksamaan $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \leq 12$ dan $2x + y \leq 12$ adalah ....
   a. 8 dan 30
   b. 6 dan 6
   c. 4 dan 6
   d. 6 dan 24
   e. 8 dan 24

7. Koordinat titik-titik segitiga ABC dari gambar berikut memenuhi pertidaksamaan ....



a. $4x + y \geq 8, 3x + 4y \leq 24, x + 6y \geq 12$
b. $4x + y \geq 8, 4x + 3y \geq 24, 6x + y \geq 12$
c. $x + y \geq 8, 3x + 4y \leq 24, x + 6y \geq 12$
d. $4x + y \leq 8, 3x + 4y \geq 24, 6x + y \geq 12$
e. $x + 4y \geq 8, 3x + 4y \geq 24, x + 6y \geq 12$

Perhatikan gambar berikut, untuk menjawab soal nomor 8–11.

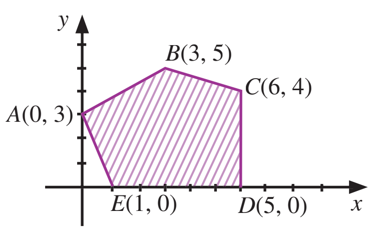


8. Daerah I merupakan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear ....
   a. $x \geq 0, y \geq 0, 2x + 8y \leq 8; 4x + 2y \geq 16$
   b. $x \geq 0, y \geq 0, 2x + 8y \geq 8; 4x + 2y \geq 16$
   c. $x \geq 0, y \geq 0, 2x + 8y \geq 8; 4x + 2y \leq 16$
   d. $x \geq 0, y \geq 0, 2x + 8y \leq 8; 4x + 2y \leq 16$
   e. $x \geq 0, 2x + 8y \geq 8; 4x + 2y \geq 16$
9. Daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 8y \leq 8$ adalah ....
   a. I d. I dan II
   b. II e. semua salah
   c. III
10. Nilai maksimum pada daerah I untuk fungsi objektif $f(x, y) = 2x + y$ adalah ....
    a. 8 d. 64
    b. 16 e. 128
    c. 32
11. Nilai minimum pada daerah penyelesaian IV untuk fungsi objektif $f(x, y) = 3x + 5y$ adalah ....
    a. 10 d. 15
    b. 11 e. 20
    c. 12
12. Seorang pengusaha taman hiburan ingin membeli sepeda anak-anak dan sepeda dewasa untuk disewakan. Jumlah kedua sepeda yang akan dibeli sebanyak 25 buah. Harga sebuah sepeda anak-anak Rp300.000,00 dan sepeda dewasa Rp700.000,00. Modal yang tersedia Rp15.000.000,00. Model matematika yang memenuhi masalah tersebut adalah ....
    a. $x + 140y \leq 3.000$
       $x + y \leq 25$
       $x \geq 0$
       $y \geq 0$
    b. $7x + 14y \leq 3.000$
       $x + y \leq 25$
       $x \geq 0$
       $y \geq 0$
    c. $7x + 140y \leq 300$
       $x + y \leq 25$
       $x \geq 0$
    d. $35x + 7y \leq 3.000$
       $x + y \leq 35$
       $x \geq 0$
       $y \geq 0$
    e. $35x + 7y \leq 300$
       $x + y \leq 25$
       $x \geq 0$
       $y \geq 0$
13. Seorang pedagang kerajinan tradisional membeli tidak lebih dari 25 benda kerajinan untuk persediaan. Ia ingin membeli benda jenis *A* dengan harga Rp30.000,00 dan sepatu jenis *B* seharga Rp40.000,00. Ia merencanakan tidak akan mengeluarkan uang lebih dari Rp840.000,00. Apabila ia mengharap laba Rp10.000,00 untuk setiap benda *A* dan Rp12.000,00 untuk setiap benda *B* maka laba maksimum yang diperoleh pedagang adalah ....
    a. Rp168.000,00
    b. Rp186.000,00
    c. Rp268.000,00
    d. Rp286.000,00
    e. Rp386.000,00

14. Pada pembuatan pakaian A diperlukan 6 jam pada mesin bordir dan 4 jam pada mesin jahit. Pembuatan pakaian B memerlukan 2 jam pada mesin bordir dan 8 jam pada mesin jahit. Kedua mesin tersebut setiap harinya bekerja tidak lebih dari 18 jam. Jika setiap hari dibuat x buah pakaian A dan y buah pakaian B maka model matematika dari masalah tersebut adalah ....
   - **a**. $3x + y \geq 9, 2x + 4y \geq 9, x \geq 0, y \geq 0$
   - **b**. $x + 3y \geq 9, 2x + y \leq 9, x \geq 0, y \geq 0$
   - **c**. $3x + y \geq 9, x + 4y \geq 9, x \geq 0, y \geq 0$
   - **d**. $3x + y \leq 9, x + 2y \leq 9, x \geq 0, y \geq 0$
   - **e**. $3x + y \leq 9, 2x + 4y \leq 9, x \geq 0, y \geq 0$

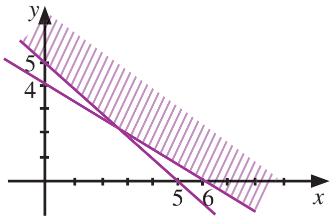
15. Titik-titik berikut yang *bukan* merupakan anggota himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $x + 2y \geq 10$, $x + y \leq 8$ dan $y \leq x + 4$ adalah ....
   - **a**. (1, 5)
   - **b**. (2, 6)
   - **c**. (3, 4)
   - **d**. (4, 4)
   - **e**. (6, 1)

16. Daerah segilima $ABCDE$ merupakan himpunan penyelesaian suatu program linear. Nilai maksimum dan minimum dari fungsi objektif $3x - 2y$ untuk x dan y bilangan asli adalah ....



   - **a**. 10 dan –1
   - **b**. 10 dan –6
   - **c**. 15 dan –6
   - **d**. 15 dan –1
   - **e**. 15 dan 10

17. Perhatikan gambar berikut.



Daerah yang diarsir pada gambar tersebut merupakan daerah penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan. Nilai minimum yang memenuhi fungsi objektif $p = 4x + 3y$ adalah ....
   - **a**. 12
   - **b**. 15
   - **c**. 17
   - **d**. 18
   - **e**. 24

18. Sebuah pesawat udara memiliki 48 tempat duduk yang terbagi ke dalam dua kelas, yaitu kelas A dan kelas B. Setiap penumpang kelas A boleh membawa 60 kg barang, sedangkan penumpang kelas B hanya 20 kg. Bagasi paling banyak memuat 1.440 kg. Jika banyak penumpang kelas A adalah x orang dan banyak penumpang kelas B adalah y orang maka sistem pertidaksamaan yang memenuhi persoalan tersebut adalah ....
   - **a**. $x \geq 0; y \geq 0$
$x + y \geq 48; 20x + 60y \geq 1.440$
   - **b**. $x \geq 0; y \geq 0$
$x + y \leq 48; 60x + 20y \leq 1.440$
   - **c**. $x \geq 0; y \geq 0$
$x + y \leq 48; 20x + 60y \leq 1.440$
   - **d**. $x \geq 0; y \geq 0$
$x + y \geq 48; 60x + 20y \geq 1.440$
   - **e**. $x \geq 0; y \geq 0$
$x + y \geq 48; 60x + 20y \leq 1.440$

19. Sinta seorang pembuat kue dalam satu hari paling banyak dapat membuat 80 kue. Biaya pembuatan kue jenis pertama adalah Rp500,00 per buah dan biaya pembuatan kue jenis kedua adalah Rp300,00 per buah. Keuntungan kue jenis pertama Rp200,00 per buah dan keuntungan kue jenis kedua adalah Rp300,00 per buah. Jika modal pembuatan kue adalah Rp34.000,00 maka keuntungan terbesar yang diperoleh Sinta adalah ....
   - **a**. Rp12.000,00
   - **b**. Rp19.000,00
   - **c**. Rp20.000,00
   - **d**. Rp22.000,00
   - **e**. Rp25.000,00

20. Dengan persediaan kain polos 30 m dan kain bergaris 10 m seorang penjahit akan membuat dua model pakaian jadi. Model I memerlukan 1 m kain polos dan 1,5 m kain

bergaris. Model II memerlukan 2 m kain polos dan 0,5 m kain bergaris. Jumlah total pakaian jadi akan maksimum jika model I dan model II masing-masing berjumlah ....

a. 4 dan 8
b. 5 dan 9
c. 6 dan 4
d. 7 dan 5
e. 8 dan 6

B. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukan nilai maksimum dari fungsi objektif $f(x, y) = 50x + 45y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan berikut.

$x + y \leq 18$

$15x + 12y \leq 120$

$x \geq 0, y \geq 0$

$x, y \in c$

2. Tentukan nilai minimum dari fungsi objektif $f(x, y) = 3x + 2y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan berikut.

$3x + y \geq 6$

$x + 4y \geq 8$

$x + y \geq 4$

$x \geq 0, y \geq 0$

3. Pembuatan suatu jenis roti memerlukan 200 gram tepung dan 25 gram mentega. Roti jenis lain memerlukan 100 gram tepung dan 50 gram mentega. Tersedia 4 kg tepung dan 1,2 kg mentega. Jika satu buah roti jenis pertama memberikan keuntungan Rp2.000,00 dan satu buah roti jenis kedua memberikan keuntungan Rp2.500,00, tentukan keuntungan maksimum yang diperoleh jika roti itu habis terjual?

4. Seorang pemilik toko cinderamata mendapat untung Rp1.000,00 untuk penjualan gelang yang harganya Rp10.000,00, dan mendapat untung Rp750,00 untuk penjualan gantungan kunci yang harganya Rp8.000,00. Modal yang ia miliki seluruhnya adalah Rp4.000.000,00, sedangkan kapasitas tokonya adalah 450 cinderamata.

a. Berapa banyak gelang dan gantungan kunci yang harus dibeli pemilik toko tersebut untuk mendapatkan untung sebesar-besarnya?

b. Berapakah keuntungan maksimumnya?

5. Sebuah pabrik bubut kayu sebagai bahan dasar pembuat kursi, memproduksi dua jenis kayu bubut, dengan menggunakan tiga jenis mesin yang berbeda. Untuk memproduksi kayu bubut jenis *A* menggunakan mesin I selama 2 menit, mesin II selama 3 menit, dan mesin II selama 4 menit. Untuk memproduksi kayu bubut jenis *B*, menggunakan mesin I selama 6 menit, mesin II selama 4 menit, dan mesin III selama 3 menit. Tentukan keuntungan maksimum yang diperoleh pabrik tersebut dalam setiap 3 jam, jika keuntungan setiap produk jenis I Rp 2.500,00 dan jenis II Rp3.000,00.

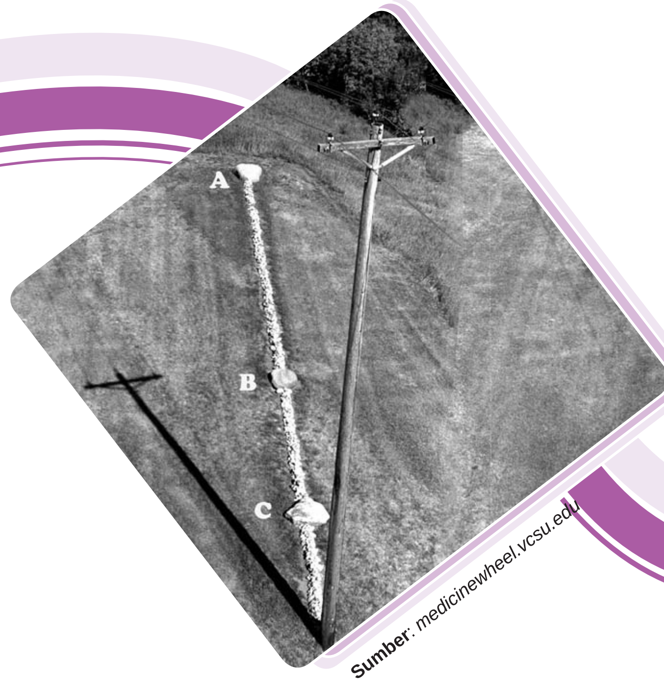
Pilihan Karir

Koki atau juru masak adalah orang yang menyiapkan makanan untuk disantap. Istilah ini kadang merujuk pada *chef* walaupun kedua istilah ini secara profesional tidak dapat disamakan. Istilah koki pada suatu dapur rumah makan atau restoran biasanya merujuk pada orang yang memiliki sedikit atau tanpa pengaruh kreatif terhadap menu dan dapur. Mereka biasanya anggota dapur yang berada di bawah *chef* (kepala koki).

Sumber: *id.wikipedia.org*

Bab 2

Trigonometri



Sumber: medicinewheel.vcsu.edu

Pada bab ini, Anda akan diajak menerapkan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah, melalui menentukan nilai perbandingan trigonometri suatu sudut, mengkonversi koordinat Cartesius dan koordinat kutub, menerapkan aturan sinus dan cosinus, serta menentukan luas suatu segitiga.

Menurut sejarah, awalnya trigonometri dikembangkan untuk keperluan geografi (pembuatan peta) dan untuk keperluan astronomi (untuk memahami gerak benda-benda langit). Pada perkembangan berikutnya, trigonometri tidak hanya dimanfaatkan oleh matematika, tetapi juga menjadi alat penting bagi ilmu-ilmu dasar, seperti kimia, fisika, teknik mesin, teknik elektro, dan teknik geodesi. Oleh karena itu, trigonometri menjadi sangat penting untuk dipelajari. Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep trigonometri. Salah satunya permasalahan berikut.

Eko mengukur bayangan sebuah tiang di tanah. Setelah diukur, panjangnya mencapai 5,2 m. Kemudian, ia mengukur sudut yang terbentuk antara ujung bayangan dengan ujung tiang. Besar sudut tersebut adalah 60°. Tanpa mengukur langsung tiang tersebut, dapatkah Eko menentukan tinggi tiang yang sebenarnya?

Peta Konsep

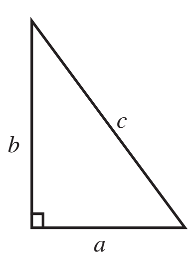
Materi mengenai Trigonometri dapat digambarkan sebagai berikut.

- **Trigonometri** — materi yang dipelajari:
  - Perbandingan Trigonometri — terdiri atas:
    - Suatu Sudut Segitiga Siku-Siku
    - Sudut-Sudut Istimewa
    - Nilai Perbandingan Trigonometri di Berbagai Kuadran
    - Identitas Trigonometri
  - Koordinat Cartesius dan Koordinat Kutub — terdiri atas:
    - Mengubah Koordinat Cartesius Menjadi Koordinat Kutub
    - Mengubah Koordinat Kutub Menjadi Koordinat Cartesius
  - Aturan Sinus dan Aturan Cosinus — terdiri atas:
    - Aturan Sinus → Jika Diketahui Dua Sudut dan Sebuah Sisi
    - Aturan Cosinus → Jika Diketahui Sebuah Sudut dan Dua Sisi yang Mengapitnya
  - Menghitung Luas Segitiga — jika diketahui:
    - Sebuah Sudut dan Dua Sisi yang Mengapitnya
    - Sebuah Sisi dan Dua Sudut yang Mengapitnya
    - Ketiga Sisinya

Soal Pramateri

Kerjakanlah soal-soal berikut sebelum Anda mempelajari bab ini.

1. Perhatikan segitiga siku-siku berikut.



Tentukanlah panjang sisi segitiga yang belum diketahui.

a. $c = 10$, $a = 6$, $b = ...$

b. $a = 3$, $b = 4$, $c = ...$

c. $b = 576$, $c = 676$, $a = ...$

2. Tentukanlah nilai berikut.

a. $(3\sqrt{5})^2$

b. $(2\sqrt{7})^2$

c. $\sqrt{72}$

d. $\sqrt{45}$

e. $\sqrt{34}$

A Perbandingan Trigonometri

Pada materi bab ini, Anda akan mempelajari perbandingan trigonometri dari suatu sudut segitiga siku-siku sehingga Anda akan mengenal istilah sinus, cosinus, tangen, secan, cosecan, dan cotangen. Untuk memudahkan Anda mempelajari materi ini, coba ingat kembali dalil Pythagoras berikut "kuadrat dari sisi terpanjang (hipotenusa) sama dengan jumlah kuadrat sisi lainnya."

Kata Kunci

- segitiga siku-siku
- sinus
- cosinus
- tangen

1. Perbandingan Trigonometri dalam Segitiga Siku-siku

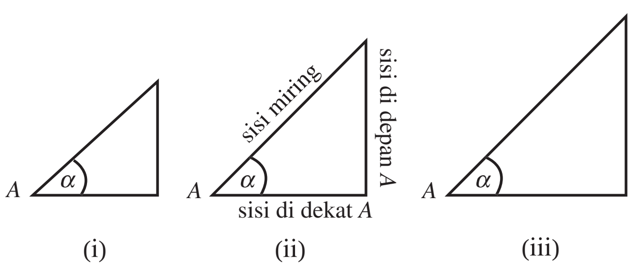
Sebelum mempelajari materi ini, lakukanlah kegiatan berikut.

Kegiatan Siswa

Lakukan kegiatan berikut bersama 3–4 orang teman Anda.

1. Gambarlah tiga buah segitiga siku-siku yang sebangun dengan ketentuan sebagai berikut.
- Ketiga sudutnya sama besar (besar sudut yang Anda tentukan berbeda dengan teman Anda).
- Ukuran ketiga sisinya berbeda beda (tidak ada yang sama panjang).

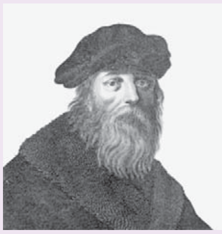
Misalkan, segitiga yang Anda buat seperti berikut.



2. Gunakan busur derajat untuk menghitung besar sudut A (ke derajat terdekat). Perlu Anda ingat bahwa besar sudut A lebih dari 0° dan kurang dari 90°.

3. Gunakan penggaris untuk mengukur panjang masing-masing segitiga siku-siku tersebut, kemudian isikanlah pada tabel berikut.

Jelajah Matematika



Pythagoras lahir sekitar tahun 582 M di Pulau Samos, Yunani. Beliau menemukan dan membuktikan sebuah rumus sederhana dalam geometri tentang ketiga sisi pada segitiga siku-siku. Dalil ini dinamakan *Dalil Pythagoras*. Pythagoras meninggal sekitar tahun 497 SM pada usia 85 tahun.

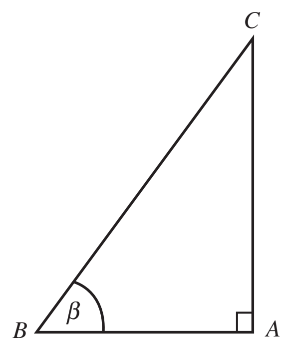
Sumber: *Oxford Ensiklopedi Pelajar*, 1999

Segitiga ke-	$\dfrac{\text{Panjang sisi di depan } A}{\text{Panjang sisi miring}}$
(i)	
(ii)	
(iii)	

$\dfrac{\text{Panjang sisi di dekat } A}{\text{Panjang sisi miring}}$	$\dfrac{\text{Panjang sisi di depan } A}{\text{Panjang sisi di dekat } A}$

4. Perhatikan nilai-nilai perbandingan yang Anda peroleh pada ketiga segitiga siku-siku tersebut. Apa yang Anda dapatkan dari hasil tersebut?

5. Sekarang, coba Anda perhatikan gambar ΔABC berikut.



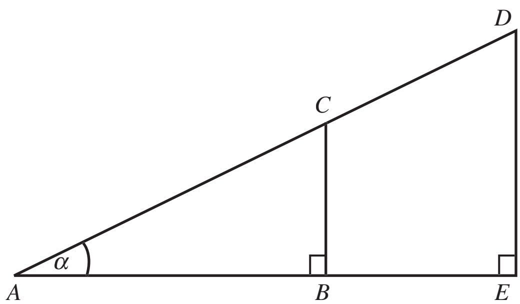
a. Dengan menggunakan busur dan penggaris, hitunglah:
- Besar sudut β (gunakan satuan ke derajat terdekat)
- Panjang sisi AB, BC, dan AC (gunakan satuan ke cm terdekat)

b. Tentukan nilai perbandingan
- $\dfrac{\text{panjang sisi di depan } \beta}{\text{panjang sisi miring}} = \dfrac{...}{...}$
- $\dfrac{\text{panjang sisi di dekat } \beta}{\text{panjang sisi miring}} = \dfrac{...}{...}$
- $\dfrac{\text{panjang sisi di depan } \beta}{\text{panjang sisi di dekat } \beta} = \dfrac{...}{...}$

6. Apakah nilai perbandingan untuk ΔABC sama dengan nilai perbandingan untuk ketiga segitiga sebelumnya? Jika tidak sama, perubahan apakah dari ketiga segitiga sebangun yang membuat nilai perbandingan segitiga baru berbeda?

Hasil kegiatan yang telah Anda kerjakan dapat memperjelas bahwa hasil perbandingan sisi-sisi segitiga bergantung pada sudut α dan β. Jika sudutnya (α) sama maka hasil perbandingan sisi-sisinya akan sama.

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.1 ΔABC sebangun dengan ΔAED

$\Delta ABC \cong \Delta AED$ (dibaca "segitiga ABC sebangun dengan segitiga AED").

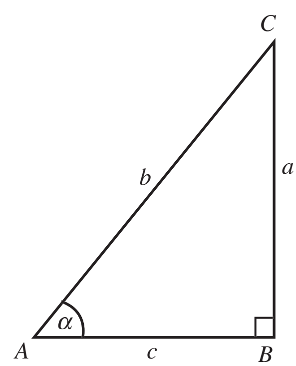
Perbandingan sisi-sisi segitiga secara cepat dapat diketahui dengan menggunakan konsep trigonometri yang didefinsikan sebagai berikut.

1. $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{ED}{AD} = \text{sinus}\,\alpha = \sin\alpha$
2. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AD} = \text{cosinus}\,\alpha = \cos\alpha$
3. $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{ED}{AE} = \text{tangen}\,\alpha = \tan\alpha$
4. $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{ED} = \text{cosecant}\,\alpha = \text{cosec}\,\alpha$
5. $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AE} = \text{secant}\,\alpha = \sec\alpha$
6. $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AE}{ED} = \text{cotangent}\,\alpha = \text{cotan}\,\alpha$

Berdasarkan penjelasan tersebut, dapat dibuat ringkasannya sebagai berikut.

Perbandingan trigonometri untuk segitiga siku-siku ABC seperti pada Gambar 2.2 adalah:

1. $\sin\alpha = \dfrac{a}{b}$
2. $\cos\alpha = \dfrac{c}{b}$
3. $\tan\alpha = \dfrac{a}{c}$
4. $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$
5. $\sec\alpha = \dfrac{b}{c}$
6. $\text{cotan}\,\alpha = \dfrac{c}{a}$



Gambar 2.2

Segitiga siku-siku dengan α sebagai salah satu sudutnya

Jelajah Matematika

Hipparchus (±170–125 M)

Teorema perbandingan sisi-sisi pada segitiga telah digunakan bangsa Mesir dan Babilonia. Akan tetapi, perbandingan yang sekarang digunakan kali pertama ditetapkan sekitar tahun 150 SM oleh Hipparchus yang menyusun perbandingan-perbandingan itu di dalam tabel. Hipparchus dari Nicea sangat tertarik pada Astronomi dan Geografi. Hasil kerjanya merupakan asal mula rumusan trigonometri. Hipparchus menerapkan trigonometri untuk menentukan letak kota-kota di permukaan bumi dengan menggunakan garis bujur dan garis lintang.

Sumber: *Ensiklopedia Matematika dan Peradaan Manusia*, 2002

Dari ringkasan tersebut, Anda dapat memperoleh hubungan-hubungan berikut.

1. $$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c} = \frac{a}{c} = \tan\alpha$$

   Jadi, $\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

2. $$\sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha = \frac{a}{b}\times\frac{b}{a} = 1$$

   Jadi, $\boxed{\sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} \quad \text{atau} \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}}$

3. $$\cos\alpha\cdot\sec\alpha = \frac{c}{b}\times\frac{b}{c} = 1$$

   Jadi, $\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \quad \text{atau} \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}$

4. $$\tan\alpha\cdot\operatorname{cotan}\alpha = \frac{a}{c}\times\frac{c}{a} = 1$$

   Jadi, $\boxed{\tan\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotan}\alpha} \quad \text{atau} \quad \operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}}$

Tugas Siswa 2.1

Coba Anda buktikan kebenaran pernyataan berikut.

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\sec\alpha} = \operatorname{cotan}\alpha$$

Contoh Soal 2.1

Jika $\sin\beta = \frac{4}{5}$, tentukanlah nilai perbandingan trigonometri lainnya.

Jawab:

Buatlah gambar yang mewakili $\sin\beta = \frac{4}{5}$.

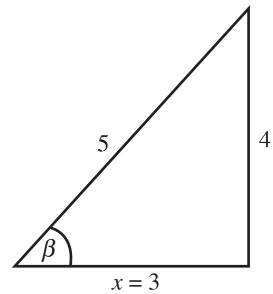
Tentukan sisi yang belum diketahui dengan rumus Pythagoras.

$x^2 = 5^2 - 4^2$

$x^2 = 25 - 16 = 9$

$x = \sqrt{9} = 3$

Dengan demikian, dapat ditentukan nilai perbandingan trigonometri lainnya.



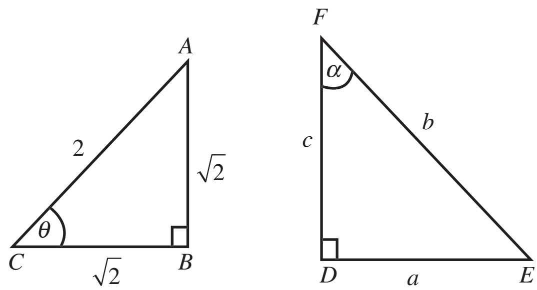
$\cos\beta = \dfrac{3}{5}$ $\qquad \sec\beta = \dfrac{5}{3}$

$\tan\beta = \dfrac{4}{3}$ $\qquad \text{cotan}\,\beta = \dfrac{3}{4}$

$\text{cosec}\,\beta = \dfrac{5}{4}$

Contoh Soal 2.2

Diketahui ΔABC dan ΔDEF seperti pada gambar berikut.



(a) (b)

Tentukanlah semua perbandingan trigonometri untuk sudut θ.

Jawab:

a.

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

$\text{cosec}\,\theta = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\sec\theta = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\text{cotan}\,\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

b.

$\sin\alpha = \dfrac{a}{b}$

$\cos\alpha = \dfrac{c}{b}$

$\tan\alpha = \dfrac{a}{c}$

$\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$

$\sec\alpha = \dfrac{b}{c}$

$\text{cotan}\,\alpha = \dfrac{c}{a}$

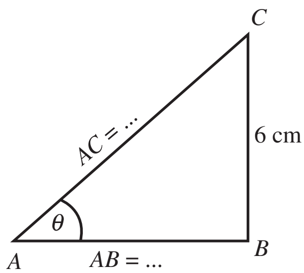
Contoh Soal 2.3

Diketahui salah satu sudut segitiga siku-siku ABC adalah θ.

Jika diketahui $\sin \theta = \frac{3}{5}$ dan panjang sisi di seberang θ adalah 6 cm.

Hitunglah $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\operatorname{cosec} \theta$, $\sec \theta$, dan $\operatorname{cotan} \theta$.

Jawab:



Diketahui $\sin \theta = \frac{3}{5}$ dan panjang sisi seberang $\theta = BC = 6$ cm.

Sebelum menghitung $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\operatorname{cosec} \theta$, $\sec \theta$, dan $\operatorname{cotan} \theta$, Anda harus mencari panjang sisi AB dan AC terlebih dahulu. Dari nilai $\sin \theta = \frac{3}{5}$, Anda dapat menemukan nilai AC.

$$\sin \theta = \frac{CB}{AC}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{AC}$$

$$AC = \frac{6 \times 5}{3} = 10 \text{ cm}$$

Oleh karena Anda telah mengetahui nilai AC dan BC, Anda dapat mencari nilai AB dengan rumus Pythagoras.

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$AB^2 = 10^2 - 6^2$$

$$= 100 - 36$$

$$AB^2 = 64$$

$$AB = \sqrt{64}$$

$$= 8 \text{ cm}$$

Jadi, perbandingan trigonometrinya adalah

$$\cos \theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

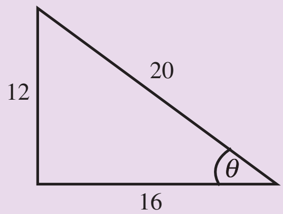
$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\sec \theta = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{cotan} \theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

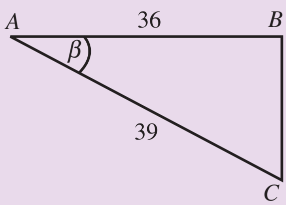
Tugas Siswa 2.2

1. Tentukan perbandingan trigonometri sesuai dengan gambar berikut.



a. sin θ
b. cos θ
c. tan θ
d. cosec θ
e. sec θ
f. cotan θ

2. Hitunglah panjang BC. Kemudian, tentukan nilai perbandingan trigonometrinya.



a. sin β
b. cos β
c. tan β
d. cosec β
e. sec β
f. cotan β

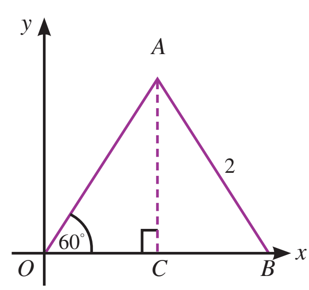
2. Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut-Sudut Istimewa

Pada bagian sebelumnya, Anda telah mempelajari perbandingan trigonometri. Sekarang, Anda akan mempelajari perbandingan trigonometri sudut-sudut istimewa. Sudut istimewa yang akan dibahas di sini adalah sudut yang besarnya 0°, 30°, 45°, 60°, dan 90°. Pernahkah Anda melihat benda-benda yang memiliki sudut 0°, 30°, 60°, 60°, dan 90°?

a. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 60°

Perhatikan Gambar 2.3. ΔAOB merupakan segitiga samasisi dengan panjang sisi 2 satuan, sehingga $OA = AB = 2$ satuan. Oleh karena ΔAOB sama sisi, $\angle OAB = \angle ABO = \angle OAB = 60^\circ$.

AC merupakan garis tinggi ΔAOB. Garis OC merupakan setengah dari OB sehingga OC 1 satuan. Dari keterangan tersebut, Anda dapat mencari panjang AC dengan rumus Pythagoras. Mengapa AC dicari dengan rumus Pythagoras? Selidikilah.



Gambar 2.3

Segitiga samasisi *OAB*

Panjang AC dapat dicari dengan cara berikut.

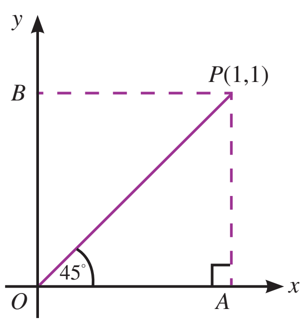
$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{OA^2 - OC^2} \\ &= \sqrt{2^2 - 1^2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Dari informasi yang telah diperoleh, Anda dapat menentukan perbandingan trigonometri untuk sudut 60°. Perbandingannya sebagai berikut.

$$\sin 60^\circ = \frac{AC}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad ; \quad \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{OA}{AC} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \sec 60^\circ = \frac{OA}{OC} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AC}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \quad ; \quad \operatorname{cotan} 60^\circ = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$



Gambar 2.4

Grafik Cartesius dengan sebuah garis bersudut 45° terhadap sumbu-*x*

b. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 45°

Perhatikan Gambar 2.4. Titik P memiliki koordinat (1,1). A merupakan titik pada sumbu-x yang ditarik dari titik P yang tegak lurus sumbu-x dan B merupakan titik pada sumbu-y yang ditarik dari titik P yang tegak lurus sumbu-y. Dapat diketahui $PA = PB = 1$.

$$\angle AOP = \frac{1}{2}\angle AOB = 45^\circ$$

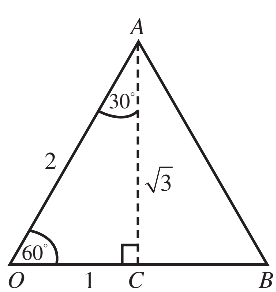
Oleh karena itu, OP dapat dicari dengan rumus Pythagoras. OP merupakan sisi miring Δ siku-siku OAC.

$OP = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, sehingga akan diperoleh perbandingan trigonometri berikut.

$$\sin 45^\circ = \frac{AP}{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad ; \quad \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{OP}{AP} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AO}{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad ; \quad \sec 45^\circ = \frac{OP}{AO} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AP}{AO} = \frac{1}{1} = 1 \quad ; \quad \operatorname{cotan} 45^\circ = \frac{AO}{AP} = \frac{1}{1} = 1$$



Gambar 2.5

Segitiga *OAC* pada segitiga *OAB*

c. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 30°

Perhatikan gambar ΔAOB pada Gambar 2.5. ΔAOB merupakan segitiga sama sisi, sehingga $\angle AOB = \angle OBA = \angle OAB = 60^\circ$.

ΔOAC merupakan segitiga siku-siku dengan siku-siku di C dan panjang sisi 2 satuan. $\angle OAC$ merupakan setengah dari $\angle OAB$. Dengan demikian, $\angle OAC = 30^\circ$.

$$\sin 30^\circ = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \text{cosec}\, 30^\circ = \frac{OA}{OC} = 2$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad ; \quad \sec 30^\circ = \frac{OA}{AC} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad ; \quad \text{cotan}\, 30^\circ = \frac{AC}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

d. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 0°

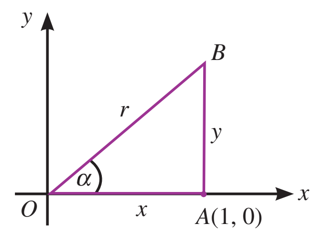
Perhatikan Gambar 2.6(a). r merupakan sisi miring pada segitiga OAB dengan sudut α ($\alpha \neq 0$). Bagaimana jika $\alpha = 0$? Jika $\alpha = 0$ maka gambar segitiga akan seperti pada Gambar 2.6(b).

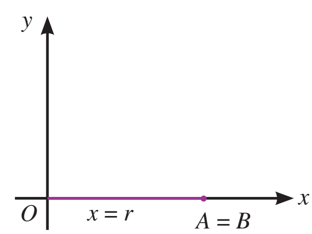
Dengan demikian, nilai x = nilai $r = 1$, nilai $y = 0$. Dari nilai-nilai tersebut, Anda dapat menentukan perbandingan trigonometrinya sebagai berikut.

$$\sin 0^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad ; \quad \text{cosec}\, 0^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} \rightarrow \text{tak terdefinisi}$$

$$\cos 0^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1 \quad ; \quad \sec 0^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 \quad ; \quad \text{cotan}\, 0^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} \rightarrow \text{tak terdefinisi}$$





Gambar 2.6

(a) Segitiga OAB dengan $\angle BOA = \alpha$
(b) Sudut 0° pada diagram Cartesius

e. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 90°

Perhatikan kembali Gambar 2.6(a).

Bagaimana jika $\alpha = 90^\circ$?

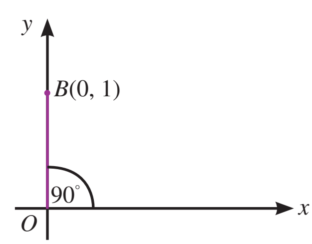
Jika $\alpha = 90^\circ$, $r = OB$ akan berimpit dengan sumbu-y (Perhatikan Gambar 2.7). Dengan demikian, nilai $x = 0$, nilai y = nilai $r = 1$. Dari nilai-nilai tersebut, Anda dapat menentukan perbandingan trigonometrinya sebagai berikut.

$$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \quad ; \text{cosec}\, 90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad ; \sec 90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} \rightarrow \text{tak terdefinisi}$$

$$\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} \rightarrow \text{tak terdefinisi}; \ \text{cotan}\, 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

Nilai-nilai perbandingan trigonometri dari sudut 0° sampai 90° dirangkum pada tabel berikut.



Gambar 2.7

Grafik Cartesius dengan sudut 90°

Perbandingan Trigonometri	Sudut-Sudut Khusus (Istimewa)				
	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tak terdefinisi
cosec	tak terdefinisi	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1
sec	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	tak terdefinisi
cotan	tak terdefinisi	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0

Solusi Cerdas

Diketahui: $\sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}$,
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Nilai $\cos \alpha =$ ....

a. 1 **d.** $\frac{1}{4}$

b. $\frac{3}{4}$ **e.** $\frac{1}{8}$

c. $\frac{1}{2}$

Jawab:

$\sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}$

$\sin \frac{1}{2}\alpha = \sin 30^\circ$

$\frac{1}{2}\alpha = 30^\circ$

$\alpha = 60^\circ$

$\cos \alpha = \cos 60^\circ$

$\cos \alpha = \frac{1}{2}$

Jadi, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Jawaban: **c**

UN SMK, 2004

Contoh Soal 2.4

Dengan menggunakan nilai-nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut istimewa, hitunglah nilai berikut.

a. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$

b. $\sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ$

c. $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ}$

Jawab:

a. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

b. $\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

c. $$\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 + \left(\sqrt{3} \times \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)}$$

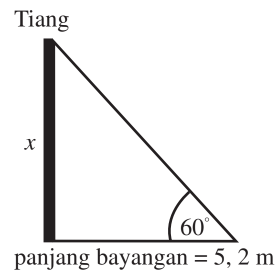
$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right)\sqrt{3}}{1 + 1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Contoh Soal 2.5

Eko mengukur bayangan sebuah tiang yang menancap di tanah. Setelah diukur, panjang bayangannya mencapai 5,2 m. Kemudian, ia mengukur sudut yang terbentuk antara ujung bayangan dengan ujung tiang. Besar sudut tersebut adalah 60°. Tentukan tinggi tiang yang sebenarnya, tanpa mengukur langsung tiang tersebut.



Jawab:

Dari gambar di samping diperoleh

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{5,2}$$

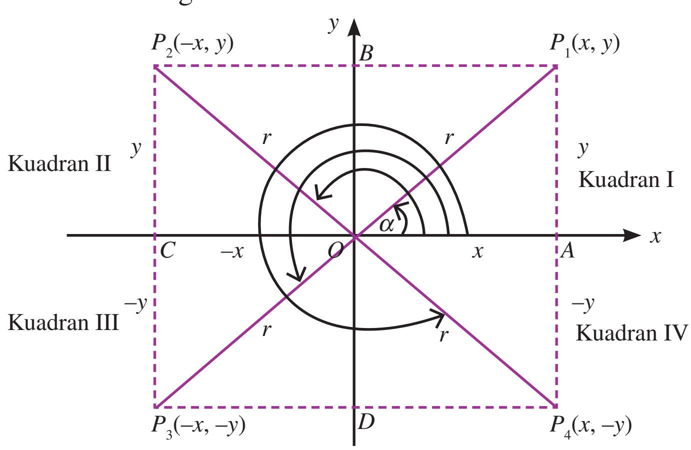
$$x = 5,2 \tan 60^\circ$$

$$= 5,2\sqrt{3}$$

Jadi, tinggi tiang adalah $5,2\sqrt{3}$ m.

3. Perbandingan Trigonometri Suatu Sudut di Kuadran I, II, III, dan IV

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.8 Kuadran pada grafik Cartesius

Kedudukan titik P_1 (x, y) dapat berubah bergantung pada sejauh mana garis OP_1 diputar. Ada 8 kemungkinan kedudukan titik P_1 jika dikaitkan dengan besar sudut putaran α , yaitu:

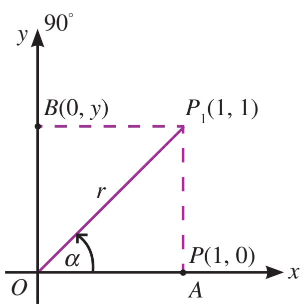
1. Jika $\alpha = 0^\circ$ maka titik P_1 terletak pada sumbu-x positif.
2. Jika $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ maka titik P_1 terletak di kuadran I.
3. Jika $\alpha = 90^\circ$ maka titik P_1 terletak pada sumbu-y positif.
4. Jika $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ maka titik P_1 terletak di kuadran II.
5. Jika $\alpha = 180^\circ$ maka titik P_1 terletak pada sumbu-x negatif.
6. Jika $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ maka titik P_1 teletak di kuadran III.
7. Jika $\alpha = 270^\circ$ maka titik P_1 terletak pada sumbu-y negatif.
8. Jika $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ maka titik P_1 terletak di kuadran IV.

Hubungan antara x, y, dan r menurut teorema Pythagoras adalah $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Berdasarkan keterangan tersebut maka tanda (positif atau negatif) nilai perbandingan trigonometri pada berbagai kuadran dapat kita peroleh sebagai berikut.

a. Kuadran I (0° < α < 90°)

Perhatikan Gambar 2.9. Titik $P_1(x, y)$ terletak di kuadran I dan membentuk sudut $AOP_1 = \alpha$, sehingga diperoleh hubungan antara $r = OP_1$, A, dan y sebagai berikut.



Gambar 2.9

Sudut di kuadran I

$$\sin \angle AOP_1 = \sin\alpha = \frac{y}{r} \text{(positif)}$$

$$\cos \angle AOP_1 = \cos\alpha = \frac{x}{r} \text{(positif)}$$

$$\tan \angle AOP_1 = \tan\alpha = \frac{y}{x} \text{(positif)}$$

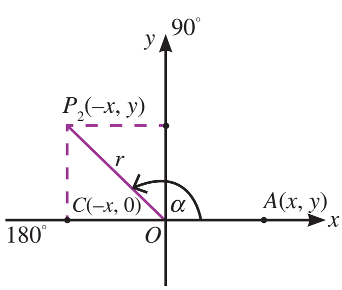
$$\operatorname{cosec} \angle AOP_1 = \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y} \text{(positif)}$$

$$\sec \angle AOP_1 = \sec\alpha = \frac{r}{x} \text{(positif)}$$

$$\operatorname{cotan} \angle AOP_1 = \operatorname{cotan}\alpha = \frac{x}{y} \text{(positif)}$$

b. Kuadran II (90°< α <180°)

Perhatikan Gambar 2.10. Titik $P_2(-x, y)$ terletak di kuadran II dan membentuk sudut $AOP_2 = \alpha$, sehingga didapat hubungan antara $r = OP_2$, x, dan y sebagai berikut.



Gambar 2.10

Sudut di kuadran II

$$\sin \angle AOP_2 = \sin\alpha = \frac{y}{r} \text{(positif)}$$

$$\cos \angle AOP_2 = \cos\alpha = \frac{-x}{r} \text{(negatif)}$$

$$\tan \angle AOP_2 = \tan\alpha = \frac{y}{-x} \text{(negatif)}$$

$$\text{cosec} \angle AOP_2 = \text{cosec}\,\alpha = \frac{r}{y} \text{ (positif)}$$

$$\sec \angle AOP_2 = \sec \alpha = \frac{r}{-x} \text{ (negatif)}$$

$$\text{cotan} \angle AOP_2 = \text{cotan}\,\alpha = \frac{-x}{y} \text{ (negatif)}$$

c. Kuadran III (180° < α < 270°)

Perhatikan Gambar 2.11. Titik $P_3(-x, -y)$ terletak di kuadran III dan membentuk sudut $AOP_3 = \alpha$, sehingga didapat hubungan antara $r = OP_3$, x, dan y sebagai berikut.

$$\sin \angle AOP_3 = \sin \alpha = \frac{-y}{r} \text{ (negatif)}$$

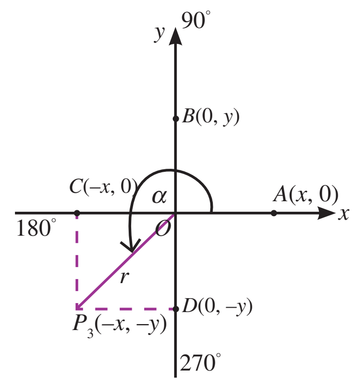
$$\cos \angle AOP_3 = \cos \alpha = \frac{-x}{r} \text{ (negatif)}$$

$$\tan \angle AOP_3 = \tan \alpha = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} \text{ (positif)}$$

$$\text{cosec} \angle AOP_3 = \text{cosec}\,\alpha = \frac{r}{-y} \text{ (negatif)}$$

$$\sec \angle AOP_3 = \sec \alpha = \frac{r}{-x} \text{ (negatif)}$$

$$\text{cotan} \angle AOP_3 = \text{cotan}\,\alpha = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} \text{ (positif)}$$



Gambar 2.11

Sudut di kuadran III

d. Kuadran IV (270° < α < 360°)

Perhatikan Gambar 2.12. Titik $P_4(x, -y)$ terletak di kuadran IV dan membentuk sudut $AOP_4 = \alpha$, sehingga didapat hubungan antara $r = OP_4$, x, dan y sebagai berikut.

$$\sin \angle AOP_4 = \sin \alpha = \frac{-y}{r} \text{ (negatif)}$$

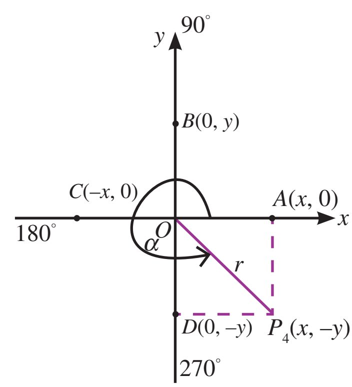
$$\cos \angle AOP_4 = \cos \alpha = \frac{x}{r} \text{ (positif)}$$

$$\tan \angle AOP_4 = \tan \alpha = \frac{-y}{x} \text{ (negatif)}$$

$$\text{cosec} \angle AOP_4 = \text{cosec}\,\alpha = \frac{r}{-y} \text{ (negatif)}$$

$$\sec \angle AOP_4 = \sec \alpha = \frac{r}{x} \text{ (positif)}$$

$$\text{cotan} \angle AOP_4 = \text{cotan}\,\alpha = \frac{x}{-y} \text{ (negatif)}$$



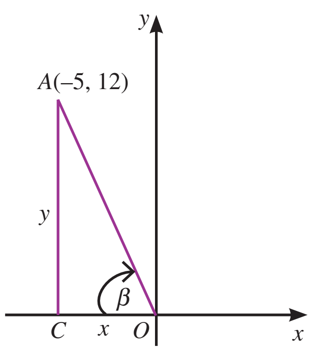
Gambar 2.12

Sudut di kuadran IV

Secara umum tanda-tanda perbandingan nilai trigonometri di berbagai kuadran dapat dituliskan seperti pada tabel berikut.

α	**Kuadran I**	**Kuadran II**	**Kuadran III**	**Kuadran IV**
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tan	+	–	+	–
cosec	+	+	–	–
sec	+	–	–	+
cotan	+	–	+	–

Contoh Soal 2.6



Diketahui koordinat titik A (–5, 12) dan β adalah sudut yang dibentuk oleh garis OA dengan sumbu-x negatif. Tentukanlah nilai dari sin β, cos β, dan tan β.

Jawab:

$$r = x^2 + y^2$$
$$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$$
$$= \sqrt{25 + 144}$$
$$= \sqrt{169} = 13$$

$$\sin\beta = \frac{y}{r} = \frac{12}{13}$$

$$\cos\beta = \frac{-x}{r} = \frac{-5}{13}$$

$$\tan\beta = \frac{y}{-x} = \frac{12}{-5}$$

Soal Pilihan

Jika diketahui $\tan A = -\frac{1}{2}$ dengan $90^\circ < A < 180^\circ$ maka nilai $\sin A \cdot \cos A$ = ...

a. $-\frac{2}{3}$

b. $-\frac{1}{5}$

c. $-\frac{2}{7}$

d. $-\frac{2}{5}$

e. $-\sqrt{3}$

Contoh Soal 2.7

Diketahui $\sin\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Tentukan nilai tan α.

Jawab:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ maka } y = -\sqrt{3} \text{ dan } r = 2$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \text{ maka } x = 1 \text{ dan } r = 2$$

$$\text{Nilai } \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

atau dapat juga memakai rumus berikut.

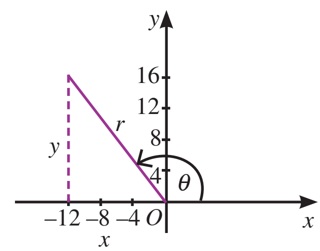
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\times 2 = -\sqrt{3}$$

Contoh Soal 2.8

Jika diketahui $\tan\theta = -\dfrac{12}{6}$, dan $90^\circ < \theta < 180^\circ$ maka tentukan nilai $\sin\theta$ dan $\cos\theta$.

Jawab:

$\tan\theta = -\dfrac{12}{6}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$ (Ada di Kuadran II)



$x = -12$

$y = 16$

$$r = \sqrt{(-12)^2 + 16^2}$$

$$= \sqrt{144 + 256}$$

$$= \sqrt{400} = 20$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

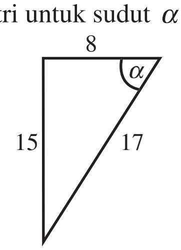
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-12}{20} = -\frac{3}{5}$$

Evaluasi Materi 2.1

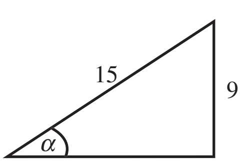
Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Tentukanlah nilai perbandingan trigonometri untuk sudut α pada gambar berikut.

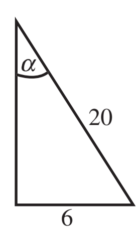
a.



b.



c.



2. Jika θ merupakan salah satu sudut pada segitiga siku-siku, hitunglah nilai perbandingan trigonometri lainnya dari nilai trigonometri berikut.

a. $\sin\theta = \dfrac{5}{13}$ **b.** $\cos\theta = \dfrac{6}{10}$

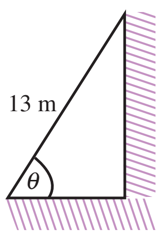
c. $\tan\theta = \dfrac{24}{7}$

d. $\text{cotan}\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

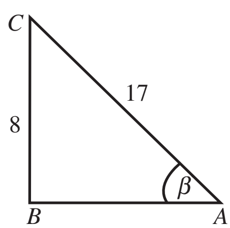
e. $\text{cosec}\,\alpha = 2$

f. $\sec\alpha = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

3. Pada segitiga siku-siku, diketahui panjang sisi miring 34 cm dan sin $\theta = \dfrac{8}{17}$. Tentukanlah panjang sisi yang lain.
4. Sebuah tangga yang panjangnya 13 m disandarkan pada sebuah tembok. Jarak ujung tangga dengan dasar tembok adalah 12 m. Tentukanlah semua perbandingan trigonometri untuk sudut θ.



5. Perhatikan ΔABC berikut.



Dari segitiga ABC diketahui AC = 17 cm, BC = 8 cm, dan $\sin\beta = \dfrac{8}{17}$. Hitunglah panjang sisi dan sinus sudut yang lainnya.

6. Hitunglah nilai dari perbandingan trigonometri berikut.
   a. $\sin 30^\circ + \sin 45^\circ + \sin 60^\circ$
   b. $\sin\ 30^\circ\ \sin 45^\circ + \sin 60^\circ\ \sin 45$
   c. $\dfrac{\tan 30^\circ + \sin 30^\circ}{\cos 60^\circ - \cos 30^\circ}$
   d. $\dfrac{\tan 30^\circ + \sin 60^\circ}{\tan 45^\circ - \tan 0^\circ}$
   e. $\dfrac{\cos 30^\circ \times \sin 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}$
   f. $2\cos 30^\circ\ \sin 30^\circ$
   g. $\dfrac{\tan^2 30^\circ\ \sin^2 60^\circ + \tan^2 60^\circ\ \cos^2 30^\circ}{\sin 30^\circ\ \cos 60^\circ}$
   h. $\dfrac{\tan 30^\circ + \text{cosec}\,60^\circ + \text{cosec}\,90^\circ}{\sec 0^\circ + \sec 30^\circ + \sec 60^\circ}$
7. Tentukanlah keenam perbandingan trigonometri pada titik berikut.
   a. $P(-20, 21)$
   b. $P(-6, -\sqrt{3})$
   c. $P(7, -12)$
   d. $P(2\sqrt{5}, 5)$
8. Tentukan kelima perbandingan trigonometri lainnya jika diketahui sebagai berikut.
   a. $\tan\theta = \dfrac{2}{3}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$
   b. $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, θ sudut tumpul
   c. $\sin\theta = -\dfrac{2}{3}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$
9. Diketahui $\sec A = -\dfrac{25}{7}$ dan $\sin B = -\dfrac{3}{5}$. Sudut A terletak di kuadran II dan sudut B terletak di kuadran IV. Tentukanlah nilai dari:
   a. $\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$
   b. $(1 - 2\sin^2 A)(1 - 2\sin^2 B)$
   c. $\left(\dfrac{1-\cos A}{\sin B}\right)\left(\dfrac{1+\cos B}{\sin A}\right)$
   d. $(\text{cosec}\,A + \sec B)(\text{cosec}\,A - \cos B)$
10. Di suatu tempat wisata alam, Febi berdiri di sudut A pada tepi sungai yang lurus. Di seberang sungai tertambat dua sampan X dan Y yang berjarak 20 meter. Sampan X terletak tepat di seberang A. Jika besar sudut XAY 30°, berapa meterkah lebar sungai tersebut?

B Perbandingan Trigonometri Sudut-Sudut yang Berelasi

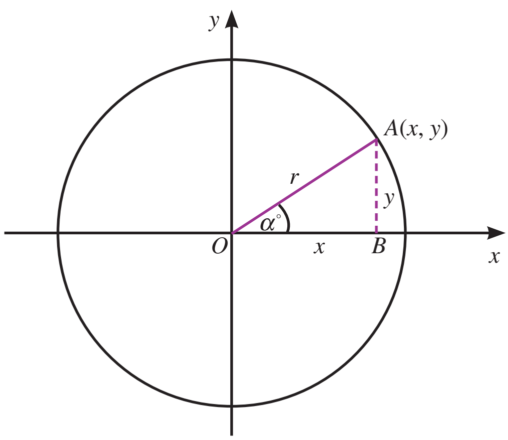
Anda telah mempelajari perbandingan trigonometri suatu sudut di kuadran I, II, III, dan IV. Sekarang, Anda akan belajar mengenai sudut-sudut yang berelasi. Sudut berelasi artinya pasangan sudut yang memiliki suatu hubungan sehingga perbandingan sudut-sudutnya memiliki rumus tertentu.

Kata Kunci

- kuadran I
- kuadran II
- kuadran III
- kuadran IV
- sudut negatif

1. Perbandingan Trigonometri di Kuadran I (Hubungan Sudut α° dan Sudut $(90 - \alpha)^\circ$)

Diketahui sebuah lingkaran yang berpusat di titik $O(0, 0)$ dan berjari-jari r. Pada lingkaran tersebut terletak sebuah titik $A(x, y)$ yang membentuk sudut α dengan sumbu-x positif, seperti terlihat pada gambar berikut.



Gambar 2.12 Sudut α pada kuadran I

Jika diketahui $\angle AOB = \alpha^\circ$, $OB = x$, dan $AB = y$ maka diperoleh rumus-rumus perbandingan trigonometri berikut.

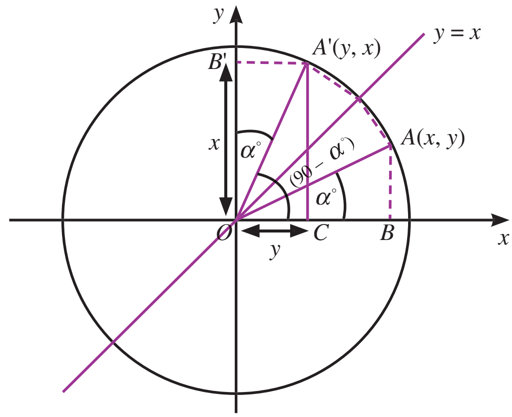
$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \quad ; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \quad ; \quad \sec\alpha = \frac{r}{x}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \quad ; \quad \operatorname{cotan}\alpha = \frac{x}{y}$$

Selanjutnya, Anda dapat menemukan hubungan sudut α dengan penyikunya, yaitu $(90^\circ - \alpha)$.

Selanjutnya, perhatikan Gambar 2.13. Titik A (x, y) dicerminkan terhadap garis $y = x$ maka bayangannya adalah titik $A'(y, x)$. Oleh karena panjang $AB = A'B'$, $OB = OB'$, $\angle ABO = \angle A'B'O = 90^\circ$, $\Delta AOB = \Delta A'OB'$, akibatnya $\angle AOB = \angle A'OB' = \alpha$, dan $\angle A'OB = (90 - \alpha)^\circ$ (perhatikan segitiga $OA'C$ yang siku-siku di C).



Gambar 2.13 Hubungan sudut α dengan penyikunya

Oleh karena $\angle A'OB = (90 - \alpha)^\circ$ dan koordinat titik $A'(x, y)$, sehingga $\angle A'OB = \angle A'OC = (90 - \alpha)^\circ$ dan oleh karena panjang sisi $OC = y$ dan $OB' = x$ maka diperoleh hasil berikut.

$$\sin (90 - \alpha)^\circ = \frac{x}{r} = \sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \sin (90 - \alpha)^\circ = \sin \alpha^\circ$$

$$\cos (90 - \alpha)^\circ = \frac{y}{r} = –\cos \alpha^\circ \Leftrightarrow \cos (90 - \alpha)^\circ = –\cos \alpha^\circ$$

$$\tan (90 - \alpha)^\circ = \frac{x}{y} = –\tan \alpha^\circ \Leftrightarrow \tan (90 - \alpha)^\circ = –\tan \alpha^\circ$$

Tugas Siswa 2.3

Setelah Anda mempelajari hubungan sudut α dan penyikunya, lengkapilah hubungan berikut.

$\text{cosec } (90 - \alpha)^\circ = \frac{\dots}{\dots} = \dots. \quad \Leftrightarrow \quad \text{cosec } (90 - \alpha)^\circ = \dots.$

$\sec (90 - \alpha)^\circ = \frac{\dots}{\dots} = \dots. \quad \Leftrightarrow \quad \sec (90 - \alpha)^\circ = \dots.$

$\text{cotan } (90 - \alpha)^\circ = \frac{\dots}{\dots} = \dots. \quad \Leftrightarrow \quad \text{cotan } (90 - \alpha)^\circ = \dots.$

Contoh Soal 2.9

Nyatakan perbandingan trigonometri berikut dalam perbandingan trigonometri sudut penyikunya.

a. $\sin 50^\circ$ **b.** $\cos 15^\circ$ **c.** $\tan 35^\circ$

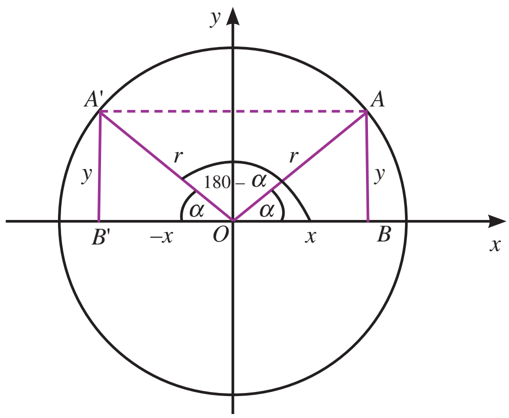
Jawab:

a. $\sin 50^\circ = \sin (90 - 40)^\circ = \cos 40^\circ$

b. $\cos 15^\circ = \cos (90 - 75)^\circ = \sin 75^\circ$

c. $\tan 35^\circ = \tan (90 - 55)^\circ = \text{cotan } 55^\circ$

2. Perbandingan Trigonometri di Kuadran II (Hubungan Sudut α° dan Sudut (180 – α)°)



Gambar 2.14 Hubungan sudut α dan sudut $(180 - \alpha)^\circ$

Perhatikan Gambar 2.14 tersebut. Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu-y, sehingga bayangannya adalah titik $A'(-x, y)$.

Dengan demikian, $\Delta AOB = \Delta A'OB'$ maka $\angle AOB = \angle A'OB' = \alpha$ dan $\angle A'OB = (180 - \alpha)^\circ$. Oleh karena $\angle A'OB = (180 - \alpha)^\circ$ dan koordinat titik $A'(-x, y)$ maka diperoleh

$$\sin (180 - \alpha)^\circ = \frac{y}{r} = \sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \sin (180 - \alpha)^\circ = \cos \alpha^\circ$$

$$\cos (180 - \alpha)^\circ = \frac{-x}{r} = \cos \alpha^\circ \Leftrightarrow \cos (180 - \alpha)^\circ = \sin \alpha^\circ$$

$$\tan (180 - \alpha)^\circ = \frac{y}{-x} = \tan \alpha^\circ \Leftrightarrow \tan (180 - \alpha)^\circ = \text{cotan } \alpha^\circ$$

Tugas Siswa 2.4

Anda telah mengetahui hubungan sudut α° dan sudut $(180 - \alpha)^\circ$. Sekarang, lengkapilah perbandingan trigonometri berikut.

$\text{cosec } (180 - \alpha)^\circ = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots.$ $\Leftrightarrow$ $\text{cosec } (180 - \alpha)^\circ = \ldots.$

$\sec (180 - \alpha)^\circ = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots.$ $\Leftrightarrow$ $\sec (180 - \alpha)^\circ = \ldots.$

$\text{cotan } (180 - \alpha)^\circ = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots.$ $\Leftrightarrow$ $\text{cotan } (180 - \alpha)^\circ = \ldots.$

Jelajah Matematika

Sumber: *www.fksg.utm.my*

Teodolit adalah alat dengan lensa pembidik yang dipakai untuk mengukur sudut-sudut vertikal dan horizontal tentang keadaan permukaan tanah (ketinggian, luas, dan sebagainya). Cara kerja teodolit menggunakan prinsip trogonometri, yaitu mengukur sudut-sudut vertikal dan hrizontal terhadap bidang ukur dengan memanfaatkan sinar infra merah. Teodolit memiliki alat memori untuk menyimpan data yang diperoleh saat pengukuran.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002

Soal Pilihan

Soal Terbuka

Cos 150° merupakan salah satu perbandingan trigonometri yang bernilai negatif. Carilah perbandingan trigonometri lainnya yang juga bernilai negatif.

Contoh Soal 2.10

Gunakan rumus hubungan sudut α dan sudut $(180 - \alpha)^\circ$ untuk menyederhanakan soal-soal berikut.

a. sin 135°
b. cos 150°
c. tan 120°

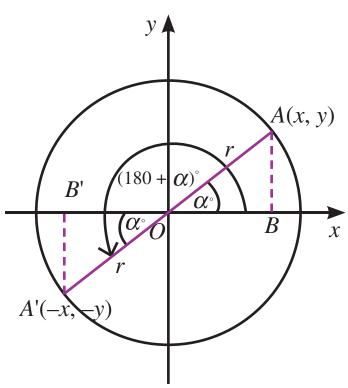
Jawab:

a. $\sin 135^\circ = \sin (180 - 45)^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b. $\cos 150^\circ = \cos (180 - 30)^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c. $\tan 120^\circ = \tan (180 - 60)^\circ = -\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

3. Perbandingan Trigonometri di Kuadran III (Hubungan Sudut α° dan Sudut (180 + α)°)



Gambar 2.16

Hubungan sudut α° dan sudut $(180 + \alpha)$°

Perhatikan Gambar 2.16. Gambar tersebut menunjukkan sebuah titik $A(x, y)$ yang dicerminkan terhadap titik pangkal sumbu koordinat sehingga diperoleh bayangannya, yaitu $A'(-x, -y)$. Dengan demikian, diperoleh $\Delta AOB = \Delta A'OB'$ dan akan berakibat $\angle AOB = \angle A'OB' = \alpha^\circ$.

Oleh karena $\angle A'OB = (180 + \alpha)^\circ$ dan koordinat titik $A'(-x, -y)$ maka diperoleh

$$\sin (180 + \alpha)^\circ = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r}$$
$$= -\sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \sin (180 + \alpha)^\circ = -\sin \alpha^\circ$$

$$\cos (180 + \alpha)^\circ = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r}$$
$$= -\cos \alpha^\circ \Leftrightarrow \cos (180 + \alpha)^\circ = -\cos \alpha^\circ$$

$$\tan (180 + \alpha)^\circ = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$$
$$= \text{cotan}\, \alpha^\circ \Leftrightarrow \tan (180 + \alpha)^\circ = \tan \alpha^\circ$$

Tugas Siswa 2.5

Anda telah mempelajari hubungan sudut α° dan sudut $(180 + \alpha)^\circ$. Sekarang, lengkapilah hubungan berikut.

cosec $(180 + \alpha)^\circ = \frac{...}{...} = ...$	$\Leftrightarrow$	cosec $(180 + \alpha)^\circ = ...$
sec $(180 + \alpha)^\circ = \frac{...}{...} = ...$	$\Leftrightarrow$	sec $(180 + \alpha)^\circ = ...$
cotan $(180 + \alpha)^\circ = \frac{...}{...} = ...$	$\Leftrightarrow$	cotan $(180 + \alpha)^\circ = ...$

Contoh Soal 2.11

Gunakan rumus hubungan sudut α dan sudut $(180 + \alpha)^\circ$ untuk menyederhanakan soal-soal berikut.

a. cos 210°
b. sin 240°
c. tan 225°

Jawab:

a. $\cos 210^\circ = \cos (180 + 30)^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

b. $\sin 240^\circ = \sin (180 + 60)^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c. $\tan 225^\circ = \tan (180 + 45)^\circ = -\tan 45^\circ = 1$

4. Perbandingan Trigonometri di Kuadran IV (Hubungan Sudut α° dan Sudut $(360 - \alpha)^\circ$)

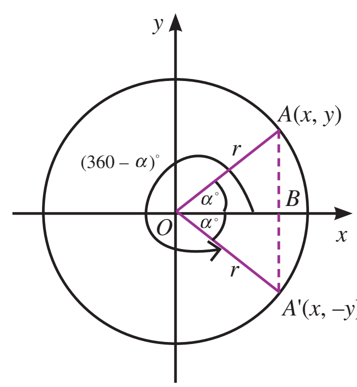
Perhatikan Gambar 2.17. Gambar tersebut menunjukkan sebuah titik $A(x, y)$ yang dicerminkan terhadap sumbu-x, sehingga titik bayangannya $A'(x, -y)$. Pada gambar terlihat bahwa $\Delta AOB = \Delta A'OB$, sehingga besar $\angle AOB = \angle A'OB = \alpha$. Ukuran sudut $A'OB$ yang lancip dinyatakan juga sama dengan $-\alpha^\circ$ karena arahnya searah jarum jam, sehingga tandanya negatif, sedangkan ukuran sudut $A'OB$ adalah $(360 - \alpha)^\circ$. Oleh karena sudut $A'OB$ adalah $(360 - \alpha)^\circ$ dan titik $A'(x, -y)$ maka diperoleh rumus-rumus sebagai berikut.

$$\sin (360 - \alpha)^\circ = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r}$$

$$= -\sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \sin (360 - \alpha)^\circ = -\sin \alpha^\circ$$

$$\cos (360 - \alpha)^\circ = \frac{x}{r}$$

$$= \cos \alpha^\circ \Leftrightarrow \cos (360 - \alpha)^\circ = \cos \alpha^\circ$$



Gambar 2.17

Hubungan sudut α° dan sudut $(360 - \alpha)^\circ$

$$\tan\ (360 - \alpha)^\circ = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x}$$

$$= -\tan \alpha^\circ \Leftrightarrow \tan\ (360 - \alpha)^\circ = -\tan\ \alpha^\circ$$

Tugas Siswa 2.6

Anda telah mengetahui hubungan sudut α° dan sudut $(360 - \alpha)^\circ$. Sekarang, lengkapilah hubungan berikut.

$\text{cosec}\ (360 - \alpha)^\circ = \frac{\dots}{\dots} = \dots.$ $\Leftrightarrow$ $\text{cosec}\ (360 - \alpha)^\circ = \dots.$

$\sec\ (360 - \alpha)^\circ = \frac{\dots}{\dots} = \dots.$ $\Leftrightarrow$ $\sec\ (360 - \alpha)^\circ = \dots.$

$\text{cotan}\ (360 - \alpha)^\circ = \frac{\dots}{\dots} = \dots.$ $\Leftrightarrow$ $\text{cotan}\ (360 - \alpha)^\circ = \dots.$

Soal Pilihan

Nilai dari sin 240° + sin 225° + cos 315° adalah ....

a. $-\sqrt{3}$
b. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
c. $-\frac{1}{2}$
d. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Soal UN SMK, 2004

Contoh Soal 2.12

Gunakan rumus hubungan sudut α dan sudut $(360 - \alpha)^\circ$ untuk menyederhanakan soal berikut.

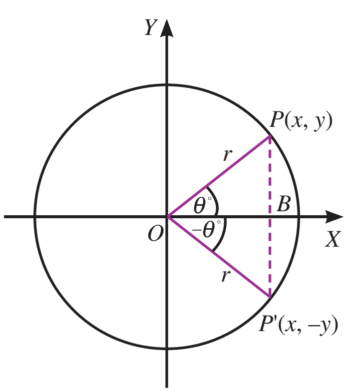
a. $\sin 300^\circ$
b. $\cos 330^\circ$
c. $\tan 315^\circ$

Jawab:

a. $\sin 300^\circ = \sin\ (360 - 60)^\circ$
$= -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

b. $\cos 330^\circ = \cos\ (360 - 30)^\circ$
$= \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c. $\tan 315^\circ = \tan\ (360 - 45)^\circ$
$= -\tan 45 = -1$



Gambar 2.18

Sudut θ dan sudut $-\theta$

5. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut Negatif $(-\theta)$

Perhatikan Gambar 2.18. Buatlah satu titik pada lingkaran di kuadran I. Sebut titik tersebut P dengan koordinat (x, y). Tariklah garis dari tegak lurus sumbu-x hingga menyentuh lingkaran pada kuadran IV. Sebut titik tersebut P' dengan koordinat $(x, -y)$. B adalah titik pada sumbu-x dengan koordinat $(x, 0)$. Dari titik-titik tersebut dapat dibentuk sudut BOP dan sudut BOP'. Apa yang membedakan kedua sudut tersebut?

Pembedanya adalah cara pengambilan sudut tersebut. $\angle BOP$ diambil berlawanan arah putaran jarum jam, sedangkan $\angle BOP'$ diambil searah jarum jam. Oleh karena itu, jika $\angle BOP$ merupakan θ maka $\angle BOP'$ merupakan $-\theta$. Hubungan sudut-sudut tersebut sebagai berikut.

$$\sin(-\theta)^\circ = \frac{-y}{r} = -\sin\theta^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \sin(-\theta)^\circ = -\sin\theta^\circ$$

$$\cos(-\theta)^\circ = \frac{x}{r} = \cos\theta^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \cos(-\theta)^\circ = \cos\theta^\circ$$

$$\sin(-\theta)^\circ = \frac{-y}{x} = -\tan\theta^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \tan(-\theta)^\circ = -\tan\theta^\circ$$

Tugas Siswa 2.7

Anda telah mempelajari perbandingan trigonometri untuk sudut $-\theta$. Sekarang, isilah perbandingan trigonometri berikut.

$$\text{cosec}(-\theta)^\circ = \frac{\dots}{\dots} = \dots. \quad \Leftrightarrow \quad \text{cosec}(-\theta)^\circ = \dots.$$

$$\sec(-\theta)^\circ = \frac{\dots}{\dots} = \dots. \quad \Leftrightarrow \quad \sec(-\theta)^\circ = \dots.$$

$$\text{cotan}(-\theta)^\circ = \frac{\dots}{\dots} = \dots. \quad \Leftrightarrow \quad \text{cotan}(-\theta)^\circ = \dots.$$

Contoh Soal 2.13

Tentukanlah nilai trigonometri berikut.

a. $\sin(-225)^\circ$
b. $\cos(-120)^\circ$
c. $\tan(-300)^\circ$

Jawab:

a. $$\begin{aligned}\sin(-225)^\circ &= -\sin 225^\circ \\ &= -\sin(180+45)^\circ \\ &= -(-\sin 45)^\circ \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}\cos(-120)^\circ &= \cos 120^\circ \\ &= \cos(180-60)^\circ \\ &= -\cos 60^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Soal Pilihan

Nilai dari

$$\frac{\sin 30^\circ + \cos 330^\circ + \sin 150^\circ}{\tan 45^\circ + \cos 210^\circ}$$

= ....

a. $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

b. $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

c. $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

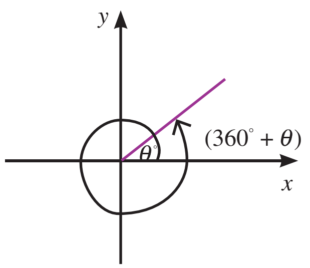
d. $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

e. $\frac{1+2\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}$

Soal UN SMK, 2005

c. $\tan(-300)^\circ = -\tan 300^\circ$
$= -\tan(360 - 60)^\circ$
$= -(-\tan 60^\circ)$
$= -(-\sqrt{3})$
$= \sqrt{3}$

6. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut yang Lebih dari 360°



Gambar 2.19
Sudut (360° + θ)

Perhatikan Gambar 2.19. Gambar tersebut menunjukkan sudut satu putaran ditambah θ. Oleh karena besar sudut satu putaran 360° maka besar sudut yang lebih dari 360°, misalnya (360°+ θ) akan sama dengan θ. Dengan demikian, nilai perbandingan trigonometri untuk sudut yang lebih dari 360° adalah sebagai berikut.

$\sin(k \cdot 360^\circ + \theta) = \sin\theta$; $\operatorname{cosec}(k \cdot 360^\circ + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$
$\cos(k \cdot 360^\circ + \theta) = \cos\theta$; $\sec(k \cdot 360^\circ + \theta) = \sec\theta$
$\tan(k \cdot 360^\circ + \theta) = \tan\theta$; $\operatorname{cotan}(k \cdot 360^\circ + \theta) = \operatorname{cotan}\theta$
dengan $k \in \theta$ bilangan bulat.

Contoh Soal 2.14

Hitunglah nilai trigonometri berikut.
a. $\sin 750^\circ$
b. $\cos 420^\circ$
c. $\tan(-900)^\circ$

Jawab:
a. $\sin 750^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 30^\circ) = \sin(720^\circ + 30^\circ)$
$= \sin 30^\circ$
$= \frac{1}{2}$

b. $\cos 420^\circ = \cos(1 \times 360^\circ + 60^\circ) = \cos(360^\circ + 60^\circ)$
$= \cos 60^\circ$
$= \frac{1}{2}$

c. $\tan(-900)^\circ = -\tan 900^\circ = -\tan(2 \times 360^\circ + 180^\circ)$
$= -\tan 180^\circ$
$= -\tan(180^\circ - 0^\circ)$
$= -(-\tan 0^\circ)$
$= 0$

Soal Pilihan

Nilai dari cos1.200° = ...

a. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
b. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
c. $-\frac{1}{2}$
d. $\frac{1}{2}$
e. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Soal UN SMK, 2005

Tugas Siswa 2.8

Anda telah mempelajari perbandingan trigonometri sudut di suatu kuadran dan perbandingan trigonometri sudut-sudut yang berelasi. Gunakanlah pengetahuan Anda mengenai hal tersebut untuk menyelesaikan soal-soal berikut. Tentukanlah semua nilai x yang memenuhi persamaan berikut.

1. $\sin x = \frac{1}{2}$
2. $\sin x = -1$
3. $\cos x = -\frac{1}{2}$
4. $\tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$
5. $\tan x = 1$
6. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
7. $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
8. $\cos 2x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
9. $\tan 2x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$
10. $\sin 2x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Soal Pilihan

Soal Terbuka

Diketahui nilai sin α = 1. Tentukanlah semua nilai α yang mungkin.

Evaluasi Materi 2.2

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Nyatakanlah bentuk perbandingan trigonometri berikut dalam sudut θ.
   a. $\sin (90^\circ - \theta)$
   b. $\cos (90^\circ - \theta)$
   c. $\tan (90^\circ - \theta)$
   d. $\sin (90^\circ + \theta)$
   e. $\cos (90^\circ + \theta)$
   f. $\tan (90^\circ + \theta)$
   g. $\sin (180^\circ + \theta)$
   h. $\cos (180^\circ + \theta)$
   i. $\tan (180^\circ + \theta)$
   j. $\sin (270^\circ - \theta)$
   k. $\cos (270^\circ - \theta)$
   l. $\tan (270^\circ - \theta)$
2. Nyatakanlah bentuk perbandingan trigonometri berikut dalam sudut lancip. Kemudian, tentukan nilainya.
   a. $\sin 135^\circ$
   b. $\sec 150^\circ$
   c. $\tan 240^\circ$
   d. $\text{cosec } 210^\circ$
   e. $\cos 225^\circ$
   f. $\text{cotan } 120^\circ$
   g. $\sin 270^\circ$
   h. $\cos 330^\circ$
   i. $\text{cosec } 315^\circ$
   j. $\tan 210^\circ$
3. Hitunglah nilai trigonometri berikut tanpa menggunakan kalkulator.
   a. $\sin (-30^\circ)$
   b. $\sin (-225^\circ)$
   c. $\cos (-240^\circ)$
   d. $\cos (-120^\circ)$
   e. $\tan (-315^\circ)$
   f. $\sin 610^\circ$
   g. $\tan 570^\circ$
   h. $\text{cotan } 85^\circ$
   i. $\cos (-390^\circ)$
   j. $\tan (-480^\circ)$
4. Diketahui $\sin 65^\circ = 0{,}901$; $\cos 65^\circ = 0{,}755$; $\tan 65^\circ = 0{,}870$. Hitunglah nilai $\sin 115^\circ$, $\cos 115^\circ$, dan $\tan 115^\circ$.
5. Diketahui $\sin 35^\circ = 0{,}574$; $\cos 35^\circ = 0{,}819$; $\tan 35^\circ = 0{,}700$. Hitunglah nilai $\sin 145^\circ + \cos 215^\circ - \tan 325^\circ$.
6. Jika θ sudut di kuadran IV dan $\cos \theta = \frac{3}{4}$, tentukan nilai $\sin \theta$ dan $\tan \theta$.
7. Jika diketahui $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ dan θ sudut di kuadran II, tentukan $\sin \theta$ dan $\cos \theta$ di kuadran I.
8. Jika θ sudut di kuadran III dan $\sin \theta = -\frac{1}{3}$, tentukan nilai dari:
   a. $\cos \theta$ dan $\tan \theta$;
   b. $\sin (180^\circ - \theta)$, $\cos (180^\circ - \theta)$, dan $\tan (180^\circ - \theta)$;

c. sinus, cosinus, dan tangen untuk θ di kuadran IV.

9. Jika $\tan 15^\circ = a$, tentukan nilai dari

$$\frac{\tan 225^\circ + \tan 285^\circ}{\tan 195^\circ + \tan 105^\circ}$$

10. Sederhanakanlah bentuk-bentuk berikut.

a. $\cos (180 - \alpha)^\circ + \sin (270 - \alpha)^\circ + \sin (90 - \alpha)^\circ$

b. $\sin 240^\circ \; x \cos 330^\circ - \sin (-210^\circ)$

c. $\dfrac{\sin(90-\alpha)^\circ}{\sin(180-\alpha)^\circ}$, untuk $\alpha \neq 0$

d. $\dfrac{\tan(180-\alpha)^\circ}{\text{cotan}(90-\alpha)^\circ}$, untuk $\alpha \neq 0$

C Menggunakan Tabel dan Kalkulator untuk Mencari Nilai Perbandingan Trigonometri

Kata Kunci

- tabel trigonometri
- kalkulator

Anda telah mempelajari nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut istimewa, seperti 0°, 30°, 45°, 60°, dan 180°. Tidak sulit untuk menemukan nilainya karena nilai-nilai perbandingan trigonometri tersebut mudah untuk dihafal. Bagaimana jika Anda harus mencari nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut yang bukan sudut istimewa? Misalnya, Anda diminta mencari nilai $\sin 16{,}3^\circ$, $\cos 36{,}78^\circ$, dan $\tan 128{,}51^\circ$. Apakah Anda dapat langsung menjawabnya? Mungkin tidak mudah untuk mendapatkan nilai perbandingan trigonometrinya. Namun, Anda dapat mencari nilai perbandingan trigonometrinya dengan bantuan tabel trigonometri dan kalkulator.

1. Mencari Nilai Perbandingan Trigonometri Menggunakan Tabel

Perhatikan Tabel 2.1 yang merupakan tabel perbandingan trigonometri untuk sinus. Selain tabel sinus, ada juga tabel cosinus dan tangen yang dapat membantu Anda untuk memperoleh nilai perbandingan trigonometri. Tabel perbandingan trigonometri terdiri atas beberapa bagian, yaitu bagian judul tabel, kolom besar sudut (bagian bulat) di kolom paling kiri, angka di baris pertama menyatakan desimal (satu angka saja), serta bagian nilai.

Tabel 2.1 Tabel Trigonometri Sinus

Kolom besar sudut (bagian bulat)

sin a°

baris desimal

a°	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°
0	.0000	.0017	.0035	.0052	.0070	.0087	.0105
1	.0175	.0192	.0209	.0227	.0244	.0262	.0279
2	.0349	.0366	.0384	.0401	.0419	.0436	.0454
3	.0523	.0541	.0558	.0576	.0593	.0610	.0628
4	.0698	.0715	.0732	.0750	.0767	.0785	.0802
5	.0872	.0889	.0906	.0924	.0941	.0958	.0976
6	.1045	.1063	.1080	.1097	.1115	.1132	.1149
7	.1219	.1236	.1253	.1271	.1288	.1305	.1323
8	.1392	.1409	.1426	.1444	.1461	.1478	.1495
9	.1564	.1582	.1599	.1616	.1633	.1650	.1668
10	.1736	.1754	.1771	.1788	.1805	.1822	.1840
11	.1908	.1925	.1942	.1959	.1977	.1994	.2011
12	.2079	.2006	.2113	.2130	.2147	.204	.2181
13	.2250	.2267	.2284	.2300	.2317	.2334	.2351
14	.2419	.2436	.2453	.2470	.2487	.2504	.2521
.15	.2588	.2605	.2622	.2639	.2656	.2672	.2689
.16	2756	.2773	.2790	.2807	.2823	.2840	.2857
.17	.2924	.2940	.2957	.2974	.2990	.3007	.3024
.18	.3090	.3107	.3123	.3140	.3156	.3173	.3190
.19	.3256	.3272	.3289	.3305	.3322	.3338	.3355
.20	.3420	.3437	.3453	.3469	.3486	.3502	.398
.21	3584	.3600	.3616	.3633	.3649	.3665	.3681
.22	.3746	.3762	.3778	.3795	.3811	.3827	.3843
.23	.3907	.3923	.3939	.3955	.3971	.3987	.4003
.24	4067	.4083	.4099	.4115	.4131	.4147	.4163
.25	.4226	.4242	.4258	.4274	.4289	.4305	.4321
.26	4384	.4399	.4415	.4431	.4446	.4462	.4478
.27	.4540	.4555	.4571	4586	.4602	.4617	.4633
.28	.4695	.4710	.4726	.4741	.4756	.4772	.4787
.29	4848	.4863	.4879	.4894	.4909	.4924	.4939
.30	.5000	.5015	.5030	.5045	.5060	.5075	.5090
.31	.5150	.5165	.5180	.5195	.5210	.5225	.5240
.32	5299	.5314	.5392	.5344	.5358	.5373	.5388
.33	.5446	.5461	.5476	.5490	.5505	.5519	.5534
.34	.5592	.5606	.5621	.5635	.5650	.5664	.5678
.35	5736	.5750	.5764	.5779	.5793	.5807	.5821
.36	5878	.5892	.5906	.5920	.5934	.5948	.5962
.37	.6018	.6032	.6046	.6060	.6074	.6088	.6101
.38	.6157	.6170	.6184	.6198	.6211	.6225	.6239
.39	.6293	.6307	.6320	.6334	.6347	.6361	.6374
.40	6428	.6441	.6455	.6468	.6481	.6494	.6508
.41	.6561	.6574	.6587	.6600	.6613	.6626	.6639

baris desimal

Bagian nilai

Jelajah Matematika

Berkembangnya trigonometri di dunia barat membawa perkembangan trigonometri di Asia. Masyarakat di Asia pun menyelidiki trigonometri. Orang Cina meneliti *Chou-pei-fuan-king* yang menggunakan segitiga siku-siku untuk menghitung jarak. Banyak pula pengaruh penelitian yang dilakukan di India, terhadap sistem bilangan dan nilai tempat. Pada masa kejayaan Dinasti Gupta, Aryabhata menulis Aryabhariya yang merupakan kumpulan dari 33 versi, yang termasuk di dalamnya algoritma untuk menghitung kuadrat, pangkat tiga, akar kuadrat, akar pangkat tiga, dan tabel sinus.

Sumber: *math.unipa.it*

Sekarang, Anda akan belajar mencari nilai perbandingan trigonometri dengan bantuan tabel. Misalnya, Anda ingin mencari nilai sin $17{,}4^\circ$, langkah-langkah yang dapat Anda lakukan sebagai berikut.

1. Buka tabel sinus atau gunakan Tabel 2.1.
2. Cari angka 17 pada kolom besar sudut (bagian bulat).
3. Tentukan nilai desimalnya, yaitu 0,4 pada baris desimal.
4. Nilai sin $17{,}4^\circ$ adalah perpotongan baris 17 dengan kolom 0,4, yaitu 0,2990. Jadi, nilai sin $17{,}4^\circ$ adalah 0,2990.

Sebaliknya, bagaimana jika Anda memiliki nilai perbandingan trigonometri sin α = 0,2990, kemudian Anda diminta untuk mencari nilai α? Berarti Anda diminta untuk mencari kebalikan dari nilai sin yang dapat ditulis $\sin^{-1}$ atau *arc* sin. Hubungan sin dan $\sin^{-1}$ adalah sebagai berikut.

$$\boxed{\sin x = a \quad \Leftrightarrow \quad \sin^{-1} a = x}$$

Artinya, jika $\sin 17{,}4^\circ = 0{,}2990$ maka $\sin^{-1} 0{,}2990 = 17{,}4^\circ$. Dengan demikian, $\sin^{-1} \alpha$ digunakan untuk mendapatkan besar sudut yang nilai sinusnya *a*.

Pencarian besar sudut α yang diketahui nilai *a*-nya dapat menggunakan tabel trigonometri dengan cara yang berkebalikan dengan cara mencari nilai perbandingan trigonometri. Untuk mencari besar sudut, langkah pertama yang dilakukan adalah mencari nilai sinus, cosinus, atau tangen pada tabel trigonometri bagian nilai, kemudian tarik garis sejajar hingga menemukan besar sudut (bagian bulat). Selanjutnya, dari bagian nilai tarik garis vertikal ke atas hingga menemukan nilai desimal. Gabungan bagian bulat dan bagian desimal tersebut merupakan sudut yang dimaksud. Gunakanlah penjelasan tersebut untuk mencari besar sudut pada Tugas Siswa 2.9 (Tabel trigonometri dapat Anda lihat di halaman belakang buku ini).

Notes

Telitilah dalam menggunakan tabel trigonometri. Perhatikan judul tabel tersebut.

Tugas Siswa 2.9

Dengan menggunakan tabel, tentukanlah nilai-nilai berikut.

a.	$\sin 30^\circ$	**f**.	$\sin^{-1} 0{,}9971$
b.	$\cos 27{,}8^\circ$	**g**.	$\cos^{-1} 0{,}8141$
c.	$\tan 73{,}5^\circ$	**h**.	$\tan^{-1} 0{,}3939$
d.	$\cos 94^\circ$	**i**.	$\sin^{-1} 0{,}7627$
e.	$\sin 84{,}6^\circ$	**j**.	$\cos^{-1} 0{,}1271$

2. Mencari Nilai Perbandingan Trigonometri dengan Kalkulator

Mencari nilai sinus, cosinus, atau tangen dengan menggunakan tabel memang mudah, tetapi keakuratannya kurang karena hasil yang diperoleh hanya sampai empat desimal. Selain itu, besar sudut yang dicari pun terbatas pada bilangan yang berdesimal satu. Seandainya kita ingin mencari nilai cos $20{,}8731^\circ$, tentu tabel cosinus sederhana yang disediakan tidak dapat membantu Anda untuk mendapatkan nilainya. Oleh karena itu, Anda dapat menggunakan kalkulator *scientific* untuk mendapatkan nilai perbandingannya.

Cara mencari nilai trigonometri dengan menggunakan kalkulator tidak selalu sama, bergantung pada jenis kalkulator yang digunakan. Misalnya, Anda akan mencari nilai sin $16{,}325^\circ$ dan $\sin^{-1} 0{,}866$.

Sumber: *www.slipperybrick.com*

Gambar 2.20

Kalkulator *scientific*

- Pengoperasian beberapa kalkulator dengan cara menekan tombol berikut.

  $\boxed{\text{Sin}}\ \boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{.}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$

  Pada layar akan muncul angka 0,281085476
  Jadi, sin $16{,}325^\circ = 0{,}281$ (3 desimal).
  Untuk menentukan kebalikannya, misalnya Anda akan menentukan $\sin^{-1} 0{,}866$. Anda dapat menekan tombol berikut.

  $\boxed{\text{Shift}}\ \boxed{\text{Sin}}\ \boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{8}\ \boxed{6}\ \boxed{6}$

  Pada layar akan muncul 59,99708907
  Jadi, $\sin^{-1} 0{,}866. = 60^\circ$ (pembulatan ke puluhan terdekat).

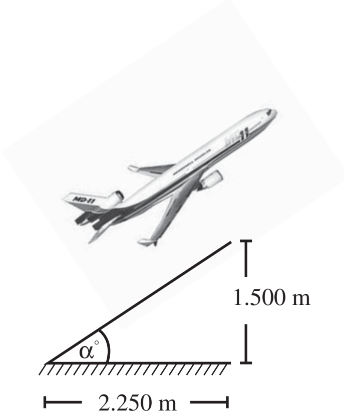
- Ada juga kalkulator yang pengoperasiannya dengan cara menekan tombol berikut.

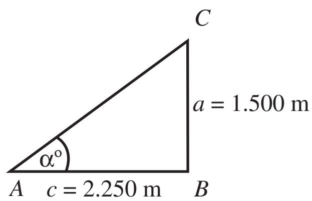
  $\boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{.}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{\text{Sin}}$

  Pada layar akan muncul angka 0,281085476
  Jadi, sin $16{,}325 = 0{,}281$.
  Untuk menentukan kebalikannya, misalnya menentukan $\sin^{-1} 0{,}866$, Anda dapat menekan tombol berikut.

  $\boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{8}\ \boxed{6}\ \boxed{6}\ \boxed{\text{Shift}}\ \boxed{\text{Sin}}$

  Pada layar akan muncul angka 59,99708907
  Jadi, $\sin^{-1} 0{,}866 = 60^\circ$.





Contoh Soal 2.14

Sebuah pesawat terbang yang mengangkut turis domestik *take off* dari landasan dengan sudut terbang (α) seperti yang ditunjukkan pada gambar di samping. Tentukanlah besar sudut terbangnya (α).

Jawab:

Perhatikan bahwa besar sudut α diperoleh dengan menghitung $\tan^{-1} \alpha$.
Dari gambar di samping diperoleh

$$\tan \alpha = \frac{1.500 \text{ m}}{2.250 \text{ m}}$$
$$= 0{,}67$$
$$\alpha = \tan^{-1} 0{,}67$$
$$= 33{,}\ 82^{\circ}$$

Jadi, besar sudut terbangnya (α) adalah 33,82º.

Tugas Siswa 2.10

Gunakan kalkulator *scientific*, kemudian carilah nilai-nilai pada Tugas Siswa 2.9 dengan menggunakan kalkulator. Apakah hasil yang diperoleh sama dengan perhitungan menggunakan tabel?

Evaluasi Materi 2.3

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Gunakan tabel trigonometri untuk menghitung nilai-nilai trigonometri berikut.

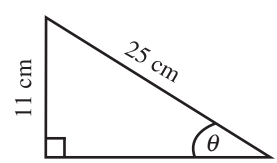
a.	$\sin 19{,}2^{\circ}$	**f.**	$\sin^{-1} 0{,}4633$
b.	$\sin 94{,}6^{\circ}$	**g.**	$\cos^{-1} 0{,}9033$
c.	$\cos 41{,}5^{\circ}$	**h.**	$\cos^{-1} 0{,}1771$
d.	$\cos 53{,}5^{\circ}$	**i.**	$\tan^{-1} 0{,}8243$
e.	$\tan 13{,}1^{\circ}$	**j.**	$\tan^{-1} 10{,}02$

2. Gunakan kalkulator untuk menentukan nilai-nilai trigonometri berikut.

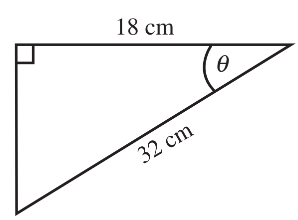
a. $\tan 71{,}843^{\circ}$
b. $\cos 14{,}672^{\circ}$
c. $\sin 68{,}417^{\circ}$
d. $\cos^{-1} 0{,}5841$
f. $\tan^{-1} 0{,}3648$
e. $\sin^{-1} 0{,}9675$

3. Tentukan besar sudut θ pada gambar berikut dengan menggunakan kalkulator.

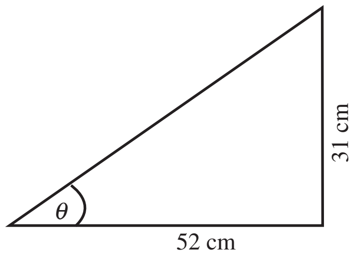
a.



b.

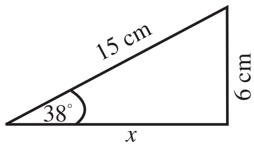


c.

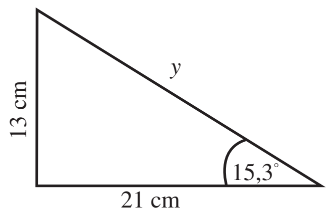


4. Hitunglah panjang x, y, dan z pada gambar berikut.

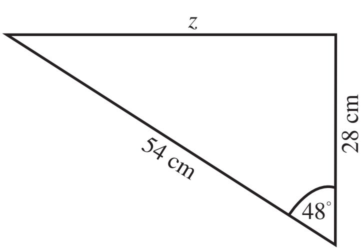
   a.



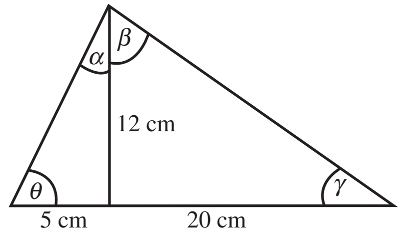
   b.



   c.



5. Tentukan nilai trigonometri dari gambar berikut.



   a. $\sin \alpha$ c. $\tan \gamma$
   b. $\cos \theta$ d. $\cos \beta$

6. Di sebuah taman bermain terdapat jungkat-jungkit yang panjangnya 3,8 m dan membentuk sudut 50° apabila salah satu ujungnya menyentuh tanah. Tentukanlah tinggi jungkat-jungkit pada keadaan tersebut.

7. Sebuah tangga yang panjangnya 9 m disandarkan pada sebuah dinding. Jarak ujung tangga dengan dasar tembok tingginya 6 meter. Berapakah sudut yang dibentuk oleh ujung tangga dengan tanah?

8. Seutas kawat ditarik dari puncak sebuah menara pemancar menuju ke sebuah jangkar yang letaknya 100 m dari dasar menara. Jika besar sudut elevasinya adalah 40°, berapakah tinggi menara tersebut?

D Identitas Trigonometri

Agar Anda lebih memahami materi identitas trigonometri, perhatikan Gambar 2.21.

Segitiga AOB siku-siku di B sehingga berlaku hubungan

$OA^2 = OB^2 + AB^2$

$r^2 = x^2 + y^2$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

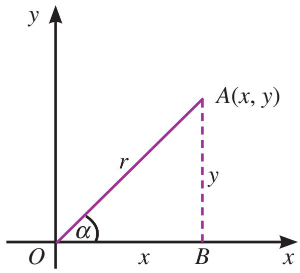
Perbandingan trigonometrinya, yaitu

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

Kata Kunci

- perbandingan trigonometri
- identitas trigonometri
- pembuktian identitas trigonometri



Gambar 2.21

Segitiga *AOB* siku-siku di *B*

$\sin \alpha = \frac{y}{x}$

Oleh karena $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ maka

$x = r \cos \alpha$

Oleh karena $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ maka

$y = r \sin \alpha$

Dari hasil tersebut dapat diperoleh

$r^2 = x^2 + y^2$

$r^2 = (r \cos \alpha)^2 + (r \sin \alpha)^2$

$= r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha$

$= r^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{r^2}{r^2} = 1$

Dari penjelasan tersebut, diperoleh hubungan berikut.

$$\boxed{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1}$$

Hubungan dan persamaan tersebut disebut identitas trigonometri. Dari identitas tersebut dapat diturunkan identitas-identitas trigonometri yang lainnya.

Identitas atau kesamaan adalah suatu bentuk persamaan yang selalu bernilai benar. Untuk membuktikan kebenaran suatu identitas dapat dilakukan dengan bermacam-macam cara, di antaranya sebagai berikut.

1. Mengubah bentuk ruas kiri sehingga menjadi sama dengan ruas kanan.
2. Mengubah bentuk ruas kanan sehingga menjadi sama dengan ruas kiri.
3. Mengubah kedua ruas sehingga keduanya menjadi sama.

Notes

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

$\text{cosec}\, \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$

$\text{cotan}\, \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

Contoh Soal 2.16

Dengan menggunakan nilai dari masing-masing fungsi trigonometrinya, buktikanlah bahwa:

a. $\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ = 1$

b. $\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$

c. $\text{cotan}\ 45^\circ = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}$

d. $\sec^2 30^\circ = 1 + \tan^2 30^\circ$

Jawab:

a. $\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ = 1$

Bukti:

Ruas kiri $= \cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}(3) + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{4}{4} = 1 \text{ (ruas kanan)}$$

b. $\tan 30^\circ = \dfrac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$

Bukti:

Ruas kiri = ruas kanan

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$$
$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$
$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \text{(terbukti)}$$

c. $\text{cotan } 45^\circ = \dfrac{\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}$

Bukti:

Ruas kiri = ruas kanan

$$1 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$
$$= 1 \text{ (terbukti)}$$

d. $\sec^2 30^\circ = 1 + \tan^2 30^\circ$

Bukti:

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2$$

Search

Ketik: http://argyll.epsb.ca/jreed/math9/strand3/trigonometry.swf

Ketik: http://www.dikmenum.go.id/dataapp/e-learning/bahan/kelas3/images/PENERAPAN%20RUMUS%20SINUS%20KOSINUS.swf

website-website tersebut memuat informasi mengenai trigonometri.

$$\frac{4}{9}(3) = 1 + \frac{1}{9}(3)$$

$$\frac{12}{9} = 1 + \frac{3}{9}$$

$$1\frac{3}{9} = 1\frac{3}{9} \quad \text{(terbukti)}$$

Contoh Soal 2.17

Buktikan bahwa:

a. $3 \cos^2 \beta + 3 \cos^2 \beta = 3$

b. $(\cos A + \sin A)^2 = 1 + 2 \cos A \sin A$

c. $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

Jawab:

a. $3 \cos^2 \beta + 3 \cos^2 \beta = 3$

Cara membuktikannya adalah dengan mengubah bentuk ruas kiri agar sama dengan ruas kanan.

$$\begin{aligned} 3 \cos^2 \beta + 3 \cos^2 \beta &= 3(\cos^2 \beta + \cos^2 \beta) \\ &= 3(1) \\ &= 3 \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$

b. $(\cos A + \sin A)^2 = 1 + 2 \cos A \sin A$

Cara membuktikannya adalah dengan mengubah bentuk ruas kiri agar sama dengan ruas kanan.

$$\begin{aligned} (\cos A + \sin A)^2 &= \cos^2 A + 2 \cos A \sin A + \sin^2 A \\ &= \cos^2 A + \sin^2 A + 2 \cos A \sin A \\ &= (\cos^2 A + \sin^2 A) + 2 \cos A \sin A \\ &= 1 + 2 \cos A \sin A \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$

c. $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

Cara membuktikannya adalah dengan mengubah bentuk ruas kiri agar sama dengan ruas kanan.

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta - \sin^4 \theta &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= (1)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{(terbukti)} \end{aligned}$$

Evaluasi Materi 2.4

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Gunakan nilai-nilai perbandingan trigonometri (sudut istimewa) untuk membuktikan pernyataan berikut.
   a. $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$
   b. $1 + \tan^2 30^\circ = \sec^2 30^\circ$
   c. $\sin 30^\circ \text{ cotan } 30^\circ = \dfrac{1}{\sec 30}$
   d. $\text{cosec}^2\, 45^\circ = 1 + \text{cotan}^2\, 45^\circ$
   e. $\tan^2 30^\circ \times \cos 30^\circ = \sin 30^\circ$
   f. $\sin 60^\circ \text{ cotan } 60^\circ = \cos 60^\circ$

g. $1 = \sin 30^\circ \text{ cosec } 30^\circ$
h. $\tan 45^\circ = \sin 45^\circ \sec 45^\circ$

2. Buktikanlah identitas trigonometri berikut.
   a. $(1 + \sin x)(1 - \sin x) = \cos^2 x$
   b. $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$
   c. $3 \cos^2 x = 3 - 3 \sin^2 x$
   d. $(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x) = 2 \sin^2 x - 1$
   e. $(\sin x - \cos x)^2 + 2 \cos x \sin x = 1$
   f. $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

3. Diketahui $\sin A = \dfrac{3}{5}$ dan A sudut lancip. Hitunglah nilai dari cos A, tan A, cotan A, sec A, dan cosec A.

4. Diketahui $\cos \beta = \dfrac{-7}{25}$, untuk $90^\circ < \beta < 180^\circ$. Tentukanlah nilai sin β dan tan β.

5. Diketahui $\tan \alpha = \dfrac{-6}{10}$, untuk $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. Tentukanlah nilai sin α, cos α, cosec α, sec α, dan cotan α.

E Mengkonversi Koordinat Cartesius dan Koordinat Kutub

1. Perbedaan Koordinat Cartesius dan Koordinat Kutub

Kata Kunci

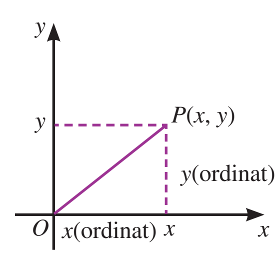
- koordinat Cartesius
- koordinat kutub

Perhatikan Gambar 2.22 dan Gambar 2.23 agar Anda lebih mudah memahami perbedaan koordinat Cartesius dan koordinat kutub.

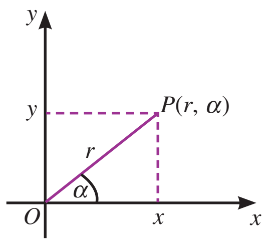
Pada koordinat Cartesius, letak suatu titik ditentukan berdasarkan jarak dan arah terhadap dua garis yang saling tegak lurus. Garis tegak lurus merupakan sumbu koordinat. Jarak titik ke sumbu horizontal (sumbu-x) disebut ordinat dan jarak titik tersebut ke sumbu vertikal (sumbu-y) disebut absis. Pasangan koordinat titik $P(x, y)$ artinya titik P memiliki absis x dan ordinat y.

Selain dengan koordinat Cartesius, letak suatu titik pada bidang datar dapat juga dinyatakan dengan koordinat kutub (koordinat polar) yang ditunjukkan oleh Gambar 2.23.

Untuk menyatakan letak suatu titik pada koordinat kutub, diperlukan dua ukuran, yaitu jarak r (jarak dari suatu titik terhadap titik asal O) dan ukuran sudut α, yaitu sudut antara garis sumbu-x positif dengan garis penghubung titik



Gambar 2.22
Titik *P* pada koordinat Cartesius

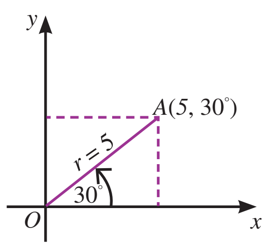


Gambar 2.23

Titik *P* pada koordinat kutub

tersebut dengan titik O yang ditarik berlawanan arah jarum jam. Koordinat kutub titik P dinyatakan dengan $P(r, \alpha)$. Selanjutnya, Anda akan belajar menggambar letak titik pada koordinat kutub. Langkah menentukan koordinat kutub suatu titik adalah menentukan sudut yang diukur dari sumbu-x, kemudian menentukan panjang jarak dari titik O ke titik P sepanjang r satuan.

Contoh Soal 2.18

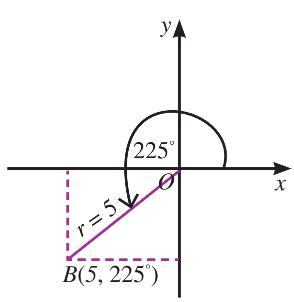


Diketahui koordinat titik $A(5, 30^\circ)$ dan koordinat titik $B(5, 225^\circ)$ seperti yang ditunjukkan pada gambar di samping . Nyatakan kedua titik tersebut dalam koordinat Cartesius.

Jawab:

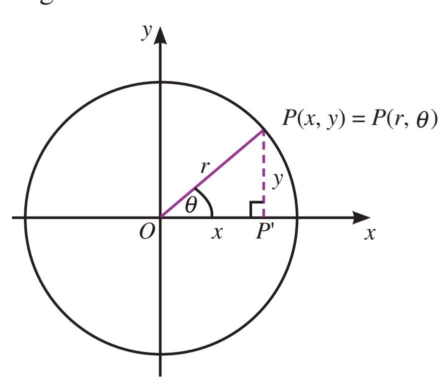
a. $A(5, 30^\circ)$
- Buatlah sudut 30° yang diukur dari sumbu-x pada kuadran I.
- Tentukan titik A dengan menarik garis pembentuk sudut 30° dari titik O sepanjang 5 satuan.
- Titik tersebut merupakan titik A dengan koordinat kutub $(5, 30^\circ)$.

b. $B(5, 225^\circ)$
- Buatlah sudut 225° dari sumbu-x pada kuadran III.
- Tentukan titik B dengan menarik garis pembentuk sudut 225° dari titik O sepanjang 5 satuan.
- Titik tersebut merupakan titik B dengan koordinat kutub $(5, 225^\circ)$.



2. Hubungan Koordinat Kutub dan Koordinat Cartesius

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.24 Titik *P* dalam koordinat Cartesius dan koordinat kutub

Titik P dapat ditulis dalam dua bentuk koordinat, yaitu koordinat Cartesius dan koordinat kutub. Koordinat Cartesius ditulis $P(x, y)$, koordinat kutub ditulis $P(r, \theta)$.
Perhatikan $\Delta OPP'$.

OP merupakan jari-jari $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\sin \theta = \dfrac{PP'}{OP} = \dfrac{y}{r}$ maka $y = r \sin \theta$

$\cos \theta = \dfrac{OP'}{OP} = \dfrac{x}{r}$ maka $x = r \cos \theta$

$\tan \theta = \dfrac{PP'}{OP'} = \dfrac{y}{x}$ maka $\theta = \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$

Dari keterangan tersebut dapat diperoleh hubungan antara koordinat Caresius dan koordinat kutub sebagai berikut.

1. Jika koordinat Cartesius $P(x, y)$ diketahui, Anda dapat memperoleh koordinat kutubnya, yaitu $P(r, \theta)$ dengan nilai $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan θ adalah sudut yang memenuhi $\tan \theta = \dfrac{y}{x}$ (perhatikan kembali Gambar 2.24).
2. Jika koordinat kutub $P(r, \theta)$ diketahui, Anda dapat memperoleh koordinat Cartesiusnya, yaitu $P(x, y)$ dengan $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$.

Contoh Soal 2.19

Ubahlah koordinat titik $P(9, 3\sqrt{3})$ ke dalam koordinat kutub $P(r, \theta)$.

Jawab:
Titik $P(9, 3\sqrt{3})$ berarti titik P terletak di kuadran I dengan $x = 9$ dan $y = 3\sqrt{3}$.

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
&= \sqrt{9^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{81 + 27} \\
&= \sqrt{108}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tan \theta &= \frac{y}{x} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{9} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{3} \\
\theta &= \tan^{-1} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\
&= 30^\circ
\end{aligned}
$$

Jadi, koordinat titik kutub $P(9, 3\sqrt{3})$ adalah $(\sqrt{108}, 30^\circ)$.

Solusi Cerdas

Diketahui koordinat Cartesius $(-5\sqrt{3}, 5)$ maka koordinat kutubnya adalah ....

a. $(10, 30^\circ)$
b. $(10, 60^\circ)$
c. $(10, 120^\circ)$
d. $(10, 150^\circ)$
e. $(10, 330^\circ)$

Jawab:
Koordinat Cartesius $(-5\sqrt{3}, 5)$ berarti absis $(x) = -5\sqrt{3}$ dan ordinat $(y) = 5$.
Anda harus mencari koordinat kutubnya (r, α).

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{\left(-5\sqrt{3}\right)^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{75 + 25}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$r = 10$$

Oleh karena diketahui nilai x dan y-nya, Anda dapat mencari besar sudutnya dengan menggunakan perbandingan trigonometri tangen sudut yang dicari adalah α maka

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{5}{-5\sqrt{3}}$$
$$= -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$\alpha = \tan^{-1} -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$= \text{arc tan } -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$\alpha = 150^\circ$$

Jadi, koordinat kutubnya adalah $(10, 150^\circ)$.

Jawaban: **d**

Soal UN SMK, 2006

Contoh Soal 2.20

Ubahlah koordinat titik $P(-2\sqrt{3}, -2)$ ke dalam koordinat kutub $P(r, \theta)$.

Jawab:
Titik $P(-2\sqrt{3}, -2)$ berarti titik P terletak di kuadran III dengan $x = -2\sqrt{3}$, dan $y = -2$.

$$r = x^2 + y^2$$
$$= \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{12 + 4}$$
$$= \sqrt{16} = 4$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$
$$= \frac{-2}{-2\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$= 210^\circ \text{ (di kuadran III)}$$

Jadi, koordinat titik kutub $P(-2\sqrt{3}, -2)$ adalah $(4, 210^\circ)$.

Contoh Soal 2.21

Diketahui titik P mempunyai koordinat kutub $(3, 210^\circ)$. Tentukan koordinat Cartesiusnya.

Jawab:
$P(3, 210^\circ)$ berarti $r = 3$ dan $\theta = 210^\circ$

$$x = r \cos \theta$$
$$= 3 \sin 210^\circ$$
$$= 3 \sin(180^\circ + 30^\circ)$$
$$= 3(-\sin 30^\circ)$$
$$x = 3(-\frac{1}{2}\sqrt{3})$$
$$x = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$$
$$y = r \sin \theta$$
$$= 3 \cos 210^\circ$$
$$= 3 \cos(180^\circ + 30^\circ)$$
$$= 3(-\cos 30^\circ)$$
$$y = 3(-\frac{1}{2})$$
$$y = -\frac{3}{2}$$

Jadi, koordinat Cartesius titik $P(3, 210^\circ)$ adalah $P(-\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{3}{2})$.

Evaluasi Materi 2.5

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Ubahlah titik dalam koordinat kutub berikut ke dalam koordinat Cartesius. Kemudian, tunjukkan titik-titik tersebut pada satu bidang gambar.
   a. $K(3, 45^\circ)$
   b. $L(2, 135^\circ)$
   c. $M(3, 270^\circ)$
   d. $N(2, 330^\circ)$
   e. $O(5, 750^\circ)$
2. Ubahlah titik-titik berikut ke dalam koordinat kutub. Kemudian, tunjukkan titik-titik tersebut pada satu bidang gambar.
   a. $P(3\sqrt{3}, 3)$
   b. $Q(-2, 2\sqrt{3})$
   c. $R(\sqrt{3}, -1)$
   d. $S(-5, -5)$
   e. $T(-3, 3\sqrt{3})$
3. Diketahui koordinat Cartesius titik $A(-8, y)$ dan koordinat kutubnya $A(r, 120^\circ)$. Tentukanlah nilai dari $y + r$.
4. Koordinat kutub P adalah $(2, \theta)$ dan koordinat Cartesiusnya adalah $(-1, y)$. Jika P terletak di kuadran III, tentukanlah nilai θ dan y.
5. Sebuah perahu bergerak dari pelabuhan Barru ke pelabuhan Kajuadi dengan arah 60° dan kecepatan 50 km/jam. Setelah berlayar 2 jam, perahu tersebut tiba di pelabuhan Kajuadi. Tentukanlah:
   a. jarak pelabuhan Kajuadi dari pelabuhan Barru;
   b. jarak pelabuhan Kajuadi dari pelabuhan arah Utara pelabuhan Barru;
   c. jarak pelabuhan Kajuadi dari pelabuhan arah Timur pelabuhan Barru.

F Aturan Sinus dan Cosinus

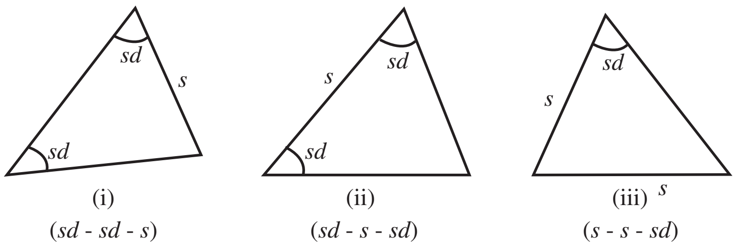
Pada subbab sebelumnya, Anda telah mempelajari rumus trigonometri. Rumus trigonometri yang telah Anda pelajari tersebut hanya berlaku pada segitiga siku-siku. Untuk segitiga sebarang Anda dapat menentukan unsur-unsur yang belum diketahui dengan menggunakan aturan sinus dan aturan cosinus. Kedua aturan tersebut sebagai berikut.

Kata Kunci

- segitiga sebarang
- panjang sisi
- besar sudut

1. Aturan Sinus

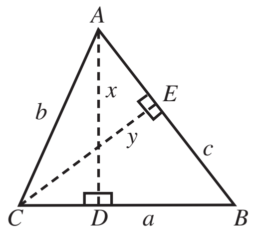
Agar Anda lebih mudah mempelajari materi aturan sinus, perhatikan segitiga-segitiga pada Gambar 2.25.



Gambar 2.24 Segitiga dengan berbagai unsur yang diketahui

Segitiga (i) dan (ii) diketahui salah satu sisi dan dua sudutnya, sedangkan segitiga (iii) diketahui dua sisi dan sudut di depan salah satu sisi yang diketahui. Bagaimana Anda dapat mengetahui ukuran sudut dan sisi lain dari ketiga segitiga tersebut?

Perhatikan segitiga ABC pada Gambar 2.26.



Gambar 2.26

Segitiga *ABC* dengan *AD* sebagai garis tinggi

Misalkan, $AD = x$, AD adalah garis tinggi maka perbandingan trigonometrinya adalah

$$\sin C = \frac{x}{b} \Rightarrow y = b \sin A \qquad \text{...... (1)}$$

$$\sin B = \frac{x}{c} \Rightarrow y = a \sin B \qquad \text{...... (2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $b \sin C = c \sin B$ yang dapat dibuat bentuk berikut.

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Dengan menggunakan persamaan tersebut, panjang b dan c dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} \quad \text{dan} \quad c = \frac{b \sin C}{\sin B}$$

Selanjutnya, untuk mencari panjang a, Anda dapat menggunakan garis tinggi CE. Misalnya, CE disimbolkan dengan y maka perbandingan trigonometrinya adalah

$$\sin A = \frac{y}{b} \Rightarrow y = b \sin A \qquad \text{...... (3)}$$

$$\sin B = \frac{y}{a} \Rightarrow y = a \sin B \qquad \text{...... (4)}$$

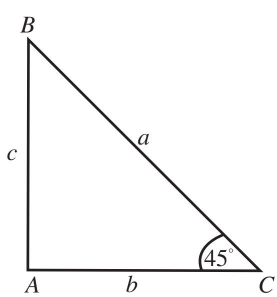
Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh $b \sin A = a \sin B$.

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad \text{sehingga} \quad a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

Dari bentuk $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ dan $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$, diperoleh aturan sinus yang dirumuskan sebagai berikut.

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

Contoh Soal 2.21



Diketahui segitiga ABC seperti pada gambar di samping yang unsur-unsurnya sebagai berikut.

$\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, dan $a = 6$ cm.

Tentukan unsur-unsur lainnya.

Jawab:
Coba Anda ingat kembali jumlah ketiga sudut dalam suatu segitiga adalah 180°, sehingga
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$
$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$
$= 180° - (90° + 45°)$
$= 45°$
Selanjutnya, gunakan aturan sinus untuk mencari unsur lainnya.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{6 \cdot \sin 90}{\sin 45} = \frac{6 \times 1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

Jadi, $b = 6\sqrt{2}$ cm.

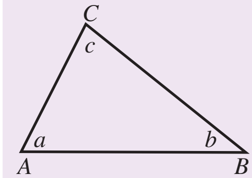
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{6\sqrt{2} \sin 45}{\sin 90} = \frac{6\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{2}}{1} = 6$$

Jadi, $c = 6$ cm.

Jadi, unsur-unsur lainnya adalah $\angle B = 45°$, $b = 6\sqrt{2}$ cm, dan $c = 6$ cm.

Notes

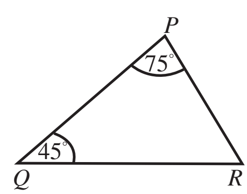


Ingatlah jumlah ketiga sudut segitiga adalah 180° sehingga jika diketahui sudut $\angle BAC = a$ dan $\angle ACB = c$, Anda dapat mencari sudut ABC dengan cara
$\angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle ACB)$
$= 180° - (a + b)$

Contoh Soal 2.23

Diketahui segitiga PQR dengan $\angle PQR = 45°$, $\angle QPR = 75°$, dan panjang sisi PR 8 cm. Tentukanlah panjang QP dan QR.

Jawab:
Soal tersebut dapat Anda gambarkan seperti gambar di samping. Dengan mengingat kembali bahwa jumlah sudut segitiga adalah 180°, Anda dapat menentukan besar $\angle PRQ$ dengan cara berikut.



$\angle PRQ = 180° - (\angle PQR + \angle QPR)$
$= 180° - (45° + 75°)$
$= 180° - (120°)$
$\angle PRQ = 60°$
Selanjutnya, Anda dapat menggunakan rumus sinus untuk mencari panjang PR dan QR.
Aturan sinus yang berlaku pada segitiga ini adalah

$$\frac{PR}{\sin \angle PQR} = \frac{QR}{\sin \angle QPR} = \frac{QP}{\sin \angle PRQ}$$

$$\frac{8}{\sin 45°} = \frac{QR}{\sin 75°} = \frac{QP}{\sin 60°}$$

Untuk mencari panjang QP ambil $\frac{8}{\sin 45°} = \frac{QP}{\sin 60°}$

$$\frac{8}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{QP}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$QP = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \times 8$$

$$QP = 4\sqrt{6}$$

Untuk mencari panjang QR gunakan aturan sinus berikut.

$$\frac{8}{\sin 45^\circ} = \frac{QR}{\sin 75^\circ}$$

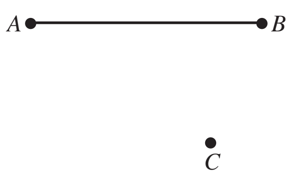
$$\frac{8}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{QR}{0,965}$$

sin 75° dicari dengan menggunakan kalkulator atau sin 75° = (45° + 30°)

$$QR = 10,91 \text{ cm}$$

Jadi, panjang $QP = 4\sqrt{6}$ cm dan panjang QR = 10,91 cm.

Contoh Soal 2.24



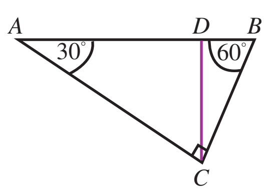
Perhatikan gambar di samping.

Ruas garis AB merupakan bentangan kawat sepanjang 5 km dan titik C menggambarkan posisi pabrik. Jika dari titik A ke C dan dari titik B ke C dipasang kawat, akan terbentuk segitiga ABC dengan $\angle CAB = 30^\circ$ dan $\angle ABC = 60^\circ$. Dari informasi tersebut, tentukanlah:

a. panjang kawat listrik yang diperlukan dari titik B ke titik C;

b. panjang kawat listrik terpendek yang dibutuhkan agar pabrik memperoleh penerangan listrik.

Jawab:



Perhatikan gambar di samping. Diketahui $\angle CAB = 30^\circ$ dan $\angle ABC = 60^\circ$, sehingga $\angle ACB = 90^\circ$. Selanjutnya, Anda dapat menggunakan rumus sinus untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut.

a. Mencari panjang kawat listrik yang diperlukan dari titik B ke titik C berarti Anda harus mencari panjang BC.

Aturan sinus yang berlaku $\frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{BC}{\sin \angle CAB}$

$$BC = \frac{AB \sin \angle CAB}{\sin \angle BCA}$$

$$= \frac{5 \sin 30^\circ}{\sin 90^\circ}$$

$$= \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)}{1}$$

$$= 2,5$$

Jadi, panjang kawat listrik yang menghubungkan titik B dan C adalah 2,5 km.

b. Jarak terpendek dari pabrik ke bentangan kawat listrik adalah garis *CD* karena garis *CD* merupakan jarak terpendek dari *C* ke *AB* (*CD* tegak lurus *AB*). Pada segitiga *BCD* berlaku hubungan berikut.

$$\frac{CD}{\sin \angle CBD} = \frac{BC}{\sin \angle CDB}$$

$$CD = \frac{BC \sin \angle CBD}{\sin CDB} = \frac{2,5 \sin 60^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}{1}$$

$$= \frac{5}{4}\sqrt{3} \approx 2,2$$

Jadi, kawat listrik terpendek agar pabrik mendapat penerangan adalah 2,2 km.

Soal Pilihan

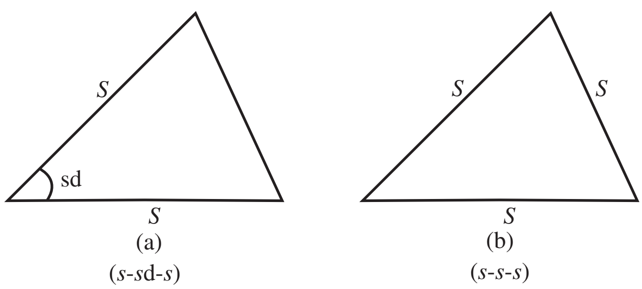
Jika dari segitiga *ABC* diketahui $AC = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm, *BC* = 10 cm, dan sudut *A* = 60° maka sudut *C* adalah ....

a. 105°
b. 90°
c. 75°
d. 55°
e. 45°

Soal UMPTN, 2001

2. Aturan Cosinus

Perhatikan segitiga pada Gambar 2.27 berikut.



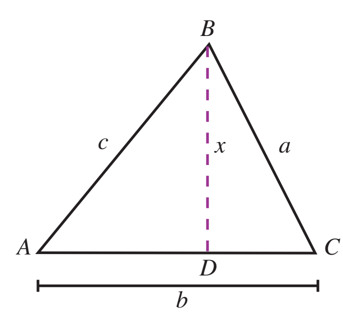
Gambar 2.27 (a) segitiga yang diketahui dua sisi dan sudut yang diapitnya
(b) segitiga yang diketahui ketiga sisinya

Pada segitiga (a), diketahui sebuah sudut dan dua buah sisi yang mengapitnya, sedangkan pada segitiga (b), diketahui panjang ketiga sisinya. Bagaimana cara Anda mengetahui ukuran sudut dan sisi lainnya dari kedua segitiga tersebut?
Perhatikan segitiga pada Gambar 2.28. Misalkan, $\angle A$, b, dan c diketahui. Kemudian, Anda diminta mencari panjang a.
Langkah yang dapat Anda lakukan adalah sebagai berikut. Buat garis tinggi *BD*, sebut panjang *BD* adalah x

$$\cos A = \frac{AD}{c} \Rightarrow AD = c \cos A$$

Perhatikan segitiga *ABD* pada Gambar 2.28. Pada segitiga *ABD* berlaku dalil Pythagoras berikut.

$$\begin{aligned} x^2 &= c^2 - AD^2 \\ &= c^2 - (c \cos A)^2 \\ &= c^2 - c^2 \cos^2 A \end{aligned}$$

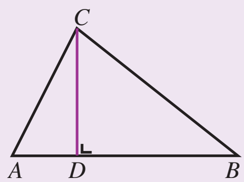


Gambar 2.28

Segitiga *ABC* yang diketahui dua sisi dan sudut yang diapitnya

Notes

Garis tinggi pada segitiga merupakan garis yang ditarik dari titik puncak segitiga tegak lurus dengan alas segitiga.



Pada gambar tersebut *CD* merupakan garis tinggi segitiga *ABC*.

$DC^2 = (b - AD)^2$
$= b^2 - 2bAD + AD^2$
$= b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A$

Perhatikan pula segitiga *BCD*. Pada segitiga *BCD* berlaku dalil Pythagoras berikut.

$a^2 = DC^2 + x^2$
$= (b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A) + c^2 - c^2 \cos^2 A$
$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Tugas Siswa 2.11

Dengan cara yang sama seperti pada uraian di atas, coba Anda buktikan rumus berikut.

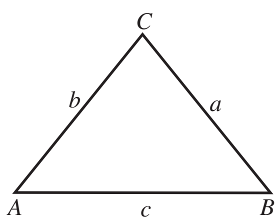
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Dengan demikian, dapat diperoleh hasil berikut.

Pada setiap segitiga *ABC* dengan panjang sisi *BC*, *AC*, dan *AB* berturut-turut *a*, *b*, dan *c* serta sudut di depan sisi-sisi tersebut berturut-turut *A*, *B*, *C* maka berlaku aturan cosinus berikut.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



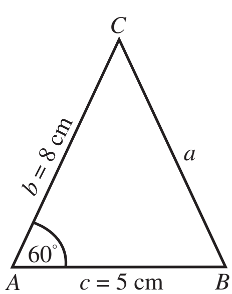
Gambar 2.29

Segitiga *ABC* dan panjang sisinya

Untuk menentukan besar sudut dalam suatu segitiga, aturan cosinus dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Contoh Soal 2.25



Pada segitiga *ABC*, diketahui panjang sisi $b = 8$ cm, sisi $c = 5$ cm, dan $\angle A = 60^\circ$. Hitunglah sisi *a*.

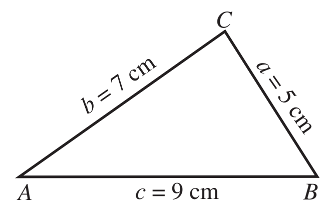
Jawab:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$= 8^2 + 5^2 - 2(8)(5) \cos 60^\circ$
$= 64 + 25 - 2(40)\left(\frac{1}{2}\right)$

$a^2 = 89 - 40$
$= 49$
$a = \sqrt{49}$
$= 7$
Jadi, panjang sisi a adalah 7 cm.

Contoh Soal 2.26

Hitunglah besar sudut-sudut pada segitiga ABC, jika diketahui $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, dan $c = 9$ cm.



Jawab:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$= \frac{7^2 + 9^2 - 5^2}{2(7)(9)} = \frac{49 + 81 - 25}{126}$$

Anda dapat mencari besar sudut A dengan mencari $\cos^{-1}$ 0,833 menggunakan kalkulator.

$\angle A = \cos^{-1} 0{,}833 = 33{,}6^\circ$

Jadi, $\angle A = 33{,}6^\circ$.

$$\cos \angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$= \frac{5^2 + 9^2 - 7^2}{2(5)(9)}$$
$$= \frac{25 + 81 - 49}{90}$$
$$= \frac{57}{90} = 0{,}633$$

$\angle B = \cos^{-1} 0{,}633 = 50{,}7^\circ$

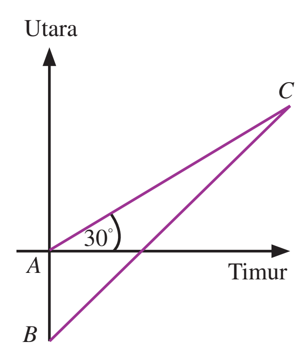
Jadi, $\angle B = 50{,}7^\circ$.

$\angle C = 180^\circ - (33{,}6^\circ + 50{,}7^\circ)$
$= 180^\circ - 84{,}3^\circ$
$= 95{,}7^\circ$

Jadi, $\angle C = 95{,}7^\circ$.

Contoh Soal 2.27

Pada sebuah peta dengan skala 1:100.000, letak tempat wisata C dari tempat wisata A adalah 30° seperti pada gambar di samping. Jika hasil pengukuran pada peta diperoleh jarak dari tempat wisata A ke tempat wisata C adalah 530 mm dan jarak dari tempat wisata A ke tempat wisata B adalah 465 mm, tentukanlah jarak sebenarnya dari tempat wisata B ke tempat wisata C.



Jawab:

Berdasarkan rumus cosinus pada segitiga ABC maka berlaku

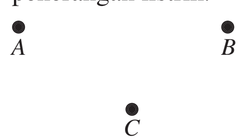
$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2(AC)(AB)\cos 120^\circ$$
$$= (530)^2 + (465)^2 - 2(530)(465)\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= 743.575$$
$$BC = \sqrt{74357} = 862,31 \text{ mm}$$

Jadi, jarak tempat wisata B ke tempat wisata C yang sebenarnya adalah 862,31 × 100.000 m atau 86,231 km.

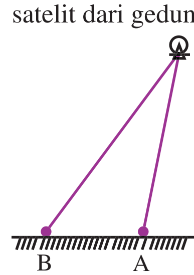
Evaluasi Materi 2.6

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

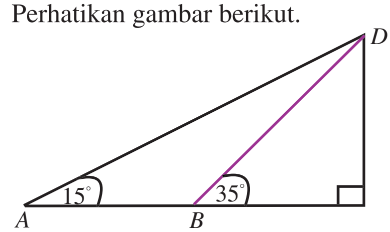
1. Tentukanlah unsur-unsur segitiga ABC lainnya apabila diketahui unsur-unsur sebagai berikut.
   - **a.** $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, dan $C = 4$ cm
   - **b.** $a = 13$ cm, $\angle B = 37^\circ$, dan $\angle C = 30^\circ$
   - **c.** $a = 15$ cm, $\angle A = 120^\circ$, dan $\angle B = 30^\circ$
2. Tentukan sisi-sisi segitiga ABC, jika diketahui sebagai berikut.
   - **a.** $a + b = 10$, $\angle A = 30$, dan $\angle B = 45^\circ$
   - **b.** $a + b = 30$, $\angle B = 45^\circ$, dan $\angle C = 45^\circ$
   - **c.** $A - B = 15$, $\angle A = 60^\circ$, dan $\angle B = 60^\circ$
   - **d.** $A - B = 5$, $\angle A = 30^\circ$, dan $\angle B = 65^\circ$
3. Tentukan sisi-sisi dari segitiga ABC jika $a + b + c = 50$, $\angle A = 50^\circ$, dan $\angle B = 45^\circ$.
4. Perhatikan gambar berikut. Ruas garis AB merupakan bentangan kawat sepanjang 4 km dan titik C mengambarkan posisi pabrik. Jika dari titik A ke C dan dari titik B ke C dipasang kawat, akan terbentuk segitiga ABC dengan $\angle CAB = \angle ABC = 45^\circ$. Hitunglah panjang kawat listrik terpendek yang dibutuhkan agar pabrik memperoleh penerangan listrik.



5. Sebuah satelit komunikasi tepat berada di atas garis yang menghubungkan gedung penerima A dan B. Diketahui sudut elevasi antara sinyal yang dipancarkan dan gedung penerima A adalah $75,20^\circ$, sedangkan sudut elevasi dari gedung penerima B adalah $62,23^\circ$. Jika jarak antara gedung penerima A dan B adalah 1.250 km, tentukan jarak satelit dari gedung penerima A.



6. Kapal layar berangkat dari pelabuhan A ke pelabuhan B dengan arah 270°. Kemudian, kapal layar tersebut berlayar ke pelabuhan C dengan arah 140°. Jarak pelabuhan A ke pelabuhan B adalah 100 km. Pelabuhan C berada pada arah 210° dari pelabuhan A maka hitunglah:
   - **a.** jarak pelabuhan C dari A;
   - **b.** jarak pelabuhan C dari B.
7. Perhatikan gambar berikut.



Jika titik B terletak pada kaki bukit dan dari titik B terlihat puncak bukit, yaitu D dengan sudut elevasi 35°. Kemudian, titik A terletak sama tinggi dengan titik B. Dari titik A puncak bukit terlihat dengan sudut elevasi 15°. Jika jarak AB adalah 1.200 meter maka hitunglah tinggi bukit tersebut.

8. Tentukan panjang sisi ketiga segitiga untuk setiap segitiga berikut.

a. pada segitiga ABC, jika $b = 2$, $c = 5$, dan $\angle A = 60°$

b. pada segitiga ABC, jika $a = 2$, $c = 5$, dan $\angle B = 125°$

c. pada segitiga ABC, jika $b = 6$, $c = 8$, dan $\angle A = 55{,}8°$

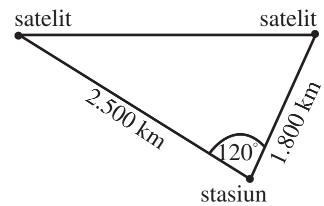
9. Tentukanlah besar sudut pada segitiga yang diketahui unsur-unsurnya sebagai berikut.

a. $\angle A$ pada ΔABC, jika $a = 11$, $b = 10$, dan $c = 8$

b. $\angle B$ pada ΔABC, jika $a = 6$, $b = 7$, dan $c = 5$

c. $\angle R$ pada ΔPQR, jika $p = 8$, $q = 10$, dan $r = 15$

10. Dua buah satelit diamati dari sebuah stasiun pengamatan. Jarak salah satu satelit dengan stasiun adalah 2.500 km dan satelit lainnya berjarak 1.900 km dari stasiun. Sudut yang dibentuk kedua satelit dan stasiun pengamatan adalah 120°. Tentukanlah jarak kedua satelit tersebut.



G Luas Segitiga

1. Luas Segitiga yang Diketahui Sebuah Sudut dan Dua Sisi yang Mengapitnya

Perhatikan segitiga ABC pada Gambar 2.30. Misalkan, panjang AB adalah c, panjang BC adalah a, panjang AC adalah b, dan panjang BD adalah x maka

$$\sin A = \frac{x}{c} \quad \Leftrightarrow \quad x = c \sin A$$

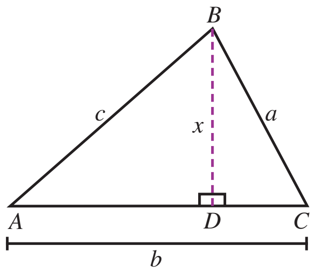
$$\sin C = \frac{x}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x = a \sin C$$

$$L\ \Delta ABC = \frac{\text{alas} \times \text{tinggi}}{2} = \frac{b \times x}{2} = \frac{b \times c \sin A}{2} = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$L\ \Delta ABC = \frac{\text{alas} \times \text{tinggi}}{2} = \frac{b \times x}{2} = \frac{b \times a \sin A}{2} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

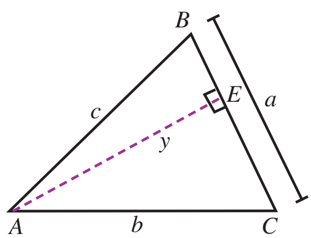
Kata Kunci

- sudut apit
- panjang sisi
- luas daerah



Gambar 2.30

Segitiga *ABC* dengan *BD* sebagai garis tinggi



Gambar 2.31

Segitiga *ABC* dengan *AE* sebagai garis tinggi

Sekarang, perhatikan segitiga pada Gambar 2.31.
Misalkan, diketahui panjang $AB = c$, panjang $BC = a$, panjang $AC = b$, dan panjang $AE = y$ maka

$$\sin B = \frac{y}{c} \quad \Leftrightarrow \quad y = c \sin B$$

$$\sin C = \frac{y}{b} \quad \Leftrightarrow \quad y = b \sin C$$

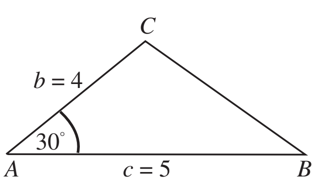
$$L\ \Delta ABC = \frac{\text{alas} \times \text{tinggi}}{2} = \frac{a \times y}{2} = \frac{a \times a \sin B}{2} = \frac{1}{2} ab \sin B$$

$$\text{atau } L\ \Delta ABC = \frac{\text{alas} \times \text{ tinggi}}{2} = \frac{a \times y}{2} = \frac{a \times a \sin C}{2} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh hasil berikut.
Untuk menghitung luas daerah segitiga jika diketahui sebuah sudut dan dua sisi yang mengapitnya Anda dapat menggunakan rumus berikut.

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} bc \sin A \\ L &= \frac{1}{2} ac \sin B \\ L &= \frac{1}{2} ab \sin C \end{aligned}}$$

Contoh Soal 2.28



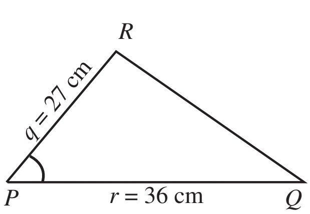
Hitunglah luas ΔABC, jika diketahui sisi $b = 4$, $c = 5$, dan $\angle A = 30^\circ$.

Jawab:

$$\begin{aligned} L\ \Delta ABC &= \frac{1}{2} bc \sin A \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{1}{2} = 5 \end{aligned}$$

Jadi, luas ΔABC adalah 5 satuan luas.

Contoh Soal 2.29



Diketahui luas ΔPQR adalah 243 cm^2. Jika panjang $q = 27$ cm dan $r = 36$ cm, berapakah besar $\angle P$?

Jawab:

$$L\ \Delta PQR = \frac{1}{2} \cdot q \cdot r \cdot \sin P$$

$243 = \frac{1}{2} \times 27 \times 36 \times \sin P$

$486 = 972 \sin P$

$\sin P = \frac{486}{972} = \frac{1}{2}$

$P = \sin^{-1} \frac{1}{2} = 30^\circ$

Jadi, besar $\angle P = 30^\circ$.

2. Luas Segitiga yang Diketahui Dua Sudut dan Panjang Salah Satu Sisinya

Perhatikan Gambar 2.32. Misalkan, diketahui $\angle A$, $\angle B$, dan panjang c. Dari aturan sinus dan luas segitiga diperoleh

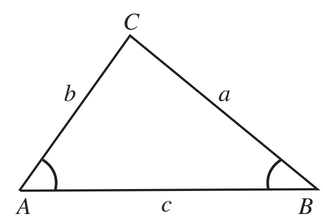
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{dan} \quad \text{luas segitiga} = L = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

sehingga $a = \dfrac{b \sin A}{\sin B}$

Jadi, luas segitiga $= L = \frac{1}{2} ab \sin C$

$$= \frac{1}{2} \frac{b \sin A}{\sin B} \cdot b \sin C$$

$$= \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B}$$



Gambar 2.32

Segitiga yang diketahui dua sudut dan panjang salah satu sisinya

Tugas Siswa 2.12

Dengan cara yang sama seperti pada uraian di atas, buktikanlah rumus berikut.

$$L = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} \quad ; \quad L = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

Jadi, untuk menentukan luas segitiga jika diketahui sebuah sisi dan dua sudut yang mengapitnya dapat digunakan rumus berikut.

Soal Pilihan

Soal Terbuka

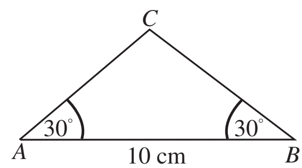
Buatlah sebuah soal untuk segitiga yang diketahui dua sudut dan panjang salah satu sisinya.
Tukarlah soal tersebut dengan teman Anda.
Kemudian, tentukanlah luas segitiga tersebut.

$$L = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$
$$L = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B}$$
$$L = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

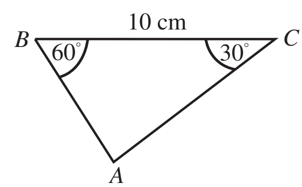
Contoh Soal 2.30

Hitunglah luas segitiga berikut.

a.



b.



Jawab:

a. Diketahui $AB = 10$ cm

$\angle A = 30^\circ$

$\angle B = 30^\circ$

$\angle C = 180 - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$

$$L = \frac{(AB)^2 \sin B \sin A}{2 \sin C}$$
$$= \frac{10^2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 30^\circ}{2 \sin 120^\circ}$$
$$= \frac{100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}$$
$$= \frac{25}{\sqrt{3}} = \frac{25}{3}\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

b. Diketahui $BC = 10$ cm

$\angle B = 60^\circ, \angle C = 30^\circ$

$\angle A = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$

$$L = \frac{(BC)^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$
$$= \frac{10^2 \cdot \sin 60 \cdot \sin 30}{2 \sin 90}$$
$$= \frac{100 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{2}}{2}$$
$$= \frac{25}{2}\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

3. Luas Segitiga yang Diketahui Ketiga Sisinya

Perhatikan segitiga pada Gambar 2.33.

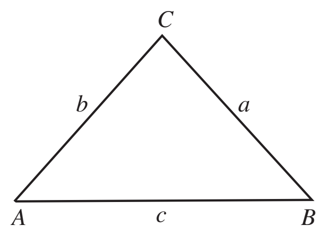
Pada pelajaran sebelumnya, Anda telah mempelajari bahwa rumus luas segitiga adalah

$$L\ \Delta ABC = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B \qquad \text{......(1)}$$

Misalkan, $2s = a + b + c$. Menurut rumus identitas trigonometri

$$\begin{aligned}
\sin^2 B &= 1 - \cos^2 B \\
&= (1 + \cos B)(1 - \cos B) \\
&= \left(1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)\left(1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \\
&= \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2ac} \\
&= \frac{(a+c)^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{-(a-c)^2 + b^2}{2ac} \\
&= \frac{(a+b)(a+c-b)(a-c+b)(-a+c+b)}{4a^2c^2} \\
&= \frac{2s(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}{4a^2c^2} \\
&= \frac{2s2(s-b)2(s-c)2(s-a)}{4a^2c^2} \\
&= \frac{4s(a-a)(s-b)(s-c)}{a^2c^2}
\end{aligned}$$

$$\sin B = \frac{2}{ac}\sqrt{a(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{......(2)}$$



Gambar 2.33

Segitiga *ABC* yang diketahui ketiga sisinya

Jika persamaan (2) disubstitusikan ke persamaan (1) maka Anda akan memperoleh rumus luas segitiga berikut.

$$L\ \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

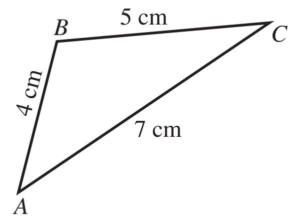
Jadi, rumus luas ΔABC jika diketahui ketiga sisinya adalah

$$\boxed{L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = \frac{a+b+c}{2}}$$

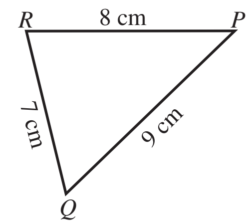
Contoh Soal 2.31

Hitunglah luas segitiga berikut.

a.

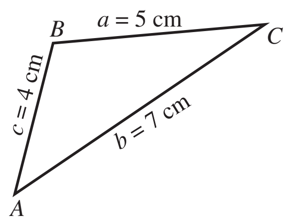


b.



Jawab:

a. Perhatikan gambar di samping



Diketahui

$AB = 4$ cm $\rightarrow$ $c = 4$ cm

$BC = 5$ cm $\rightarrow$ $a = 5$ cm

$AC = 7$ cm $\rightarrow$ $b = 7$ cm

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(4 + 5 + 7) = \frac{1}{2}(16) = 8$$

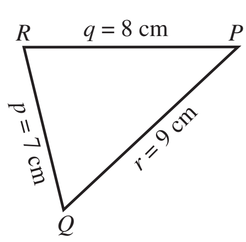
$$\begin{aligned} \text{L } \Delta ABC &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{8(8-5)(8-7)(8-4)} \\ &= \sqrt{8(3)(1)(4)} \\ &= \sqrt{96} \\ &= \sqrt{16 \times 6} \\ &= 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

Jadi, luas ΔABC adalah $4\sqrt{6}$ cm^2.

b. $P = 7$ cm

$Q = 8$ cm

$R = 9$ cm



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(p + q + r) = \frac{1}{2}(7 + 8 + 9) \\ &= \frac{1}{2}(24) = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{L } \Delta PQR &= \sqrt{s(s-p)(s-q)(s-r)} \\ &= \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)} \\ &= \sqrt{12(5)(4)(3)} \\ &= \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 12} \\ &= 12\sqrt{5} \end{aligned}$$

Jadi, luas ΔPQR adalah $12\sqrt{5}$ cm^2.

Evaluasi Materi 2.7

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Hitunglah luas segitiga ABC yang diketahui unsur-unsurnya sebagai berikut.
   a. $a = 6$, $b = 5$, dan $\angle C = 45^\circ$, satuan panjang dalam meter
   b. $a = 4$, $b = 5$, dan $\angle C = 145^\circ$, satuan panjang dalam meter
   c. $a = 5$, $c = 4$, dan $\angle A = 79{,}3^\circ$, satuan panjang dalam sentimeter
   d. $a = 20$, $c = 10$, dan $\angle B = 100^\circ$, satuan panjang dalam milimeter
2. Hitunglah luas segitiga ABC, jika diketahui $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, dan $c = 5$ cm.
3. Hitunglah luas segitiga XYZ, jika panjang $XY = 12$ cm, $XZ = 14$ cm, dan $YZ = 16$ cm.
4. Hitunglah luas segitiga samasisi ABC, jika $a = 8$ cm.
5. Hitunglah luas segitiga samakaki ABC, jika $a = b = 23$ cm, dan $\angle C = 62{,}8^\circ$.
6. Diketahui jajargenjang $ABCD$. Jika panjang $AB = 26$ cm, $AD = 20$ cm, dan besar $\angle A = 28{,}4^\circ$. Hitunglah luas jajargenjang tersebut.
7. Dua sisi yang berdekatan pada suatu jajargenjang adalah 84 cm dan 68 cm. Sudut apit sisi itu adalah 72°. Hitunglah luas jajargenjang tersebut.
8. Pada segiempat $ABCD$, diketahui $\angle A = 90^\circ$, $\angle BDC = 54^\circ$, $AB = 24$ cm, $AD = 18$ cm, dan $CD = 16$ cm. Hitunglah:
   a. panjang BD;
   b. luas $ABCD$.
9. Diketahui luas segitiga ABC adalah 20,72 cm^2, panjang $AB = 6{,}42$ cm, dan panjang $AC = 8{,}54$ cm. Hitunglah besar sudut A (Ada dua kemungkinan).
10. Panjang kedua sisi yang sama dari segitiga samakaki adalah 4,2 cm. Luas segitiga tersebut adalah 6 cm^2. Berapakah panjang sisi ketiga? (Ada dua kemungkinan).

Ringkasan

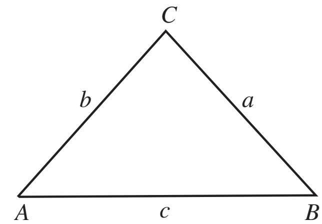
- Ilmu trigonometri telah dikenal sejak kurang lebih 2.000 tahun sebelum Masehi pada saat bangsa Yunani mengembangkan metode ilmiah untuk mengukur sudut-sudut dan sisi-sisi segitiga.
- Jika diketahui segitiga ABC dengan siku-siku di C dan $\angle BAC = \theta$ maka perbandingan trigonometri untuk sudut θ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\sin\theta = \frac{a}{c} \quad ; \quad \text{cosec}\,\theta = \frac{c}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c} \quad ; \quad \sec\theta = \frac{c}{b}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{b} \quad ; \quad \text{cotan}\,\theta = \frac{b}{a}$$

- Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa, yaitu 0°, 30°, 45°, 60°, dan 90° dapat ditentukan dengan mudah.
- Penentuan letak suatu titik selain dinyatakan dalam bentuk koordinat Cartesius, dapat pula dinyatakan dengan koordinat polar (kutub).
- Pada segitiga sebarang akan berlaku aturan sinus dan aturan cosinus.



Aturan sinus dirumuskan sebagai berikut.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Aturan cosinus dirumuskan sebagai berikut.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C$

Luas segitiga dapat dicari dengan rumus berikut.

$$L = \frac{1}{2}\,\text{alas} \times \text{tinggi}$$

$$L = \frac{1}{2}ab\sin C$$

$$L = \frac{1}{2}ac\sin B$$

$$L = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, dengan

$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Kaji Diri

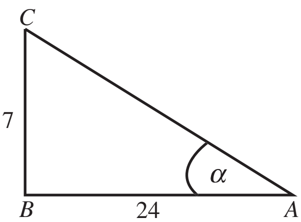
Setelah mempelajari materi Bab Trigonometri ini, adakah materi yang belum Anda pahami? Materi manakah yang belum Anda pahami? Diskusikanlah bersama teman dan guru Anda.

Evaluasi Materi Bab 2

Kerjakan di buku latihan Anda.

A. Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Nilai sin α pada segitiga berikut adalah ....



   a. $\frac{24}{25}$
   b. $\frac{24}{7}$
   c. $\frac{7}{25}$
   d. $\frac{7}{24}$
   e. $\frac{25}{24}$

2. Jika diketahui tan α adalah $\frac{4}{3}$ maka pernyataan yang tepat adalah ....
   a. $\sin \alpha = \frac{2}{3}$
   b. $\sin \alpha = \frac{3}{4}$
   c. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$
   d. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$
   e. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

3. Sebuah tangga yang panjangnya 6 meter disandarkan pada tembok dan membentuk sudut 60° dengan lantai. Tinggi tembok dari lantai sampai ke ujung tangga adalah ....
   a. $3\sqrt{3}$
   b. $2\sqrt{3}$
   c. $2\sqrt{2}$
   d. $3\sqrt{2}$
   e. 3

4. Nilai cos 45° sama dengan nilai ....
   a. cos 135°
   b. cos 225°
   c. cos 315°
   d. sin 315°
   e. tan 135°

5. $-\frac{1}{2}$ adalah nilai dari ....
   a. sin 60°
   b. cos 30°
   c. cos (–60)°
   d. cos 240°
   e. sin 120°

6. $\dfrac{\sin 45^\circ (\cos 45^\circ + \sin 90^\circ)}{\tan 45^\circ + \sin 45^\circ} = \ldots$
   a. $\frac{1}{2}$
   b. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   c. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   d. $\sqrt{2}$
   e. $\sqrt{3}$

7. cos 330° + tan 240° – sin 45° = ...
   a. $\frac{15}{48}$
   b. $\frac{5}{9}$
   c. $\frac{5}{16}$
   d. $\frac{9}{5}$
   e. $\frac{9}{15}$

8. Jika sin α adalah $\frac{1}{2}$ dan cos α adalah $\frac{1}{2}$ maka α terletak pada kuadran ....
   a. I
   b. II
   c. III
   d. IV
   e. I dan II

9. Pernyataan mengenai perbandingan trigonometri yang *salah* adalah ....
   a. sin 50° = cos 45°
   b. tan 35° = cotan 55°
   c. cotan 35° = tan 65°
   d. sin 45° = cos 45°
   e. cos 15° = sin 75°

10. Jika tan $A = \frac{3}{4}$ dalam interval $180^\circ < A < 270^\circ$ maka nilai sin (180° – A) + cos (180° + A) adalah ....

a. $\frac{3}{5}$

b. $\frac{4}{5}$

c. $\frac{1}{5}$

d. $\frac{6}{5}$

e. $\frac{8}{5}$

11. Jika diketahui sin $\alpha = 0{,}47$ maka pernyataan yang benar adalah ....

a. $\sin (90 - \alpha)^\circ = 0{,}47$
b. $\sin (90 + \alpha)^\circ = 0{,}47$
c. $\sin (180 + \alpha)^\circ = 0{,}47$
d. $\sin (180 - \alpha)^\circ = 0{,}47$
e. $\sin (360 - \alpha)^\circ = 0{,}47$

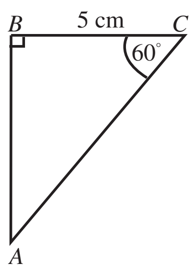
12. Nilai tan 135° sama dengan nilai ....

a. tan 45°
b. – tan 45°
c. cotan 45°
d. tan 225°
e. – tan 315°

13. $(1 + \cos a)(1 - \cos a) = ...$

a. $\sin^2 a$
b. $\cos^2 a$
c. $\tan^2 a$
d. $\frac{1}{\tan^2 a}$
e. $\text{cotan}^2\, a$

14.



Panjang sisi *AB* pada segitiga di samping adalah ....

a. 5 cm
b. $5\sqrt{2}$ cm
c. $5\sqrt{3}$ cm
d. $10\sqrt{2}$ cm
e. $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ cm

15. Pada segitiga *ABC* tumpul, $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$, $\sin \angle ABC = \frac{2}{5}$, dan panjang sisi $BC = 8$ cm. panjang sisi AC = ... cm.

a. 30°
b. 45°
c. 135°
d. 30° atau 150°
e. 45° atau 135°

16. Ditentukan segitiga *ABC* dengan panjang sisi *BC* = 3 cm, sisi *AC* = 4 cm, dan $\sin A = \frac{1}{2}$. Nilai cos *B* adalah ....

a. $\frac{1}{2}$
b. $\frac{2}{3}$
c. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
d. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$
e. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$

17. Ditentukan ΔABC, $AB = 2\sqrt{19}$ cm, *BC* = 6 cm, dan *AC* = 4 cm. Besar sudut yang terbesar pada ΔABC adalah ....

a. 30°
b. 45°
c. 60°
d. 120°
e. 150°

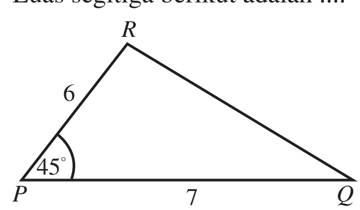
18. Diketahui segitiga dengan panjang sisi berturut-turut adalah 10 cm, 11 cm, dan 13 cm. Luas segitiga tersebut adalah ....

a. $\frac{2}{3}\sqrt{714}$
b. $2\sqrt{714}$
c. $\sqrt{714}$
d. $\sqrt{952}$
e. $\sqrt{1.428}$

19. Pada ΔPQR diketahui $\angle P = 65^\circ$ dan $\angle R = 85^\circ$. Panjang sisi *QR* = 4 cm dan sisi *PQ* = 8 cm. Luas ΔPQR adalah ... cm².

a. 8
b. 16
c. 20
d. 24
e. 32

20. Luas segitiga berikut adalah ....

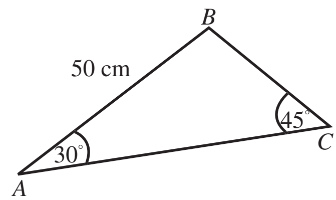


a. $\frac{21}{2}$
b. $\frac{21}{2}\sqrt{2}$
c. $\frac{21}{2}\sqrt{3}$
d. 20
e. $20\sqrt{2}$

B. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Seorang wisatawan ingin menentukan tinggi sebuah tugu. Dia menelungkup pada jarak 5 m dari tugu dengan sudut pandang 60°. Berapakah tinggi pohon tersebut?
2. Seorang tukang ukur mengukur sebidang tanah. Batas tanah AB panjangnya 440 m. Tonggak batas C diukur dengan arah letaknya dari A dan dari B menghasilkan besar $\angle BAC = 48^\circ$ dan $\angle ABC = 75^\circ$. Hitunglah jarak tonggak batas C dari A dan dari B.
3. a. Nyatakan titik P (3, 3), Q ($\sqrt{3}$, –1), dan R (–2, $2\sqrt{3}$) ke dalam koordinat kutub.

   b. Nyatakan titik $P(4, 60^\circ)$, $Q(10, 150^\circ)$, dan $R(20, 240^\circ)$ ke dalam koordinat Cartesius.
4. Dafa dan Ahmad melihat sebuah menara dari 2 tempat yang berbeda, tetapi masih dalam satu garis lurus. Jarak Ahmad ke menara adalah 6 m, sedangkan jarak antara keduanya 9 m. Jika sudut yang terbentuk antara tempat Ahmad berdiri dan menara adalah 60°, tentukanlah jarak Dafa ke menara.
5. Tentukanlah besar sudut dan panjang sisi-sisi yang belum diketahui dari segitiga berikut. Kemudian, hitung luasnya.



Pilihan Karir

Desainer grafis merupakan pembuat alat komunikasi visual yang menggunakan teks dan atau gambar untuk menyampaikan informasi atau pesan. Desainer grafis menata tampilan huruf dan ruang komposisi untuk menciptakan sebuah rancangan yang efektif dan komunikatif. Pada awalnya, desainer grafis hanya membuat desain grafis yang diterapkan untuk media-media statis, seperti buku, majalah, dan brosur. Sejalan dengan perkembangan zaman, desain grafis juga diterapkan dalam media elektronik yang sering disebut sebagai "desain interaktif" atau "desain multimedia".

Sumber: *id.wikipedia.org*

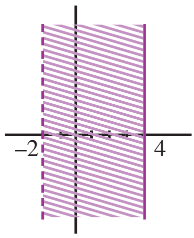
Evaluasi Semester 1

Kerjakan di buku latihan Anda.

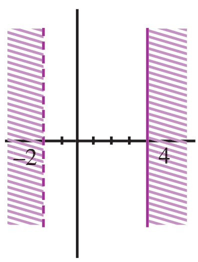
A. Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Daerah himpunan penyelesaian dari $-2 < x \leq 4$ adalah ....

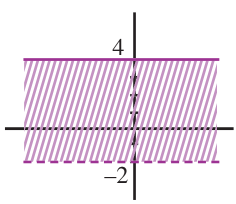
a.



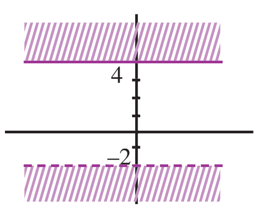
b.



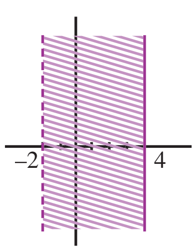
c.



d.

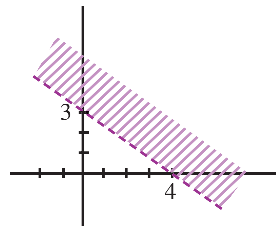


e.

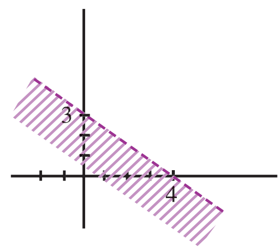


2. Daerah himpunan penyelesaian dari $3x + 4y < 12$ adalah ....

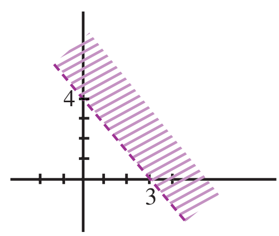
a.



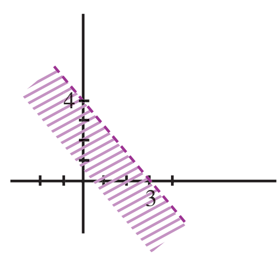
b.



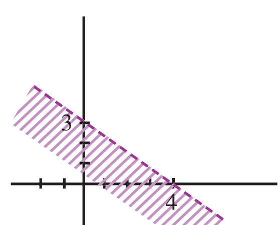
c.



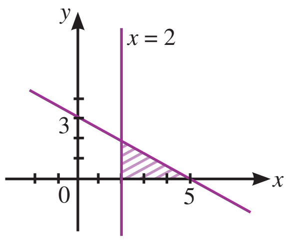
d.



e.



3. Perhatikan grafik berikut.

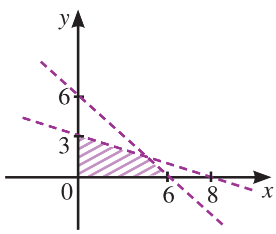


Daerah yang diarsir merupakan himpunan penyelesaian dari ....

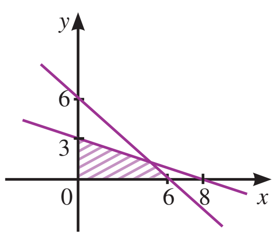
a. $x \leq 2, y \geq 0, 5x + 3y \leq 15$
b. $x \leq 2, y \geq 0, 5x + 3y \geq 15$
c. $x \geq 2, y \geq 0, 5x+3y \geq 15$
d. $x \geq 2, y \geq 0, 3x + 5y \leq 15$
e. $x \geq 2, y \leq 0, 3x + 5y \leq 15$

4. Grafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan
$x \geq 0$
$y \leq 0$
$3x + 8y \leq 24$
$x + y \leq 6$, adalah ....

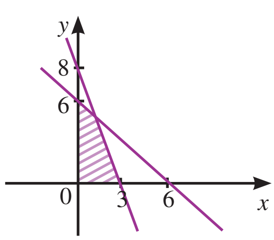
a.



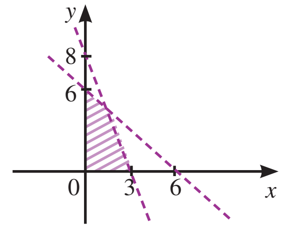
b.



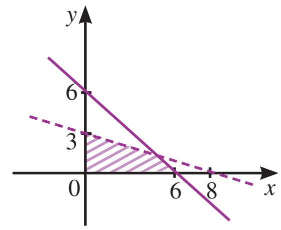
c.



d.



e.



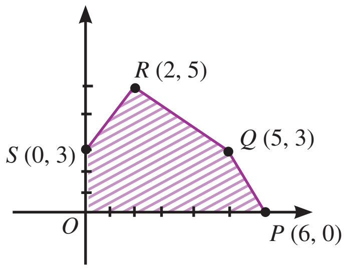
5. Harga sendal *A* adalah Rp10.000,00 dan harga sendal *B* adalah Rp8.000,00. Modal yang ada hanya Rp4.000.000,00 dan kapasitas tempat berjualan hanya 450 pasang sendal. Model matematika untuk masalah tersebut adalah ....

a. $x \geq 0, y \geq 0, 4x + 5y \leq 2.000, x + y \geq 450$
b. $x \geq 0, y \geq 0, 5x + 4y \leq 2.000, x + y \leq 450$
c. $x \geq 0, y \geq 0, 5x + 4y \geq 2.000, x + y \leq 450$
d. $x \geq 0, y \geq 0, 4x + 5y \geq 2.000, x + y \leq 450$
e. $x \geq 0, y \geq 0, 5x + 4y \leq 2.000, x + y \geq 450$

6. Luas suatu daerah parkir adalah 360 m^2. Luas rata-rata yang diperlukan sebuah mobil sedan adalah 6 m^2 dan untuk sebuah bus adalah 24 m^2. Daerah parkir itu tidak dapat menampung lebih dari 30 kendaraan. Jika biaya parkir untuk sebuah sedan Rp5.000,00 dan untuk bus adalah Rp10.000,00, pendapatan maksimum yang dapat diperoleh adalah ....

a. Rp100.000,00
b. Rp150.000,00
c. Rp200.000,00
d. Rp250.000,00
e. Rp300.000,00

7. Jika segilima *OPQRS* merupakan himpunan penyelesaian program linear maka maksimum fungsi $x + 3y$ terletak di titik ....

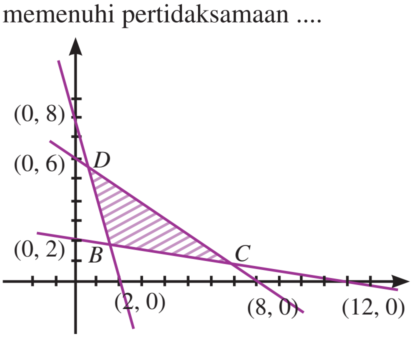


a. O **d.** R
b. P **e.** S
c. Q

8. Nilai maksium $f(x, y) = 20x + 30y$ dengan syarat $x + y \leq 40$, $3y + x \leq 90$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ adalah ....
a. 950 **e.** 1150
b. 1000 **d.** 1100
c. 1050

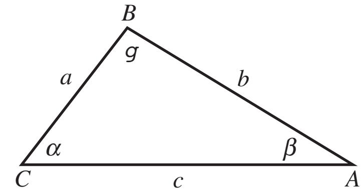
9. Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $2x + y \leq 40$, $x + 2y \leq 40$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ terletak pada daerah berbentuk ....
a. layang-layang
b. persegi panjang
c. segitiga
d. trapesium
e. jajar genjang

10. Koordinat titik-titik di dalam dan sepanjang sisi segitiga BCD dalam gambar berikut memenuhi pertidaksamaan ....



a. $4x + y \geq 8$, $3x + 4y \leq 24$, $x + 6y \leq 12$
b. $4x + y \geq 8$, $4x + 3y \leq 24$, $6x + y \geq 12$
c. $x + 4y \geq 8$, $3x + 4y \leq 24$, $x + 6y \geq 12$
d. $4x + y \leq 8$, $3x + 4y \geq 24$, $6x + y \leq 12$
e. $x + 4y \geq 8$, $3x + 4y \geq 24$, $x + 6y \geq 12$

11. Perhatikan ΔABC berikut.



Aturan sinus yang berlaku pada segitiga tersebut adalah ....
a. $\frac{a}{b} = \frac{\sin a}{\sin g}$ **d.** $\frac{b}{\sin g} = \frac{c}{\sin a}$
b. $\frac{b}{a} = \frac{\sin b}{\sin g}$ **e.** $\frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin a}$
c. $\frac{c}{\sin g} = \frac{b}{\sin a}$

12. Jika nilai $\cos x = \frac{1}{2}$ maka sudut x yang mungkin adalah ....
a. 60° dan 150°
b. 60° dan 210°
c. 30° dan 210°
d. 60° dan 300°
e. 30° dan 300°

13. Jika $\sin 60^\circ = m$ maka nilai m adalah ....
a. 0
b. $\frac{1}{2}$
c. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
d. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
e. $\sqrt{3}$

14. Agar tidak tumbang, pohon kelapa yang tinggi batangnya 4 meter dan membentuk sudut 30° dengan permukaan tanah, ditopang dengan batang bambu. Jika batang bambu penopang tadi tegak lurus permukaan tanah dan menyangga pohon kelapa maka panjang batang bambu tersebut sama dengan ... meter.

a. $\frac{1}{2}$
b. 2
c. 2,5
d. $2\sqrt{3}$
e. $3\sqrt{2}$

15. Jika diketahui sin α = 0,96 dan sudut α lancip maka cos α adalah ....
a. 0,96
b. 0,84
c. 0,72
d. 0,28
e. 0,82

16. Jika diketahui sin $\alpha = \frac{5}{13}$ dan cos $\beta = \frac{3}{5}$ maka tan α tan β = ...
a. $\frac{15}{48}$
b. $\frac{5}{9}$
c. $\frac{5}{16}$
d. $\frac{9}{5}$
e. $\frac{9}{15}$

17. Jika diketahui cos α = 0,75 maka pernyataan yang benar adalah ....
a. sin $(180 - \alpha)^\circ$ = 0,75
b. sin $(90 - \alpha)^\circ$ = 0,75
c. sin $(360 - \alpha)^\circ$ = 0,75
d. sin $(180 + \alpha)^\circ$ = 0,75
e. sin $(90 + \alpha)^\circ$ = 0,75

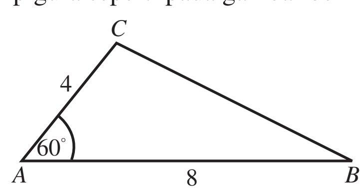
18. Satu adalah nilai trigonometri dari ....
a. tan $(-45)^\circ$
b. tan 315°
c. tan $(-225)^\circ$
d. tan 225°
e. tan 135°

19. Titik $P(1, 1)$ jika diubah ke dalam koordinat kutub $P(r, \theta)$ adalah ....
a. $P(1, 45^\circ)$
b. $P(\sqrt{2}, 45^\circ)$
c. $P(\sqrt{2}, 135^\circ)$
d. $P(\sqrt{2}, 315^\circ)$
e. $P(1, 315^\circ)$

20. Titik $P(4, 135^\circ)$ jika diubah ke dalam koordinat Cartesius adalah ....
a. $P(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
b. $P(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$
c. $P(4, -2\sqrt{2})$
d. $P(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$
e. $P(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$

21. Pada segitiga ABC diketahui panjang sisi AB = 7 cm, BC = 4 cm, dan $\angle ABC = 120^\circ$. Panjang sisi AC = ... cm.
a. $\sqrt{37}$
b. 7
c. 8
d. $\sqrt{93}$
e. $7\sqrt{2}$

22. Seorang seniman membuat ukiran pada pigura seperti pada gambar berikut.



Panjang sisi BC pada pigura adalah ....
a. 2
b. $2\sqrt{2}$
c. $2\sqrt{3}$
d. $2\sqrt{5}$
e. $2\sqrt{7}$

23. Diketahui ΔPQR, dengan panjang $PQ = 2\sqrt{19}$ cm, QR = 6 cm, dan PR = 4 cm. Besar sudut yang terbesar pada ΔPQR adalah ....

a. 30°
b. 45°
c. 60°
d. 120°
e. 150°

24. Pada ΔABC ditentukan bahwa a = 18 cm, b = 10 cm, dan kelilingnya 40 cm. Luas segitiga tersebut adalah ....
a. $40\sqrt{2}$ cm^2
b. $30\sqrt{2}$ cm^2
c. $20\sqrt{2}$ cm^2
d. $10\sqrt{2}$ cm^2
e. $8\sqrt{2}$ cm^2

25. Pada segitiga KLM diketahui k = 16 cm, l = 10 cm, dan luas segitiga adalah 40 cm^2. Besar sudut apit sisi k dan sisi l adalah ....
a. 75°
b. 60°
c. 45°
d. 30°
e. 15°

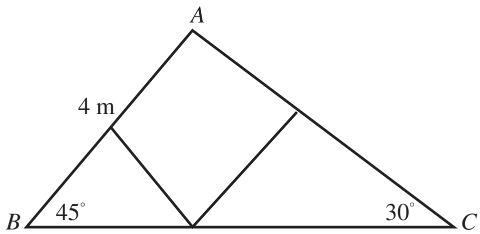
B. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Andi memiliki uang Rp12.000,00. Dia akan membeli 4 buku tulis dan 1 pensil. Sementara itu, Ani memiliki uang Rp16.500,00 dan akan membeli 5 buku dan 2 pensil. Buatlah model matematika dari permasalahan tersebut, jika uang yang dimiliki Andi dan Ani habis untuk membeli buku dan pensil.
2. Tentukan nilai maksimum $f(x, y) = 2x + 3y$ dengan kendala sebagai berikut.
$2x + 5y \leq 20$, $2x + 4y \leq 16$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
3. Tentukan nilai minimum $f(x, y) = 4x + 3y$ dengan kendala sebagai berikut.
$4x + 5y \geq 8$, $2x + 6y \geq 12$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$
4. Seorang penjahit akan membuat 2 jenis pakaian. Pakaian jenis A memerlukan 4 m kain katun dan 1 m kain batik. Pakaian jenis B memerlukan 2 m kain katun dan 4 m kain batik. Biaya yang dikeluarkan penjahit tersebut untuk membuat pakaian jenis A adalah Rp75.000,00 dan pakaian jenis B adalah Rp50.000,00. Tentukan biaya minimum yang dapat dikeluarkan oleh penjahit tersebut jika ia memiliki paling banyak 150 m kain katun dan 160 m kain batik.
5. Suatu pesawat memiliki tempat duduk tidak lebih dari 48 kursi. Setiap penumpang kelas bisnis mendapat jatah bagasi seberat 60 kg, sedangkan penumpang kelas ekonomi mendapat bagasi yang dibatasi seberat 20 kg. Pesawat tersebut hanya dapat membawa bagasi seberat 1440 kg.
   a. Jika banyak penumpang kelas bisnis dinyatakan dengan x dan penumpang kelas ekonomi dinyatakan dengan y, buatlah model matematikanya.
   b. Gambarlah grafik himpunan penyelesaian dari model matematika tersebut.
   c. Jika tiket untuk setiap penumpang kelas utama Rp2.000.000,00 dan untuk kelas ekonomi adalah Rp1.000.000,00, tentukanlah laba maksimum yang dapat diperoleh.
6. Suatu tangga panjangnya 16 m disandarkan pada dinding sebuah rumah sehingga jarak pangkal tangga dengan rumah adalah 8 m. Tentukanlah besarnya sudut yang dibentuk oleh tangga dengan tanah.
7. Nyatakanlah bentuk perbandingan trigonometri berikut dalam perbandingan sudut lancip. Kemudian, tentukan nilainya.

a. $\sin 750^\circ$
b. $\cos 1320^\circ$
c. $\tan 1560^\circ$

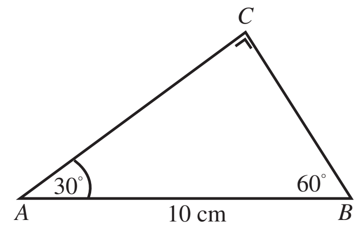
8. Kerjakanlah soal-soal konversi koordinat Cartesius dan koordinat kutub berikut.
   a. Jika koordinat kutub titik *P* adalah $(3, 210^\circ)$ maka tentukanlah koordinat Cartesiusnya.
   b. Koordinat Cartesius titik Q adalah $(-2\sqrt{3}, 2)$. Tentukanlah koordinat kutubnya.

9. Penampang kuda-kuda atap sebuah rumah menyerupai gambar berikut.

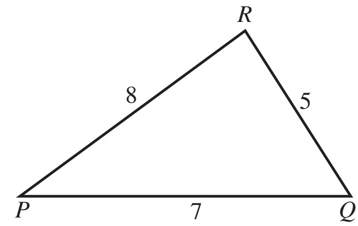


Tentukanlah panjang *BC*.

10. Hitunglah luas segitiga berikut.
   a.



   b.



Tugas Observasi Semester 1

Anda telah mempelajari materi Program Linear pada Bab 1. Sekarang, Anda akan menggunakan materi tersebut untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan jurusan Anda.

A. Seni

Sumber: *www.debindo.com*

Kunjungilah perusahaan pembuatan kerajinan di daerah Anda. Kumpulkan informasi untuk menentukan keuntungan maksimum yang dapat diperoleh pengusaha kerajinan tersebut. Langkah-langkah yang dapat Anda lakukan sebagai berikut.

1. Kumpulkanlah data mengenai jenis kerajinan yang dibuat oleh perusahaan tersebut berikut waktu yang diperlukan untuk membuat kerajinan. Tuliskan data tersebut seperti pada tabel berikut.

Proses	Waktu yang Diperlukan		Waktu Pembuatan Terlama (Jam)
	Meja	Kursi	
Pembuatan	...	...	...
Pengecatan	...	...	...

2. Kumpulkanlah data mengenai keuntungan setiap kerajinan yang dibuat. Tuliskan data-data tersebut seperti pada tabel berikut.

No.	Jenis Kerajinan	Keuntungan/Buah
1.	Meja	...
2.	Kursi	...

3. Buatlah sistem pertidaksamaan linear dari data pada langkah nomor 1.
4. Buatlah fungsi objektif dari data pada langkah nomor 2.
5. Selesaikanlah persoalan tersebut hingga Anda memperoleh keuntungan maksimumnya.
6. Kumpulkanlah tugas yang telah Anda kerjakan kepada guru Anda.

B. Pariwisata

Sumber: *www.bismania.com*

Kunjungilah salah satu penyewaan bus pariwisata di daerah Anda. Kumpulkan informasi untuk menentukan keuntungan maksimum yang dapat diperoleh pengusaha penyewaan bus pariwisata tersebut. Langkah-langkah yang dapat Anda lakukan sebagai berikut.

1. Kumpulkan data jumlah bus kecil dan bus besar yang dimiliki perusahaan tersebut. Kumpulkan data kapasitas bus kecil dan bus besar. Tuliskan data-data tersebut seperti pada tabel berikut.

	Jenis Bus		**Persediaan**
	Bus Kecil	**Bus Besar**	
Banyak bus	...	...	...
Kapasitas kursi	...	...	...

2. Kumpulkan data mengenai keuntungan yang diperoleh dari setiap penyewaan bus kecil dan bus besar. Tuliskan data tersebut seperti pada tabel berikut.

No.	**Jenis Bus**	**Keuntungan**
1.	Bus kecil	...
2.	Bus besar	...

3. Buatlah sistem pertidaksamaan linear dari data pada langkah nomor 1.
4. Buatlah fungsi objektif dari data pada langkah nomor 2.
5. Selesaikanlah persoalan tersebut hingga Anda memperoleh keuntungan maksimum dari penyewaan bus tersebut.
6. Kumpulkanlah tugas yang telah Anda kerjakan kepada guru Anda.

C. Teknologi Kerumahtanggaan

Kunjungilah salah satu salon kecantikan di daerah Anda. Kumpulkan informasi untuk menentukan pendapatan maksimum yang dapat diperoleh pengusaha salon tersebut. Langkah-langkah yang dapat Anda lakukan sebagai berikut.

1. Kumpulkan data mengenai jenis pelayanan yang diberikan salon tersebut per hari berikut waktu pengerjaan setiap pelayanan. Tuliskan data-data tersebut seperti pada tabel berikut.

Jenis Pelayanan	Waktu yang Diperlukan		Waktu Maksimum Pelayanan
	Rambut Panjang	Rambut Pendek	
Pemotongan rambut	...	...	...
Creambath	...	...	...

2. Kumpulkan data mengenai biaya setiap pelayanan. Tuliskan data tersebut seperti pada tabel berikut.

No.	Jenis Pelayanan	Biaya
1.	Pemotongan rambut	...
2.	*Creambath*	...

3. Buatlah sistem pertidaksamaan linear dari data pada langkah nomor 1.
4. Buatlah fungsi objektif dari data pada langkah nomor 2.
5. Selesaikanlah persoalan tersebut hingga Anda memperoleh pendapatan maksimum dari salon tersebut.
6. Kumpulkanlah tugas yang telah Anda kerjakan kepada guru Anda.

Bab 3

Barisan dan Deret

Pada bab ini, Anda diajak menerapkan konsep barisan dan deret dalam pemecahan masalah dengan cara mengidentifikasi pola, barisan, dan deret bilangan, menerapkan konsep barisan dan deret aritmetika, serta menerapkan konsep barisan dan deret geometri.

Pada saat Anda duduk di bangku SMP kelas IX, Anda sudah mempelajari konsep pola bilangan. Coba Anda ingat kembali materi tentang barisan dan deret bilangan yang telah dipelajari tersebut. Materi tersebut akan dipelajari kembali secara luas dan mendalam serta penerapannya dalam pemecahan masalah sehari-hari. Salah satunya masalah berikut.

Jumlah penduduk suatu kota dalam 10 tahun menjadi dua kali lipat. Menurut perhitungan pada tahun 2010 mendatang akan mencapai 6,4 juta orang. Dapatkah Anda menentukan jumlah penduduk kota tersebut pada tahun 1960?

Agar Anda dapat menjawab pertanyaan tersebut, pelajarilah bab ini dengan baik.

Peta Konsep

Materi mengenai Barisan dan Deret dapat digambarkan sebagai berikut.

Barisan dan Deret

karena ada

Keteraturan Pola Tertentu

dibedakan menjadi

Barisan Aritmetika
$U_n = a + (n - 1)b$

membentuk

Deret Aritmetika
$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)b\right]$

Barisan Geometri
$U_n = ar^{n-1}$

membentuk

Deret Geometri
$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

membentuk

Deret Geometri tak Hingga
$S_\infty = \frac{a}{1-r}$

Soal Pramateri

Kerjakanlah soal-soal berikut sebelum Anda mempelajari bab ini.

1. Tentukanlah sepuluh bilangan asli yang pertama.

2. Tentukanlah tiga bilangan berikutnya dari masing-masing barisan berikut.

a. 3, 6, 9, 12, ..., ..., ...

b. -12, -7, -2, 3, ..., ..., ...

c. $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}$, ..., ..., ...

3. Hitunglah.

a. 2^5

b. $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

c. $(-2)^4$

d. $(2)^{-3}$

e. $1024 = 2^n$, $n = ...$

A Barisan dan Deret Bilangan

Dalam kehidupan sehari-hari, Anda pasti pernah melihat nomor rumah yang berada di suatu jalan. Kalau Anda perhatikan, biasanya rumah yang berada di sebelah kiri jalan bernomor ganjil dan rumah yang berada di sebelah kanan jalan bernomor genap. Nomor-nomor rumah tersebut dikatakan membentuk suatu pola tertentu. Di sebelah kiri jalan, nomor rumah membentuk pola bilangan ganjil, yaitu 1, 3, 5, 7, ... Sebaliknya, di sebelah kanan jalan nomor rumah membentuk pola bilangan genap, yaitu 2, 4, 6, 8, ...

Sekarang, coba perhatikan angka-angka pada kalender berikut.


September 2008

Minggu	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat	Sabtu
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

Gambar 3.1 Angka-angka pada kalender membentuk pola bilangan tertentu.

Sebutkan angka-angka yang menunjukkan hari Senin.

Berdasarkan angka-angka pada hari Senin, apa yang dapat Anda ketahui tentang angka-angka tersebut?

Coba Anda buat pola bilangan untuk hari lainnya. Hasil apa yang Anda peroleh?

Kata Kunci

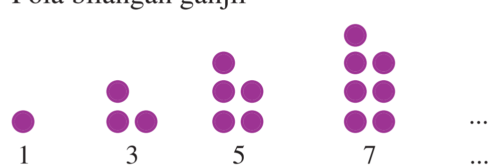
- pola bilangan
- barisan bilangan
- deret bilangan

1. Pola Bilangan

Pola bilangan adalah salah satu cara menunjukkan aturan suatu barisan bilangan.

Perhatikan contoh berikut.

a. Pola bilangan ganjil



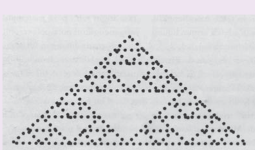
Coba Anda lanjutkan bilangan berikutnya.

Jelajah Matematika

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban*, 2002

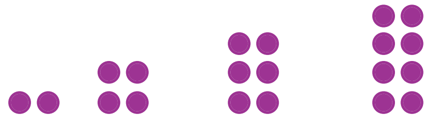
Blaise Pascal (1623–1662) seorang Prancis yang merupakan keajaiban dalam dunia matematika. Segitiga aritmetika yang ditunjukkan di sini telah dikenal selama 600 tahun. Pascal menemukan bahwa banyak dari sifat-sifat segitiga dihubungkan dengan barisan-barisan dan deret-deret yang istimewa.

Pola-pola dalam segitiga Pascal ketika segitiga tersebut selesai dibuat, terdapat bilangan-bilangan ganjil di dalam bayangan setiap persegi. Anda akan melihat sebuah pola yang muncul. Ilustrasi ini memperlihatkan pola di atas 30 baris. Jika proses ini terus Anda lakukan, bahkan lebih banyak efek yang luar biasa akan muncul.



Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban*, 2002

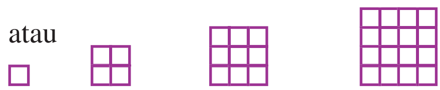
b. Pola bilangan genap



2   4   6   8   ...

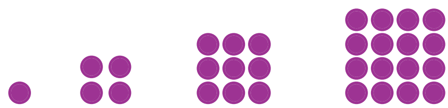
Coba Anda lanjutkan bilangan berikutnya.

c. Pola bilangan kuadrat



1   4   9   16   ...

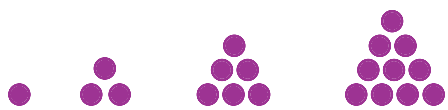
atau



1   4   9   16   ...

Coba Anda lanjutkan bilangan berikutnya.

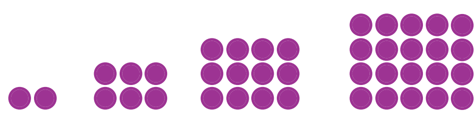
d. Pola bilangan segitiga



1   3   6   10   ...

Coba Anda lanjutkan bilangan berikutnya.

e. Pola bilangan persegipanjang



2   6   12   20   ...

Coba Anda lanjutkan bilangan berikutnya.

f. Pola bilangan segitiga pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
... ...

Coba Anda lanjutkan barisan bilangan berikutnya.

2. Barisan Bilangan

Anda tentu pernah mengenal barisan bilangan. Contohnya barisan bilangan berikut.

a. 1, 3, 5, ..., ...
b. 500, 400, 320, 256, ..., ...
c. 1, 1, 2, 3, 5, ..., ...
d. 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., ...

Dapatkah Anda menuliskan dua angka berikutnya yang mungkin untuk masing-masing barisan tersebut? Berikan satu aturan yang dapat dipakai untuk menyusun barisan tersebut.

Barisan bilangan pada contoh tersebut sering muncul dalam kehidupan sehari-hari. Anda mungkin menjumpai sebagian dari barisan (*a*) jika mencari rumah yang bernomor 18, Anda mungkin menerka bahwa rumah yang dicari ada pada sisi lain dari jalan. Barisan (*b*) merupakan harga televisi dalam ribuan rupiah yang disusutkan 20% per tahun. Barisan (*c*) dan (*d*) adalah barisan bilangan Fibonaci yang dapat Anda teliti dalam susunan daun, segmen-segmen dalam buah nanas, atau biji cemara. Ternyata banyak fenomena alam dalam kehidupan sehari-hari yang termasuk ke dalam barisan bilangan.

Mempelajari barisan bilangan bukanlah suatu hal yang menakutkan. Anda dapat mempelajari barisan bilangan dengan melakukan kegiatan berikut.

Sumber: *www.setwapres.go.id*

Gambar 3.2

Penomoran pada rumah biasanya membentuk barisan bilangan.

Kegiatan Siswa 3.1

Siapkan pensil, kertas, dan kalkulator. Kemudian, ikuti langkah-langkah berikut.

1. Pada selembar kertas, buatlah 10 baris dan minta seorang teman menuliskan sebuah bilangan pada baris pertama.
2. Minta teman lainnya untuk menuliskan bilangan lain pada baris kedua.
3. Minta salah satu dari mereka untuk menambahkan bilangan-bilangan mereka dan tulis jumlahnya pada baris ke-3.
4. Minta mereka untuk meneruskan barisan tersebut, dengan cara menjumlahkan dua bilangan yang terakhir.
5. Pada saat teman Anda sampai pada baris ke-7, lihatlah dengan cepat pada kertas tadi. Kemudian, kalikan bilangan pada baris tersebut dengan 11. Tuliskanlah hasilnya, kemudian balikkan kertas tadi secara berlawanan.
6. Pada saat teman Anda selesai menjumlahkan bilangan ke-10, mintalah mereka menjumlahkan semua bilangan pada kertas.
7. Tunjukkanlah jawaban Anda untuk menunjukkan bahwa Anda telah mendapatkan jawabannya.

Jelaskanlah, mengapa Anda sudah tahu jawabannya.

Barisan bilangan adalah sekumpulan bilangan yang tersusun menurut pola tertentu. Setiap unsur bilangan dalam susunan bilangan tersebut disebut *suku barisan*. Secara umum, barisan bilangan dapat ditulis sebagai berikut.

$$U_1, U_2, U_3, ..., U_{n-1}, U_n$$

dengan U_1 merupakan suku ke-1
U_2 merupakan suku ke-2
U_3 merupakan suku ke-3
U_{n-1} merupakan suku ke-(n–1)
U_n merupakan suku ke-n

Selisih antara dua suku yang berurutan pada barisan bilangan dinamakan *beda* dan dinotasikan dengan b.

$$b = U_2 - U_1, U_3 - U_2, U_4 - U_3, ..., U_n - U_{n-1}$$

Perbandingan antara dua suku yang berurutan disebut *rasio* yang biasa dinotasikan dengan r.

$$r = \frac{U_2}{U_1}, \frac{U_3}{U_2}, \frac{U_4}{U_3}, ..., \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Agar lebih memahami pernyataan tersebut, perhatikan barisan berikut.

1, 5, 9, 13, 17, ..., U_n

Dari barisan tersebut, diketahui bahwa $U_1 = 1$, $U_2 = 5$, $U_3 = 9$, $U_4 = 13$, $U_5 = 17$. Anda dapat menentukan bilangan-bilangan berikutnya dengan memperhatikan aturan urutan suku-suku pada barisan bilangan. Suku-suku barisan tersebut merupakan fungsi dari bilangan asli.

$$\boxed{U_n = f(n), n \in A}$$

Dengan demikian, dapat diketahui bahwa pola tertentu pada suatu barisan merupakan rumus fungsi yang memetakan n ke U_n.

Notes

Selisih dua suku pada barisan bilangan dinamakan beda.

Contoh Soal 3.1

Sebuah barisan didefinisikan $U_n = n^2 - 2n - 1$, dengan n bilangan asli.

a. Tuliskan bentuk barisannya.
b. Tentukan nilai suku ke-10.

Jawab:

a. $U_1 = (1)^2 - 2(1) - 1 = -2$
$U_2 = (2)^2 - 2(2) - 1 = -1$
$U_3 = (3)^2 - 2(3) - 1 = 2$
$U_4 = (4)^2 - 2(4) - 1 = 7$
$U_5 = (5)^2 - 2(5) - 1 = 14$
Jadi, barisan tersebut adalah –2, –1, 2, 7, 14, ...

b. Suku kesepuluh dapat dicari sebagai berikut.

$U_{10} = (10)^2 – 2(10) – 1 = 79$

Anda dapat menentukan rumus suku ke-n sebuah barisan dengan mengikuti aturan barisan tersebut atau dengan mengamati pola barisan. Agar Anda lebih memahami pernyataan tersebut, Perhatikan uraian berikut.

- suku pertamanya adalah $U_1 = 2 \cdot 1(1+1) = 4$
- suku keduanya adalah $U_2 = 2 \cdot 2(2+1) = 12$
- suku ketiganya adalah $U_3 = 2 \cdot 3(3+1) = 24$
- suku keempatnya adalah $U_4 = 2 \cdot 4(4+1) = 40$
- suku kelimanya adalah $U_5 = 2 \cdot 5(5+1) = 60$

Urutan 5 suku pertama barisan tersebut adalah 4, 12, 24, 40, 60. Dari pola barisan tersebut, coba Anda buat rumus suku ke-n dari bentuk tersebut.

$U_n = 2 \ldots(\ldots + \ldots)$

Contoh Soal 3.2

Suatu grup musik dijadwalkan latihan setiap hari Rabu pada bulan Agustus. Jika latihan pertama dilakukan pada tanggal 3, tentukan jadwal latihan musik pada bulan tersebut.

Sumber: *www.geocities.com*

Gambar 3.3

Jadwal latihan band yang teratur dapat dicari pola bilangannya.

Jawab:

Anda dapat mencari polanya sebagai berikut.

Rabu ke-1	3	
Rabu ke-2	3 + 7 = 10	
Rabu ke-3	10 + 7 = 17	(7 merupakan jumlah hari dalam
Rabu ke-4	17 + 7 = 24	satu minggu)
Rabu ke-5	24 + 7 = 31	

Jadi, jadwal latihan musik pada tanggal adalah 3, 10, 17, 24, 31. Aturan pada barisan tanggal latihan musik tersebut diperoleh dengan menambahkan 7 hari pada setiap suku. Suku-suku pada barisan tersebut sebagai berikut.

$U_1 = 3$

$U_2 = U_1 + 7 = 3 + 7 = 10$

$U_3 = U_2 + 7 = 10 + 7 = 17$

$U_4 = U_3 + 7 = 17 + 7 = 24$

$U_5 = U_4 + 7 = 24 + 7 = 31$

Jadi, rumus berulang untuk barisan tanggal tersebut adalah

$U_{n+1} = U_n + 7$, untuk $n = 1, 2, 3, 4, 5$ dan $U_1 = 3$ atau dapat juga $U_n = 7n – 4$, untuk $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

3. Deret Bilangan

Deret bilangan merupakan jumlah dari suku-suku pada barisan bilangan. Jika U_1, U_2, U_3, ..., U_n adalah barisan bilangan maka $U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ adalah sebuah deret bilangan. Sebagai contoh, jika 10, 20, 30, …, 100 adalah barisan bilangan maka 10 + 20 + 30 + … + 100 merupakan deret bilangan.
Deret bilangan dinotasikan oleh S_n,. Oleh karena S_n merupakan jumlah n suku barisan bilangan maka Anda dapat menuliskan $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + … + U_n$. Selanjutnya, untuk menentukan nilai S_n dengan n = 1, 2, 3, …, n. Anda dapat menuliskan
$S_1 = U_1$ (jumlah 1 suku pertama)
$S_2 = U_1 + U_2$ (jumlah 2 suku pertama)
$S_3 = U_1 + U_2 + U_3$ (jumlah 3 suku pertama)
$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + … + U_n$ (jumlah n suku pertama)
Agar Anda lebih memahami uraian tersebut, perhatikan contoh berikut.

Contoh Soal 3.3

Diketahui barisan bilangan 2, 4, 6, …, 100
a. Tuliskan deret 3 bilangan pertama
b. Hitunglah jumlahnya

Jawab:
a. Barisan bilangan 2,4,6, … , 100 berarti $U_1 = 2$, $U_2 = 4$, $U_3 = 6$, dan $U_n = 100$.
Deret 3 bilangan pertama = $S_3 = U_1 + U_2 + U_3 = 2 + 4 + 6$
b. $S_3 = U_1 + U_2 + U_3$
$= 2 + 4 + 6$
$= 12$

Contoh Soal 3.4

Diketahui suatu barisan dengan rumus $U_n = 3n^2 – 4n$. Tentukanlah jumlah deret empat suku pertama.

Jawab:
$U_1 = 3(1)^2 – 4(1) = –1$
$U_2 = 3(2)^2 – 4(2) = 4$
$U_3 = 3(3)^2 – 4(3) = 15$
$U_4 = 3(4)^2 – 4(4) = 32$ +
$S_4 = 50$

Jadi, jumlah 4 suku pertama adalah 50.

Evaluasi Materi 3.1

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Tebaklah tiga suku berikutnya dari masing-masing barisan berikut.
   a. 0, 3, 6, 9, ..., ..., ...
   b. 0, 3, 8, 15, ..., ..., ...
   c. 1, 4, 9, 16, ..., ..., ...
   d. 2, 9, 16, 23, ..., ..., ...
   e. 1, 3, 7, 15, ..., ..., ...
   f. 11, 22, 33, 44, ..., ..., ...
   g. 60, 57, 54, 51, ..., ..., ...
   h. 123, 234, 345, 456, ..., ..., ...

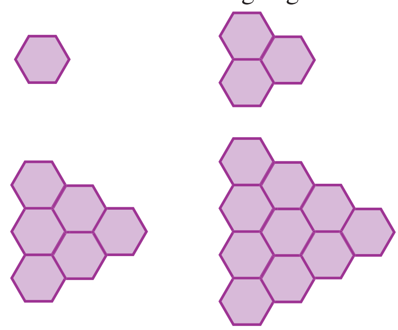
2. Tentukan aturan barisan bilangan berikut.
   a. 4, 7, 10, 13, ...
   b. 1, 8, 27, 64, ...
   c. 1, 4, 16, 64, ...
   d. 2, 3, 5, 8, 13, ...
   e. 9, 10, 19, 29, 48, ...

3. Tentukan rumus suku ke-n untuk barisan bilangan berikut.
   a. 3, 4, 5, 6, ...
   b. 0, 3, 6, 9, ...
   c. 9, 14, 19, 24, ...
   d. 2, 6, 18, 54, ...
   e. 400, 200, 100, 50, ...
   f. 3, 8, 15, 24, ...

4. Tentukan jumlah deret bilangan yang rumus suku ke-n nya diketahui.
   a. $U_n = n - 5$, untuk 10 bilangan yang pertama
   b. $U_n = 2n + 3$, untuk 7 bilangan yang pertama
   c. $U_n = n(n - 1)$, untuk 5 bilangan yang pertama
   d. $U_n = 3(2)n$, untuk 4 bilangan yang pertama
   e. $U_n = \frac{n+1}{2n}$, untuk 4 bilangan yang pertama
   f. $U_n = n(n + 1)(n + 2)$, untuk 4 bilangan yang pertama

5. Perhatikan barisan 4, 1, –2, –5, ...
   a. Tentukan pola atau aturan dari barisan tersebut.
   b. Tentukan bilangan ke-20.

6. Perhatikan barisan bangun geometri berikut.



   a. Gambarlah barisan bangun segienam sampai kelompok bangun ke-5.
   b. Ada berapa segienam kongruen pada kelompok bangun ke-4 dan ke-5?
   c. Tuliskan barisan bilangan yang sesuai dengan jumlah segienam kongruen pada barisan bangun tersebut.

7. Tuliskan 4 bilangan pertama dari barisan dengan rumus berikut.
   a. $U_n = \frac{1}{n+2}$
   b. $U_n = \frac{1}{2}n(n + 2)$
   c. $U_n = 5 \quad ; U_{n+1} = U_n + 3$
   d. $U_1 = -2 \quad ; U_{n+1} = U_n - 4$
   e. $U_n = 3n - 5$
   f. $U_1 = -5 \quad ; U_{n-1} = U_n + 7$

8. Tuliskan 4 bilangan pertama dari barisan dengan rumus berikut.
   a. $U_n = 2n^2 - n - 2$
   b. $U_n = 3n + 7$
   c. $U_1 = -3 \quad ; U_{n+1} = 3U_n$
   d. $U_1 = 0 \quad ; U_{n+1} = 3U_n - 4$
   e. $U_n = (n + 1)^3 + 3$
   f. $U_5 = -5 \quad ; U_{n-1} = (U_n)^2$

9. Suku ketiga sebuah barisan adalah 20. Nilai setiap suku adalah 3 lebih besar dari suku sebelumnya.
   a. Tuliskan lima suku pertamanya.
   b. Tuliskan rumus suku ke-n.
   c. Berapakah suku ke-90?

10. Suku pertama sebuah barisan adalah 40. Nilai setiap suku adalah 5 lebih kecil dari suku sebelumnya.
   a. Tuliskan lima suku pertamanya.
   b. Tuliskan rumus suku ke-n.
   c. Berapakah suku ke-100?

B Barisan dan Deret Aritmetika

Kata Kunci

- suku
- beda
- jumlah *n*-suku

1. Barisan Aritmetika

Agar Anda lebih mudah dalam memahami pengertian barisan aritmetika, perhatikan uraian berikut. Harga satu tiket masuk pameran kerajinan tradisional adalah Rp.10.000,00. Jika membeli 2 tiket, pengunjung harus membayar Rp.19.000,00. Pengunjung harus membayar Rp.28.000,00 jika membeli 3 tiket. Demikian seterusnya, setiap penambahan 1 tiket biaya bertambah Rp.9000,00. Jika pembelian tiket tersebut disusun ke dalam barisan bilangan, susunannya adalah 10.000, 19.000, 28.000, dan seterusnya.

Dari uraian tersebut suku-suku yang berurutan dari barisan bilangan memiliki selisih yang tetap, yaitu Rp.9000,00.Barisan bilangan yang memiliki selisih tetap seperti ini disebut barisan aritmetika.

Dengan demikian, barisan aritmetika merupakan barisan bilangan yang selisih dua suku berurutannya selalu tetap. Selisih tetap ini disebut sebagai beda dari barisan aritmetika.

Perhatikan kembali uraian tentang pembelian tiket masuk pameran kerajinan tradisional. Harga 1 tiket sebesar Rp10.000,00 merupakan suku pertama dari barisan aritmetika tersebut, suku pertama dapat dinotasikan $U_1 = a$. Suku berikutnya yaitu Rp. 10.000,00 merupakan suku kedua yang dinotasikan U_2. Demikian seterusnya sampai suku ke-n yang dinotasikan U_m.

Telah disebutkan bahwa selisih pembelian 1 tiket dan 2 tiket adalah Rp.9.000,00. Demikian juga untuk pembelian 2 tiket dan 3 tiket memiliki selisih pembayaran Rp.9.000,00. Begitu sterusnya setiap penambahan pembelian 1 tiket, selisihnya sebesar Rp. 9.000,00. Selisih pada barisan aritmetika bersifat tetap dan dinamakan beda. Beda dinotasikan sebagai b.

Secara matematis, nilai beda (b) diperoleh dari $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_m - U_m -1$. Pada kasus ini, nilai beda diperoleh dari 19.000 – 10.000 = 28.000 – 19.000 = 9.000.

Beda yang Anda temukan pada kasus tersebut bernilai positif. Mungkinkah suatu benda bernilai negatif? Sebagai contoh, diketahui barisan aritmetika 10, 6, 2, –2, …. Tentukan beda barisan aritmetika tersebut.

2. Rumus Suku ke-*n* Barisan Aritmetika

Perhatikanlah barisan aritmetika berikut.

1, 5, 9, 13, 17, 21, ...

Barisan tersebut memiliki suku pertama (a) = 1 dan bedanya adalah 4. Dapatkah Anda menentukan suku ke-15 (U_{15}), U_{25}, dan U_{30}? Untuk menjawabnya, Anda dapat mengurutkan barisan tersebut sampai suku ke-30. Berapa lama pekerjaan tersebut dapat dilakukan? Tentu saja memerlukan waktu yang lama. Agar Anda lebih mudah mencari nilai suatu suku, Anda dapat menentukan terlebih dahulu rumus suku ke-n dari barisan tersebut. Perhatikanlah tabel berikut untuk menentukan bentuk umum dari barisan aritmetika 1, 5, 9, 13, 17, 21, …..

Tabel 3.1 Penentuan Bentuk Umum Barisan Aritmetika

Bilangan	Suku ke(U...)	Uraian	Bentuk Umum
1	U_1	$U_1 = 1$	a
5	U_2	$U_2 = 5 = 1 + 4 = a + b$	$a + b$
9	U_3	$U_3 = 9 = 5 + 4 = U_2 + b$ $= (a + b) + b = a + 2b$	$a + 2b$
13	U_4	$U_4 = ...$	...
17	U_5	$U_5 = ...$	...
21	U_6	$U_6 = ...$	...

Dari Tabel 3.1 Anda dapat menemukan bentuk umum setiap suku barisan sebagai berikut.

$U_1 = a$

$U_2 = a + b$

$U_3 = a + 2b$

$U_4 = a + 3b$

$U_5 = a + 4b$

$U_6 = a + 5b$

Demikian seterusnya hingga suku ke-n

Dari bentuk umum $U_n = a + (n - 1)b$, Anda dapat menentukan rumus umum barisan aritmetika dengan suku pertama (a) adalah 1 dan beda (b) adalah dengan cara berikut.

Jelajah Matematika

Fibonacci

Fibonacci, yang nama lengkapnya adalah Leonardo of Pisa (1180–1250), adalah putra seorang saudagar Italia. Dalam perjalanannya ke Eropa dan Afrika Utara, ia mengembangkan kegemarannya pada bilangan. Dalam karya terbesarnya, *Liber A baci*; ia menjelaskan suatu teka-teki yang membawanya kepada apa yang sekarang Anda kenal sebagai barisan bilangan Fibonacci. Barisannya adalah 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Setiap bilangan atau angka dalam barisan ini merupakan jumlah dari dua bilangan sebelumnya.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban*, 2002

$$U_n = a + (n - 1)b$$
$$U_n = 1 + (n - 1)4$$
$$= 1 + (4n - 4)$$
$$= 4n - 3$$

Dengan demikian, rumus suku ke-n dari barisan aritmetika 1, 5, 9, 13, 17, 21, … adalah $U_n = 4n - 3$.

Selanjutnya, Anda dapat menentukan nilai U_{15}, U_{25}, dan U_{30} dengan menggunakan rumus suku ke-n tersebut.

$$U_n = a + (n - 1)b$$
$$U_{15} = 1 + (15 - 1)4$$
$$= 1 + (14)(4)$$
$$= 57$$
$$U_{25} = 1 + (25-1)4$$
$$= 1 + (24)(4)$$
$$= 97$$
$$U_{30} = 1 + (30 - 1)4$$
$$= 1 + (29)(4)$$
$$= 117$$

Sama halnya dengan penjelasan sebelumnya, Anda dapat menentukan rumus umum suku ke–n dari barisan aritmetika. Misalkan U_1, U_2, U_3, … U_n merupakan suku-suku dari barisan aritmetika dengan a adalah suku pertama, dan b adalah beda, maka

$$U_1 = a$$
$$U_2 = U_1 + b$$
$$a + b$$
$$U_3 = U_2 + b$$
$$= a + b + b$$
$$= a + 2b$$
$$U_n = U_n - 1 + b$$
$$= a + (n - 2)b + b$$
$$= a + (bn - 2b + b)$$
$$= a + bn - b$$
$$= a + (n - 1)b$$

Dari uraian tersebut, diperoleh rumus suku ke-n suatu barisan aritmetika.

$$\boxed{U_n = a + (n - 1)b}$$

dengan a = suku pertama barisan
b = beda
n = banyaknya suku
U_n = suku ke-n

Barisan aritmetika akan naik jika $b > 0$ dan barisan aritmetika akan turun jika $b < 0$.

Solusi Cerdas

Rumus suku ke-n dari barisan –5, –1, 3, 7, ... adalah ....

a. $U_n = -4n - 1$
b. $U_n = 4n - 9$
c. $U_n = n - 6$
d. $U_n = 2n - 7$
e. $U_n = -6n + 1$

Jawab:
Barisan –5, –1, 3, 7, ...
$a = -5$
$b = -1 - (-5) = 4$
$U_n = a + (n - 1)b$
$U_n = -5 + (n - 1)4$
$= -5 + 4n - 4$
$U_n = 4n - 9$

Jawaban: **b**

UN SMK, 2006

Contoh Soal 3.4

Tentukanlah rumus suku ke-n dari barisan berikut.

a. 3, 6, 9, 12, ...

b. –12, –7, –2, 3, ...

c. 250, 225, 200, 175, ...

Jawab:

a. 3, 6, 9, 12, ...

$a = 3$

$b = 6 - 3 = 9 - 6 = 3$

$$U_n = a + (n - 1)b = 3 + (n - 1)3 = 3 + 3n - 3 = 3n$$

b. –12, –7, –2, 3, ...

$a = -12$

$b = -7 - (-12) = -2 - (-7) = 5$

$$U_n = a + (n - 1)b = -12 + (n - 1)5 = -12 + 5n - 5 = 5n - 17$$

c. 250, 225, 200, 175, ...

$a = 250$

$b = 225 - 250 = -25$

$$U_n = a + (n -1)b = 250 + (n - 1) - 25 = 250 - 25n + 25 = 275 - 25n$$

Notes

Suatu barisan disebut barisan aritmetika jika selisih (beda) antara setiap dua suku yang berurutan selalu merupakan bilangan tetap.

Contoh Soal 3.5

Jika suku ke-3 suatu barisan aritmetika adalah 11 dan suku ke-10 adalah 39. Tentukanlah:

a. rumus suku ke-n;

b. besar suku ke-25.

Jawab:

a. $U_3 = a + 2b \rightarrow a = U_3 - 2b$

$U_{10} = a + 9b \rightarrow a = U_{10} - 9b$

$U_3 - 2b = U_{10} - 9b$

$9b - 2b = U_{10} - U_3$

$7b = U_{10} - U_3$

$$b = \frac{U_{10} - U_3}{7}$$

Soal Pilihan

Suku kedua dari suatu deret aritmetika adalah 5. Jika jumlah suku keempat dan keenam dari deret tersebut adalah 28 maka suku ke–9 adalah ....

a. **19**

b. **21**

c. **26**

d. **28**

e. **29**

Soal SPMB, 2004

Soal Pilihan

Soal Terbuka
Apakah perbedaan barisan bilangan dengan barisan aritmetika? Jelaskan dengan kalimat Anda.

$$= \frac{39-11}{7}$$
$$= \frac{28}{7} = 4$$

$U_3 = a + 2b$
$11 = a + 2(4)$
$11 = a + 8$
$a = 3$

Jadi, rumus suku ke-n adalah:

$$\begin{aligned} U_n &= a + (n-1)b \\ &= 3 + (n-1)4 \\ &= 3 + 4n - 4 \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

b. $U_{25} = 4(25) - 1$
$= 100 - 1 = 99$

Tugas Siswa 3.1

Kerjakanlah dan diskusikanlah bersama teman sekelompok Anda. Buktikanlah pernyataan berikut.

a. $\frac{U_1 + U_3}{2} = U_2$

b. $\frac{U_1 + U_5}{2} = U_3$

c. $\frac{U_1 + U_{31}}{2} = U_{16}$

Hasil apa yang Anda peroleh dari pembuktian tersebut?
Pada barisan aritmetika yang memiliki jumlah suku ganjil, dapatkah ditentukan suku tengahnya?
Coba tentukan suku ke berapakah suku tengah dari barisan aritmetika 1, 4, 7, 10, ..., 61 dan berapa nilainya?

3. Deret Aritmetika

Anda telah mempelajari penjumlahan barisan bilangan yang disebut dengan deret bilangan pada bagian sebelumnya. Demikian pula dengan barisan aritmetika. Jika Anda menjumlahkan setiap suku barisan aritmetika maka akan menghasilkan suatu deret aritmetika. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut.
Misalkan $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$ merupakan barisan aritmetika maka $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ merupakan deret aritmetika.

Sebagai contoh, sebuah perusahaan makanan dapat menjual 10 makanan dalam 1 jam pertama. Pada 1 jam berikutnya perusahaan tersebut menjual 12 makanan dan 14 makanan pada

1 jam berikutnya. Demikian seterusnya setiap penambahan 1 jam, perusahaan tersebut dapat menjual 2 makanan lebih banyak dari jam sebelumnya.

Berapa jumlah makanan yang terjual pada 5 jam pertama?

Persoalan ini dapat Anda tulis sebagai berikut.

Penjualan pada jam pertama = $U_1 = a = 10$

Penjualan pada jam kedua = $U_2 = U_1 + 2$
$= 10 + 2$
$= 12$

Penjualan pada jam ketiga = $U_3 = U_2 + 2$
$= 12 + 2$
$= 14$

Penjualan pada jam keempat = $U_4 = U_3 + 2$
$= 14 + 2$
$= 16$

Penjualan pada jam kelima = $U_5 = U_4 + 2$
$= 16 + 2$
$= 18$

Dengan demikian, jumlah makanan yang terjual pada 5 jam pertama $= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5$
$= 10 + 12 + 14 + 16 + 18$
$= 70$ makanan

4. Rumus Jumlah *n* Suku Pertama Deret Aritmetika

Pada persoalan tertentu, seringkali Anda harus menjumlahkan bilangan dengan pola tertentu. Misalnya, diketahui deret aritmetika berikut.

$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 = ...$

Jika jumlah deret tersebut adalah J, maka penjumlahan tersebut dapat Anda tulis sebagai berikut.

$$\begin{array}{rcl} J &=& 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 \\ J &=& 100 + 99 + 98 + 97 + ... + 1 \\ \hline 2J &=& 101 + 101 + 101 + 101 + ... + 101 \end{array} +$$

$$2J = 100 \times 101 = 10.100$$

$$J = \frac{10.100}{2} = 5050$$

Dapatkah Anda menentukan jumlah dari deret-deret berikut?

a. $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100 + 99 + ... + 4 + 3 + 2 + 1 = ...$

b. $1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n - 1) + n + (n - 1) + ... + 4 + 3 + 2 + 1 = ...$

Dengan mengikuti pola penyelesaian penjumlahan pada contoh tersebut, Anda dapat menentukan rumus jumlah n suku pertama dari deret aritmetika.

Solusi Cerdas

Dari suatu deret aritmetika suku ke-5 adalah $5\sqrt{2} + 3$ dan suku ke-11 adalah $11\sqrt{2} + 9$. Jumlah 10 suku pertama adalah ....

a. $50\sqrt{2} + 45$
b. $50\sqrt{2} + 35$
c. $55\sqrt{2} + 40$
d. $55\sqrt{2} + 35$
e. $55\sqrt{2} + 45$

Jawab:

$U_5 = a + 4b = 5\sqrt{2} + 3$
$U_{11} = a + 10b = 11\sqrt{2} + 9$

Eliminasi kedua persamaan tersebut.

$$\begin{array}{rcl} a + 4b &=& 5\sqrt{2} + 3 \\ a + 10b &=& 11\sqrt{2} + 9 \\ \hline 6b &=& 6\sqrt{2} + 6 \\ b &=& \sqrt{2} + 1 \end{array} -$$

Substitusikan nilai b ke salah satu persamaan tersebut. Misalkan, ke persamaan pertama.

$a + 4(\sqrt{2} + 1) = 5\sqrt{2} + 3$
$a + 4\sqrt{2} + 4 = 5\sqrt{2} + 3$
$a = \sqrt{2} - 1$

Jumlah 10 suku pertama adalah U_{10}

$U_{10} = \frac{10}{2}(2(\sqrt{2} - 1) + 9(\sqrt{2} + 1))$
$U_{10} = 55\sqrt{2} + 35$

Jawaban: **d**

Soal UMPTN, 2001

Jumlah n suku pertama dinotasikan S_n.
Perhatikanlah uraian berikut.

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_{n-1} + U_n$$

$$\begin{array}{l} S_n = [a] + [a + b] + [a + 2b] + ... + [a + (n-2)b] + [a + (n-1)b] \\ S_n = [a + (n-1)b] + [a + (n-2)b] + [a + (n-3)b] + ... + [a + b] + [a] \\ \hline 2S_n = \underbrace{[2a + (n-1)b] + [2a + (n-1)b] + [2a + (n-1)b] + ... + [2a + (n-1)b] + [2a + (n-1)b]}_{\text{ada } n \text{ suku}} \end{array} +$$

$$2S_n = n[2a + (n-1)b]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)b]$$

Jadi, rumus jumlah n suku pertama dari deret aritmetika adalah

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)b]}$$

Notes

Ciri-ciri barisan dan deret aritmetika sebagai berikut.
1. $U_n - U_{n-1} = b$, nilai b selalu tetap;
2. U_n merupakan fungsi linear dalam n;
3. $S_n - S_{n-1} = U_n$;
4. S_n merupakan fungsi kuadrat dari n dengan bentuk:

$$S_n = \frac{n^2b}{2} + (2a + b)\frac{n}{2}$$

Anda suatu saat mungkin menemukan bentuk lain dari rumus tersebut seperti bentuk berikut.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)b] \\ &= \frac{n}{2}[a + a + (n-1)b] \\ &= \frac{n}{2}[a + U_n], \text{ dengan } a = U_1 \end{aligned}$$

Jadi, rumus jumlah n suku pertama pada deret aritmetika adalah

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[U_1 + U_n]}$$

Contoh Soal 3.6

Tentukanlah jumlah 50 buah bilangan asli yang pertama.

Jawab:

$U_1 = 1$

$U_{50} = 50$

$$\begin{aligned} S_{50} &= \frac{50}{2}(1 + 50) \\ &= 25(51) = 1.275 \end{aligned}$$

Contoh Soal 3.7

Tentukanlah rumus deret aritmetika berikut dan tentukan pula jumlah 10 suku pertamanya.

a. 5 + 10 + 15 + 20 + ...

b. 50 + 40 + 30 + ...

Jawab:

a. 5 + 10 + 15 + 20 + ...

$a = 5$

$b = 10 - 5 = 5$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)b]$$
$$= \frac{n}{2}[2 \cdot 5 + (n-1)5]$$
$$= \frac{n}{2}[10 + 5n - 5]$$
$$= \frac{n}{2}[5n + 5]$$
$$S_{10} = \frac{10}{2}[5 \cdot 10 + 5]$$
$$= 5(55)$$
$$= 275$$

b. 50 + 40 + 30 + ...

$a = 50$

$b = 40 - 50 = -10$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)b]$$
$$= \frac{n}{2}[2 \cdot 50 + (n-1)(-10)]$$
$$= \frac{n}{2}[100 + (-10n) + 10]$$
$$= \frac{n}{2}[110 - 10n]$$
$$S_{10} = \frac{10}{2}[110 - 10(10)] = 5(10) = 50$$

Soal Pilihan

Sebuah deret aritmetika memiliki suku pertama a dan beda b, jika jumlah n suku yang pertama deret ini sama dengan $n^2 - 3n$ maka nilai a dan b adalah ....

a. $a = -4$ dan $b = -2$

b. $a = -2$ dan $b = 2$

c. $a = 4$ dan $b = 2$

d. $a = -4$ dan $b = 4$

e. $a = -2$ dan $b = 4$

Soal SPMB, 2002

Contoh Soal 3.8

Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika diberikan oleh persamaan $S_n = 2n^2 + 3n$. Tentukanlah suku ke-n dan beda dari barisan tersebut.

Jawab:
Untuk mendapatkan suku ke-n, gunakan rumus $U_n = S_n - S_{n-1}$.

$S_n \quad = 2n^2 + 3n$
$S_{n-1} = 2(n-1)^2 + 3(n-1) = 2n^2 - n - 1$ –
$U_n \quad = 4n + 1$

Untuk mendapatkan beda, gunakan rumus $b = U_n - U_{n-1}$

$U_n \quad = 4n + 1$
$U_{n-1} = 4(n-1) + 1 = 4n - 3$ –
$b \quad = 4$

Jadi, beda untuk deret tersebut adalah 4.

Contoh Soal 3.9

Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika diberikan oleh persamaan $S_n = 3n^2 - 4n$. Tentukanlah suku ke-10 deret tersebut.

Jawab:
Untuk mendapatkan suku ke-n, gunakan rumus $U_n = S_n - S_{n-1}$ dengan $S_n = 3n^2 - 4n$.

$U_{10} = S_{10} - S_9$
$S_{10} \quad = 3(10^2) - 4(10) = 260$
$S_9 \quad = 3(9^2) - 4(9) = 207$ –
$U_{10} \quad = 260 - 207 = 53$

Jadi, suku ke-10 dari barisan tersebut adalah 53.

Contoh Soal 3.10

Hitunglah jumlah semua bilangan antara 250 dan 1.000 yang habis dibagi 7.

Jawab:
Anda harus mencari suku pertama dan suku terakhir dari barisan tersebut. Suku pertama adalah bilangan yang lebih besar dari 250 dan habis dibagi 7, yaitu 252.
Suku terakhir adalah bilangan yang lebih kecil dari 1.000 dan habis dibagi 7, yaitu 994.
Jadi, barisan aritmetika yang dimaksud adalah 252, 259, ..., 994 dengan $a = 252$, $b = 7$. Hitunglah banyaknya suku dari bentuk berikut.

$994 = U_n = a + (n-1)b$
$= 252 + (n-1)7 = 252 + 7n - 7 = 7n + 245$
$7n = 994 - 245 = 749$
$$n = \frac{749}{7} = 107$$

Solusi Cerdas

Iuran bulanan warga setiap tahun selalu naik Rp5.000,00 dari tahun sebelumnya. Jika iuran warga pada tahun pertama Rp10.000,00 per bulan maka jumlah total iuran warga tersebut setelah 8 tahun adalah ....

a. Rp180.000,00
b. Rp1.100.000,00
c. Rp1.800.000,00
d. Rp2.640.000,00
e. Rp3.200.000,00

Jawab:
$a = 10.000$
$b = 5.000$
$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)b\right)$$
Jumlah total iuran warga setelah 8 tahun adalah 12 bulan × S_8
$$= 12 \times \left(\frac{8}{2}\left(2(10.000) + 7(5.000)\right)\right)$$
= 12 × (4(20.000 + 35.000))
= 12 × (4(55.000))
= 12 × 220.000
= 2.640.000

Jawaban: **d**

UN SMK, 2006

Oleh karena itu, jumlah semua suku $S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$ adalah

$$S_{107} = \frac{1}{2} \cdot 107 \cdot (252 + 994)$$
$$= 66.661$$

Evaluasi Materi 3.2

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Manakah dari barisan-barisan berikut yang merupakan barisan aritmetika?
   a. 4, –1, –6, –11, ...
   b. 3, –3, 3, –3, ...
   c. $a, a + k^2, a + 2k^2, a + 3k^3, \ldots$

2. Manakah dari barisan-barisan berikut yang merupakan barisan aritmetika, jika diketahui rumus umumnya sebagai berikut.
   a. $U_n = 2 + 3n$
   c. $U_n = n(6 - n)$
   b. $U_n = 4 + n^2$

3. Tentukan rumus suku ke-n untuk masing-masing barisan aritmetika berikut.
   a. –17, –13, –9, ...
   b. 8, 11, 14, ...
   c. 10, 7, 4, ...
   d. $3, 3 - \frac{1}{4}, 3 - \frac{1}{2}, \ldots$
   e. –5, –3, –1, 1, ...

4. Jika suku ke-6 dari barisan aritmetika sama dengan 27 dan suku ke-12 adalah 48. Carilah suku ke-10.

5. Seorang pemandu wisata menerima gaji sebesar Rp1.000.000,00 per bulan. Setiap 6 bulan ia akan menerima kenaikan gaji sebesar Rp75.000,00. Tentukan gajinya setelah 5 tahun bekerja.

6. Hitunglah jumlah bilangan berikut.
   a. 3 + 6 + 9 + 12 + ... + 42
   b. (–12) + (–7) + (–2) + ... + 78
   c. (–2) + 5 + 12 + ... + 145

7. Tentukanlah jumlah deret aritmetika berikut.
   a. 4 + 9 + 14 + ... sampai 10 suku
   b. 6 + 4 + 2 + ... sampai 20 suku
   c. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \ldots$ sampai 15 suku

8. Tentukan unsur-unsur yang ditanyakan pada barisan aritmetika berikut.
   a. $a = 5$ dan $b = 3$
   $U_{29} = \ldots$ dan $S_{10} = \ldots$
   b. $b = 17$ dan $U_{21} = 336$
   $a = \ldots$ dan $S_8 = \ldots$
   c. $a = 21$ dan $b = -8$
   $U_n = -99$ dan $n = \ldots$; $S_n = \ldots$
   d. $a = 2$, $b = 9$, dan $n = 15$
   $U_n = \ldots$ dan $S_n = \ldots$
   e. $a = 4$, $U_n = -22$ dan $S_n = -99$
   $b = \ldots$

9. Jika rumus jumlah suku ke-n suatu deret aritmetika $S_n = \frac{n}{a}(a + U_n)$
   a. Apakah $U_1 = S_1 = a$?
   b. Buktikan bahwa $U_n = \frac{2 \cdot S_n}{n} - a$.
   c. Jika diketahui rumus jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika $S_n = 2n^2 + n$, tentukan a, U_n, dan bedanya.
   d. Jika $S_n = \frac{5n^2 + 5n}{2}$, dapatkah Anda menentukan langsung bedanya (b)?

10. Di sebuah restoran, setiap 5 menit sekali datang dua orang pengunjung yang akan makan di restoran tersebut. Tentukan jumlah pengunjung restoran setelah 1 jam, dengan catatan tidak ada pengunjung restoran yang meninggalkan restoran.

C Barisan dan Deret Geometri

1. Barisan Geometri

Kata Kunci

- rasio
- suku
- barisan
- deret

Agar Anda lebih mudah dalam memahami barisan geometri, perhatikan uraian berikut. Sebuah mobil dijual dengan harga 192 juta rupiah. Nilai jual mobil tersebut mengalami penurunan (depresiasi) sebesar $\frac{1}{4}$ dari nilai jualnya per tahun.

Anda dapat menuliskan harga jual mobil setiap tahun dengan cara sebagai berikut.

Tahun ke-1 : 192

Tahun ke-2 : $192 - \frac{1}{4}(192) = 144$

Tahun ke-3 : $144 - \frac{1}{4}(144) = 108$

Tahun ke-4 : $108 - \frac{1}{4}(108) = 81$, dan seterusnya.

Harga mobil setiap tahun membentuk barisan 192, 144, 108, 81, ..., yang bukan merupakan barisan aritmetika karena beda dua suku yang berurutan tidak tetap. Akan tetapi, rasio atau hasil bagi tiap suku dengan suku sebelumnya selalu tetap, yaitu sebesar 0,75. Oleh karena itu, barisan bilangan seperti ini termasuk barisan geometri. Dalam kehidupan sehari-hari, banyak permasalahan yang berkaitan dengan barisan geometri, diantaranya perhitungan bunga majemuk pada dunia perbankan, pertumbuhan populasi makhluk hidup, peluruhan, dan inflasi.

Agar Anda lebih mengenal barisan geometri, lakukanlah kegiatan berikut.

Kegiatan Siswa 3.2

Bagilah teman sekelas Anda dalam beberapa kelompok, satu kelompok terdiri atas paling sedikit 6 orang. setiap kelompok mengerjakan tugas berikut.

1. Dalam selembar kertas, buat 6 sampai 10 baris dan mintalah seorang teman Anda untuk menuliskan bilangan pada baris pertama.
2. Buatlah kesepakatan dalam kelompok Anda untuk menentukan bilangan yang tetap sebagai pengalinya. Mintalah teman kedua untuk mengalikan bilangan awal dengan pengali tetap, isikanlah pada kolom kedua.

3. Kalikan bilangan pada baris kedua dengan bilangan tetap tadi, sampai seluruh teman-teman dalam kelompok Anda mengalikannya.
4. Kelompok yang lebih dahulu selesai dan membuat barisan yang unik tersebut adalah pemenangnya.

Anda dapat mengambil satu contoh barisan yang dibuat oleh kelompok teman Anda, misalnya 3, 12, 48, 192, ... Ternyata, bilangan pengalinya 4. Empat merupakan pengali atau rasio yang biasa disingkat dengan r. Perhatikan kembali barisan geometri 3, 12, 48, 192, ...

Dapatkah Anda menentukan suku ke-6? Jika Anda mengalikan satu per satu setiap suku untuk mencari suku ke-6 maka Anda akan memperoleh 3.072. Pekerjaan tersebut tentu saja memerlukan waktu yang lama. Agar Anda lebih mudah menentukan suku ke-n, buatlah rumus barisan geometrinya. Namun, sebelumnya pelajari dahulu bentuk umum dari barisan geometri.

$U_1 = 3 = a$
$U_2 = 12 = 3 \cdot 4 = a \cdot r$
$U_3 = 48 = 12 \cdot 4 = U_2 \cdot 4 = ar \cdot r = ar^2$
$U_4 = 192 = 48 \cdot 4 = U_3 \cdot 4 = ar^2 \cdot r = ar^3$

Perhatikan pola barisan tersebut. Dari pola barisan tersebut Anda dapat menentukan $U_6 = ar^{(6-1)} = ar^5$. Anda juga dapat menentukan rumus suku ke-n dari barisan geometri, yaitu $U_n = ar^{n-1}$.

Berdasarkan uraian tersebut, dapat memperjelas bahwa suatu barisan disebut barisan geometri jika perbandingan (rasio = r) dua suku yang berurutan selalu merupakan bilangan tetap.

Jadi, $r = \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{U_3}{U_2} = \ldots = \dfrac{U_n}{U_{n-1}}$

$$\boxed{r = \frac{U_n}{U_{n-1}}}$$

akibatnya,
$U_n = U_{n-1} \cdot r$
$U_1 = a = ar^0$
$U_2 = U_1 \cdot r = ar^1$
$U_3 = U_2 \cdot r = ar^2$
$U_4 = U_3 \cdot r = ar^3$
$U_n = U_{n-1} \cdot r = ar^{n-1}$

Notes

a. Barisan geometri akan naik jika untuk setiap n berlaku $U_n > U_{n-1}$.
b. Barisan geometri akan turun jika untuk setiap n berlaku $U_n < U_{n-1}$.
c. Barisan geometri bergantian naik turun jika $r < 0$.

Jadi, rumus umum suku ke-n barisan geometri adalah

$$\boxed{U_n = ar^{n-1}}$$

dengan a merupakan suku awal
r merupakan rasio
n merupakan banyak suku
U_n merupakan suku ke-n

Soal Pilihan

Soal Terbuka
Jelaskan dengan kata-kata Anda tentang perbedaan barisan aritmetika dan barisan geometri.

Contoh Soal 3.11

Tentukan rumus suku ke-n dari barisan berikut. Kemudian, tentukan suku ke-10.

a. 4, 12, 36, 108, ...

b. $20, 10, 5, \frac{5}{2}, ...$

c. 3, –6, 12, –24, ...

Jawab:

a. 4, 12, 36, 108, ...

$a = 4$

$r = \frac{12}{4} = 3$

$U_n = a \cdot r^{n-1}$
$= 4 \cdot 3^{n-1}$

$U_{10} = 4 \cdot 3^9$
$= 4(19.683)$
$= 78.732$

b. $20, 10, 5, \frac{5}{2}, ...$

$a = 20$

$r = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

$U_n = a \cdot r^{n-1}$
$= 20(\frac{1}{2})^{n-1}$

$U_{10} = 20(\frac{1}{2})^9$
$= 20(1,9531 \times 10^{-3})$
$= 3,9062 \times 10^{-2}$

c. 3, –6, 12, –24, ...

$a = 3$

$r = \frac{-6}{3} = -2$

$U_n = a \cdot r^{n-1}$

$$= 3\cdot(-2)^{n-1}$$
$$U_{10} = 3(-2)^9$$
$$= 3(-512)$$
$$= -1.536$$

Contoh Soal 3.12

Suatu barisan geometri suku ke-4nya adalah 18 dan suku ke-5 adalah 6. Carilah suku pertama dan rasionya. Tuliskan 5 suku pertama dari barisan tersebut.

Jawab:

$U_4 = 18;\ U_5 = 6$

$U_4 = ar^3 = 18$

$U_5 = ar^4 = 6$

$$r = \frac{U_5}{U_4} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$ar^3 = 18 \Rightarrow a = \frac{18}{r^3} = \frac{18}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = 486$$

$$U_1 = a = 486$$

$$U_2 = a\cdot r = 486\left(\frac{1}{3}\right) = 162$$

$$U_3 = ar^2 = 486\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 54$$

$$U_4 = ar^3 = 486\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 18$$

$$U_5 = ar^4 = 486\left(\frac{1}{3}\right)^4 = 6$$

Jadi, lima suku pertama barisan tersebut adalah 486, 162, 54, 18, 6.

Contoh Soal 3.13

Diketahui barisan geometri dengan $U_2 = -2$ dan $U_7 = 64$. Tentukan suku ke-10.

Jawab:

$U_2 = ar = -2$

$U_7 = ar^6 = 64$

$$\frac{U_2}{U_7} = \frac{ar}{ar^6} = \frac{-2}{64}$$

Soal Pilihan

Suatu barisan geometri diketahui suku keduanya adalah 2, sedangkan suku keenamnya adalah $\frac{1}{8}$.

Perbandingan positif barisan geometri tersebut adalah ....

a. $-\frac{1}{4}$

b. $-\frac{1}{2}$

c. $\frac{1}{4}$

d. $-\frac{1}{2}$

e. 2

UN SMK, 2004

$$\frac{1}{r^5} = -\frac{1}{32}$$
$$r^5 = -32$$
$$r = \sqrt[5]{-32} = -2$$
$$U_2 = ar = -2$$
$$a(-2) = -2$$
$$a = \frac{-2}{-2} = 1$$
Jadi, $U_{10} = ar^9 = 1(-2)^9 = -512$.

2. Deret Geometri

Anda telah mempelajari barisan geometri di mana jika U_1, U_2, U_3, ..., U_n merupakan barisan geometri maka suku-sukunya dapat ditulis a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}. Sama halnya dengan barisan aritmetika, Anda dapat menjumlahkan suku-suku pada barisan geometri. Jika Anda memiliki barisan geometri a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1} maka jumlahnya adalah $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$. Penjumlahan tersebut dinamakan deret geometri.

Anda dapat mencari rumus untuk jumlah deret geometri $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$ dengan cara berikut.

$$\begin{array}{l} S_n \quad = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} \\ \underline{r \cdot S_n = a + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ar^n} \; - \\ S_n - r \cdot S_n = a - ar^n \\ (1 - r)S_n = a(1 - r^n) \end{array}$$

Dari uraian tersebut, diperoleh rumus jumlah n suku pertama deret geometri berikut.

$$\boxed{\begin{array}{c} S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{ untuk } r < 1 \\ \text{atau} \\ S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}, \text{ untuk } r > 1 \end{array}}$$

Notes

Ciri-ciri barisan atau deret geometri sebagai berikut.

1. $r = \dfrac{U_n}{U_{n-1}}$,selalu tetap,
2. U_n merupakan fungsi eksponen dari n,
3. S_n merupakan fungsi eksponen dalam n,
4. $U_n = S_n - S_{n-1}$.

Contoh Soal 3.14

Tentukan rasio, suku ke-8, dan jumlah delapan suku pertama barisan geometri berikut.

a. 2, 6, 18, 54, ...

b. 20, 10, 5, $\frac{5}{2}$, ...

Jawab:

a. 2, 6, 18, 54, ...

$a = 2$

$r = \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3$

$U_n = ar^{n-1} \Rightarrow$ sehingga $U_8 = ar^7 = 2(3^7) = 4.374$

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow$ sehingga $S_8 = \frac{2(3^8 - 1)}{3 - 1} = 6.560$

b. 20, 10, 5, $\frac{5}{2}$, ...

$a = 20$

$r = \frac{10}{20} = \frac{5}{10} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}$

$U_8 = ar^7 = 20(\frac{1}{2})^7 = \frac{5}{32}$

$S_8 = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

$= \frac{20\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1 - \frac{1}{2}}$

$= 39\frac{27}{32}$

Solusi Cerdas

Bentuk umum suku ke-n dari barisan geometri 1, –2, 4, –8, ... adalah ....

a. $U_n = (-2)^{n-1}$
b. $U_n = 2^{n-1}$
c. $U_n = 2^{n+1}$
d. $U_n = \frac{1}{2}^{n-1}$
e. $U_n = \frac{1}{2}^{n+1}$

Jawab:
Dari barisan geometri 1, –2, 4, –8, ...
diperoleh $a = 1$

$r = \frac{-2}{1} = -2$

$U_n = a \cdot r^{n-1}$
$U_n = 1 \cdot (-2)^{n-1}$
$U_n = (-2)^{n-1}$

Jawaban: **a**

UN SMK, 2004

Contoh Soal 3.15

Suatu deret geometri diketahui $S_n = 150$, $S_{n+1} = 155$, dan $S_{n+2} = 157{,}5$. Tentukanlah suku pertama deret tersebut.

Jawab:

$U_{n+2} = S_{n+2} - S_{n+1}$
$= 157{,}5 - 155$
$= 2{,}5$

$U_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
$= 155 - 150 = 5$

$U_{n+2} = r\,U_{n+1}$
$2{,}5 = r(5)$
$r = 0{,}5$

Jumlah n suku pertama deret geometri adalah

$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

$$150 = \frac{a - ar^n}{1-r}$$
$$= \frac{a - U_{n+1}}{1-r}$$
$$= \frac{a-5}{1-0,5}$$
$$a = 150(0,5) + 5 = 80$$

Jadi, suku pertama deret geometri tersebut adalah 80.

Contoh Soal 3.16

Diketahui bahwa $3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^n = 3.279$.
Tentukanlah nilai n.

Jawab:
$3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^n = 3.279$
Perhatikan bahwa ruas kiri merupakan suku ke-n dari deret geometri, sehingga

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$$
$$3.279 = \frac{3(3^n - 1)}{3-1}$$

$6.558 = 3(3^n - 1)$
$3^n - 1 = 2.186$
$3^n = 2187 = 3^7$
$n = 7$
Jadi, nilai n adalah 7.

Soal Pilihan

Tiga bilangan membentuk suatu deret geometri. Jika hasil kalinya adalah 216 dan jumlahnya 26 maka rasio deret tersebut adalah ....

a. 3 atau $\frac{1}{3}$
b. 3 atau $-\frac{1}{3}$
c. 3 atau 2
d. 3 atau $\frac{1}{2}$
e. 2 atau $\frac{1}{2}$

SPMB, 2003

Tugas Siswa 3.2

Diketahui barisan geometri 2, 16, 128, 1024, ... Di antara dua suku disisipkan dua suku baru sehingga membentuk barisan geometri baru.

a. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan baru ini.
b. Tentukan rumus suku ke-n dari deret yang dibentuk dari barisan baru.

3. Deret Geometri Tak Hingga

Seperti yang telah Anda ketahui sebelumnya bahwa deret geometri dengan jumlah suku n dituliskan sebagai berikut. $U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$, sedangkan untuk jumlahnya ditentukan oleh $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$.

Sekarang, bagaimanakah jumlah suatu deret geometri jika banyak suku-suku penjumlahan deret geometri ini bertambah terus tanpa henti? Perhatikanlah uraian berikut.

Deret geometri tak hingga adalah deret geometri dengan banyaknya suku tak hingga sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + ... = a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$

Jumlah deret geometri tak hingga dilambangkan S_∞. Pada deret geometri tak hingga $a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$, berlaku:

- memiliki jumlah deret atau konvergen, jika dan hanya jika $|r| < 1$ $(-1 < r < 1)$ yang ditentukan oleh

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

- tidak memiliki jumlah deret atau divergen, jika dan hanya jika $|r| > 1$.

Soal Pilihan

Jika jumlah tak hingga suatu deret geometri yang suku pertamanya 15 adalah 25 maka rasio deret tersebut adalah ....

a. $\frac{1}{5}$ **d.** $\frac{5}{3}$

b. $\frac{2}{5}$ **e.** $\frac{5}{2}$

c. $\frac{3}{5}$

Soal UN SMK, 2006

Contoh Soal 3.17

Tentukanlah jumlah deret tak hingga dari deret berikut.

a. $8 + 4 + 2 + 1 + ...$

b. $54 - 36 + 24 - 16 + ...$

Jawab:

a. $a = 8$

$$r = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = 16$$

b. $a = 54$

$$r = \frac{-36}{54} = \frac{24}{-36} = \frac{-16}{24} = \frac{-2}{3}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{54}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)} = \frac{54}{1+\frac{2}{3}} = 32\frac{2}{5}$$

Contoh Soal 3.18

Suku ke-n suatu deret geometri adalah 4^{-n}. Tentukan jumlah tak hingga deret tersebut.

Jawab:

$U_n = 4^{-n}$

$U_1 = a = 4^{-1} = \frac{1}{4}$

$$U_2 = 4^{-2} = \frac{1}{16}$$

$$r = \frac{U_2}{U} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Evaluasi Materi 3.3

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Manakah di antara barisan-barisan berikut yang merupakan barisan geometri?

a. 1, 3, 5, 7, ...
b. 1, 3, 9, 27, ...
c. –3, 3, –3, 3, ...
d. 0, 2, 4, 6, 8, ...
e. 4, –1, –6, –11, ...
f. $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$
g. $20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots$
h. 2, 6, 8, 54, ...

2. Tentukanlah rumus umum suku ke-*n* untuk barisan geometri berikut.

a. $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2}{3^3}, \ldots$
b. 1, –3, 9, –27, ...
c. $\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, \ldots$
d. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots$
e. $2\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \ldots$
f. 2, 6, 8, 54, ...
g. $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$
h. $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \ldots$

3. Diketahui barisan geometri dengan suku ketiga dan kelima masing-masing adalah 27 dan 3. Tentukan barisan geometri tersebut.

4. Tentukan tiga suku pertama pada barisan geometri yang suku ketiganya $\frac{25}{4}$ dan suku ketujuhnya $\frac{4}{25}$.

5. Suku kedua dari barisan geometri $\frac{5}{4}$ dan suku keempat $\frac{1}{5}$. Tentukan suku ketiganya.

6. Diketahui barisan geometri, tentukan jumlah tiga suku pertama deret geometri berikut.

a. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$
b. $1, 1\frac{1}{2}, (1\frac{1}{2})^2, \ldots$
c. $2, 2^2, 2^4, \ldots$
d. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

7. Hitung jumlah deret geometri berikut.

a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{64}$
b. $2 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^n$

8. Pada barisan geometri terdapat lima besaran, yaitu a, r, n, U_n, dan S_n. Tentukan nilai besaran yang tidak diketahui.
   a. $a = 1$, $r = 3$, $U_n = 243$, $n = ...$, dan $S_n = ...$
   b. $a = 8$, $U_n = \frac{1}{2}$, $S_n = 15\frac{1}{2}$, $r = ...$, dan $S_n = ...$
9. Dalam deret geometri diketahui $S_2 = 4$ dan $S_4 = 40$. Tentukan tiga suku pertama dari barisan geometrinya.
10. Tentukan suku dan jumlah suku dari barisan geometri berikut.
   a. $U_2 = 6$, $U_3 = 9$, $a = ...$
   b. $U_2 = -6$, $U_5 = 20\frac{1}{4}$, $r = ...$
   c. $r = \frac{1}{3}$, $n = 5$, $S_n = 1820$, $a = ...$
   d. $r = 3$, $S_6 = 3640$, $a = ...$
   e. $a = 16$, $r = \frac{3}{2}$, $S_n = 211$, $n = ...$
   f. $a = 1$, $S_3 = \frac{3}{4}$, $r = ...$
11. Hitunglah nilai jumlah tak hingga dari deret berikut.
   a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + ...$
   b. $2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} - ...$
   c. $16 + 12 + 9 + ...$
   d. $10 - 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{100} + ...$
12. Suku pertama dari deret geometri adalah 2 dan jumlah tak hingganya adalah 4. Carilah rasionya.
13. Rasio sebuah deret geometri adalah $-\frac{2}{5}$ dan jumlah sampai tak hingganya adalah 15. Hitunglah:
   a. suku pertama;
   b. suku ke-4.
14. Jumlah suatu deret geometri tak hingga adalah 24. Jika suku pertamanya 8, tentukanlah rasio dari deret tersebut.
15. Sebuah bola pingpong dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 2 meter. Setiap kali bola itu memantul, ia mencapai ketinggian tiga per empat dari ketinggian yang dicapai sebelumnya. Hitunglah panjang lintasan bola tersebut sampai berhenti.

D Pemecahan Masalah dengan Model Berbentuk Barisan dan Deret

Pada materi Bab 1, Anda telah mempelajari pemecahan masalah dengan model berbentuk sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Sama halnya dengan sistem persamaan linear dua variabel, barisan dan deret pun dapat digunakan untuk pemecahan masalah sehari-hari. Pada permasalahan kali ini, Anda akan belajar memecahkan masalah dengan model berbentuk barisan dan deret.

Kata Kunci

- pemecahan masalah
- model matematika

Contoh Soal 3.19

Pada saat yang sama, Roni mulai menabung Rp100.000,00 dan Risma menabung Rp80.000,00. Setelah itu, setiap bulan Roni menabung 10.000,00 dan Risma menabung Rp15.000,00. Setelah berapa bulan, tabungan Roni dan Risma berjumlah sama?

Jawab:
Soal tersebut dapat dipandang sebagai suatu barisan aritmetika.

- Tabungan Roni, Anda anggap sebagai barisan pertama.
  $U_1 = 100.000$
  $b = 10.000$
  $U_n = U_1 + (n - 1)b$
- Tabungan Risma, Anda anggap sebagai barisan kedua (diberi tanda aksen)
  $U_1' = 80.000$
  $b' = 15.000$
  $U_n' = U_1' + (n - 1)b'$

Jumlah tabungan Roni = Jumlah tabungan Risma

$$\begin{aligned}
S_n &= S_n' \\
U_1 + (n-1)b &= U_1' + (n-1)b' \\
100.000 + (n-1)10.000 &= 80.000 + (n-1)15.000 \\
100.000 - 80.000 &= (n-1)(15.000 - 10.000) \\
20.000 &= (n-1)5.000 \\
n - 1 &= \frac{20.000}{5.000} = 4
\end{aligned}$$

Jadi, jumlah tabungan Roni akan sama dengan tabungan Risma setelah 4 bulan (suku ke-5).

Contoh Soal 3.20

Seorang petugas tiket masuk tempat wisata mencatat jumlah wisatawan yang datang setiap harinya. Ternyata, banyaknya wisatawan yang datang pada hari ke-n memenuhi persamaan $U_n = 30 + 10n$. Tentukan jumlah wisatawan yang datang ke tempat wisata tersebut selama 20 hari pertama.

Sumber: *i230.photobucket.com*

Gambar 3.5

Jumlah wisatawan dapat dihitung menggunakan deret aritmetika.

Jawab:
$U_n = 30 + 10n$
Jumlah wisatawan yang datang pada hari pertama adalah $a = U_1$
$a = U_1 = 30 + 10(1) = 40$
Jumlah wisatawan yang datang pada hari ke-20 adalah U_{20}
$U_{20} = 30 + 10(20) = 230$
Jumlah wisatawan

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$

$$S_{20} = \frac{1}{2}(20)(40 + 230) = 10(270) = 2.700$$

Jadi, banyaknya wisatawan yang datang ke tempat wisata tersebut selama 20 hari pertama adalah 2.700 orang.

Contoh Soal 3.21

Seorang pedagang meminjam modal x rupiah di bank dengan bunga tunggal 2% per bulan yang dibayarkan per bulan. Setelah satu tahun, pengembalian oleh pedagang tersebut ternyata nilai pinjaman dan bunganya berjumlah Rp3.100.000,00. Berapakah besar modal yang dipinjam pedagang tersebut?

Jawab:

Permasalahan tersebut dapat dipandang sebagai barisan aritmetika, dengan suku pertama $(a) = x$;

beda $(b) = \dfrac{2}{100}x = 0{,}02x$;

$n = 13$ dan suku terakhir $(U_n) = 3.100.00$

$U_n = a + (n - 1)b$

$$\begin{aligned} 3.100.000 &= x + (n - 1)0{,}02x \\ &= x + (13 - 1)0{,}02x \\ &= x\,(1 + 0{,}24) \\ x &= \frac{3.100.000}{1{,}24} = 2.500.000 \end{aligned}$$

Jadi, modal yang dipinjam pedagang adalah Rp2.500.000,00

Search

Ketik: www.dikmenum.go.id/dataapp/e-learning/bahan/kelas1/images/BARIS%20dan%20DERET.swf

website ini memuat informasi mengenai materi, simulasi, latihan, dan tes tentang barisan dan deret.

Contoh Soal 3.22

Jumlah penduduk suatu kota dalam 10 tahun menjadi dua kali lipat. Menurut perhitungan, pada tahun 2010 mendatang jumlah penduduk kota tersebut akan mencapai 6,4 juta orang. Berapakah jumlah penduduk kota tersebut pada tahun 1960?

Jawab:

1960	1970	1980	1990	2000	2010
↓					↓
$a = ...?$					6,4 juta

$r = 2$

$n = 6$

$U_6 = 6{,}4$ juta $= 6.400.000$

$U_6 = ar^5$

$6.400.000 = a(2)^5$

$$a = \frac{6.400.000}{2^5} = \frac{6.400.000}{32} = 200.000$$

Jadi, jumlah penduduk pada tahun 1960 adalah 200 ribu orang.

Sumber: *i174.photobucket.com*

Gambar 3.6

Pertambahan penduduk mengikuti deret geometri.

Contoh Soal 3.23

Suatu tali dibagi menjadi enam bagian dengan panjang masing-masing bagian membentuk barisan geometri. Jika panjang tali yang paling pendek 3 cm dan yang paling panjang 96 cm, berapakah panjang tali sebelum dipotong?

Jawab:
Keenam potongan tali yang membentuk barisan geometri itu adalah $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5$
Misalkan, tali yang paling pendek adalah a dan yang paling panjang adalah ar^5 maka suku pertamanya (a) adalah 3, suku terakhirnya (ar^5) adalah 96 dan banyak suku barisan (n) adalah 6.

$a = 3$; $n = 6$

$ar^5 = 96$

$3r^5 = 96$

$$r^5 = \frac{96}{3} = 32$$

$$r = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 189$$

Jadi, panjang tali sebelum dipotong adalah 198 cm.

Soal Pilihan

Sebuah perusahaan, pada tahun pertama memproduksi 10.000 unit barang. Produksi pada tahun-tahun berikutnya meningkat menjadi $\frac{11}{10}$ dari tahun sebelumnya. Banyaknya produksi pada tahun ke-5 adalah ....

a. 16.105 unit
b. 14.641 unit
c. 13.310 unit
d. 12.100 unit
e. 11.000 unit

Soal UN SMK, 2006

Tugas Siswa 3.3

Kerjakanlah bersama teman sekelompok Anda.
Buatlah sebuah permasalahan yang model matematikanya merupakan:

a. barisan aritmetika;
b. deret aritmetika;
c. barisan geometri;
d. deret geometri.

Selesaikanlah permasalahan yang Anda buat oleh teman Anda, sedangkan Anda menyelesaikan permasalahan yang dibuat oleh teman Anda.

Evaluasi Materi 3.4

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda

Selesaikan persoalan nomor 1–4 menggunakan konsep barisan aritmetika.

1. Pada awal bekerja, seorang pemandu wisata memperoleh gaji Rp2.000.000,00 per bulan. Setiap tahun gaji pemandu wisata tersebut bertambah sebesar Rp150.000,00. Berapa gaji pemandu wisata tersebut setelah bekerja selama 7 tahun?

Sumber: *www.thebalidriver.com*

2. Pada awal produksi, sebuah perusahaan pakaian memproduksi 200 potong pakaian per hari. Perusahaan merencanakan untuk menambah hasil produksinya secara tetap setiap bulan. Pada bulan ke-10 perusahaan tersebut memproduksi 335 pakaian/hari. Berapa kenaikan produksinya per bulan? (Anggap 1 bulan sama dengan 30 hari).
3. Sebuah bak mandi berisi 8 liter air. Kemudian, kran ledeng dibuka dan mengalir air sebanyak 3 liter per menit. Berapa liter air yang berada di bak jika lama membuka kran tersebut adalah 11 menit?
4. Seorang pengrajin membuat pigura dari kayu yang berbentuk segitiga siku-siku sisi-sisi pigura tersebut membentuk barisan aritmetika. Jika sisi miringnya 20 cm, berapakah panjang sisi pigura yang terpendek?

Selesaikan persoalan nomor 5–7 menggunakan konsep deret aritmetika.

5. Untuk mempersiapkan pergelaran busana, seorang perancang busana melibatkan sebanyak 150 orang penjahit pakaian dari hari Senin sampai Jum'at. Agar lebih cepat selesai, setiap minggu ditambah 12 orang penjahit. Setelah 12 minggu, pekerjaan tersebut selesai. Berapa rupiah uang yang harus dikeluarkan oleh perancang busana tersebut jika upah penjahit Rp45.000,00 per hari?
6. Seorang *salesman* pada bulan pertama berkeliling menawarkan produknya menggunakan sepeda motor dengan menempuh jarak 1.000 km. Pada setiap bulan berikutnya, jarak tempuh *salesman* berkurang 60 km. Berapa uang yang harus dikeluarkan untuk mengisi bahan bakar sampai akhir bulan ke-5 jika harga bahan bakar per liternya Rp5.000,00 dan setiap liternya dapat menempuh jarak 60 km?
7. Di suatu gedung kesenian terdapat banyak kursi. Baris pertama dapat memuat 30 kursi, baris kedua 36 kursi, dan seterusnya bertambah 6 kursi. Berapa jumlah kursi jika dalam gedung kesenian tersebut terdapat 9 baris?

Sumber: www.flickr.com

Selesaikan persoalan nomor 1–4 menggunakan konsep barisan aritmetika.

8. Populasi serangga di suatu tempat pada tanggal 4 April 2008 adalah 10.000 ekor. setiap 2 hari bertambah 20% dari jumlah semula. Berapa populasi serangga tersebut pada tanggal 14 April 2008?

9. Harga sebuah mesin pembuat roti pada saat pembelian adalah Rp15.000.000,00. Setiap tahun menyusut 5% terhadap nilai pembelian. Berapa harga mesin tersebut pada akhir tahun ke-5?

10. Suatu bola jatuh dari ketinggian 72 m, kemudian memantul di tanah dan memantul kembali 80% dari tinggi semula. Begitu seterusnya hingga sampai dengan 6 pantulan. Berapa tinggi bola pada pantulan ke-6?

Ringkasan

- Barisan bilangan adalah sekumpulan bilangan yang tersusun menurut pola tertentu dan setiap unsur bilangan yang tersusun itu disebut suku barisan. Jumlah dari barisan bilangan dinamakan dengan deret.
- Barisan bilangan dituliskan dengan U_1, U_2, U_3, U_4, ... Deret bilangan dituliskan dengan $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots$. Berdasarkan keteraturan pola setiap suku barisannya, barisan bilangan dapat dibedakan menjadi barisan aritmetika dan barisan geometri.
- Rumus umum suku ke-n dari barisan aritmetika adalah $U_n = a + (n - 1)b$
  dengan U_n merupakan suku ke-n, a merupakan suku awal, b merupakan beda, dan n merupakan banyaknya suku.
- Rumus jumlah n suku pertama dari deret aritmetika adalah

  $$S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)b] \text{ atau}$$

  $$S_n = \frac{n}{2}\,(U_1 + U_n)$$
- Rumus umum suku ke-n barisan geometri adalah $U_n = ar^{n-1}$
  dengan U_n merupakan suku ke-n, a merupakan suku awal, r merupakan rasio, dan n merupakan banyak suku.
- Rumus jumlah n suku pertama deret geometri adalah

  $$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ untuk } r < 1$$

  $$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{1 - r}, \text{ untuk } r > 1$$
- Deret geometri tak hingga memiliki jumlah deret jika dan hanya jika $|r| < 1$ $(-1 < r < 1)$ dan ditentukan oleh $S_\infty = \dfrac{a}{1 - r}$.

Kaji Diri

Setelah mempelajari materi Bab Barisan dan Deret, adakah materi yang belum Anda pahami? Materi manakah yang belum Anda pahami? Diskusikanlah bersama teman dan guru Anda.

Evaluasi Materi Bab 3

Kerjakan di buku latihan Anda.

A. Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Diketahui barisan aritmetika 2, 4, 6, 8, ..., rumus suku ke-n barisan ini adalah ....
   a. $n + 2$
   b. $2n + 1$
   c. $2n$
   d. $2n + 2$
   e. $4 - 2n$
2. Rumus suku ke-n dari barisan aritmetika 8, 11, 14, 17, 20, ... adalah ....
   a. $3 + 8n$
   b. $3 + 5n$
   c. $3 - 5n$
   d. $5 - 3n$
   e. $5 + 3n$
3. Suku ke-12 dan ke-15 dari barisan aritmetika 9, 15, 21, 27, ... adalah ....
   a. 39 dan 51
   b. 108 dan 135
   c. 75 dan 93
   d. 72 dan 90
   e. 65 dan 83
4. Suatu barisan aritmetika memiliki suku ke-n yang dirumuskan oleh $U_n = 2n + 6$. Beda barisan itu adalah ....
   a. 2
   b. 3
   c. 4
   d. 6
   e. 12
5. Diketahui 3 suku yang berurutan dari suatu barisan aritmetika adalah $x + 2$, $2x + 3$, dan $5x - 6$. Nilai x adalah ....
   a. -1
   b. 4
   c. $\frac{5}{4}$
   d. 1
   e. 5
6. Dari suatu deret diketahui $S_n = 3n^2 - 15n$. Nilai $U_n = 0$ untuk $n =$ ....
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
   e. 5
7. Jumlah n buah suku pertama suatu deret aritmetika dinyatakan oleh $S_n = \frac{n}{2}(2n - 3)$. Beda deret tersebut adalah ....
   a. -2
   b. 2
   c. $\frac{1}{2}$
   d. 1
   e. -1
8. Pada sebuah deret $U_n = 2an + b + 4$ dan $S_n = 3bn^2 + an$, nilai a dan b berturut-turut adalah ....
   a. 12 dan 4
   b. -12 dan 4
   c. 12 dan -4
   d. -12 dan -4
   e. -4 dan -12
9. Dalam sebuah deret hitung, suku keduanya adalah 5 serta jumlah suku keempat dan ke-enamnya adalah 28. Suku yang kesembilan adalah ....
   a. 28
   b. 26
   c. 21
   d. 19
   e. 17
10. Misalkan, S adalah jumlah n suku pertama dari barisan 3, 7, 11, ... dan T adalah jumlah n suku pertama dari barisan 8, 10, 12, ... Jika $S = T$ maka $n =$ ....
   a. 4
   b. 5

c. 6
d. 7
e. 8

11. Jika barisan geometri 3, 9, 27, 81, ..., rumus suku ke-n dari barisan geometri tersebut adalah ....
a. 3^n
b. 3^{n-1}
c. $3^n - 1$
d. 3^{1-n}
e. $3(3^n)$

12. Jika sebuah deret geometri 1, 2, 4, 8, ... suku ke-8 dari barisan tersebut adalah ....
a. 64
b. 128
c. 196
d. 246
e. 256

13. Diketahui $(a - 4)$, $(a - 2)$, $(a + 4)$, ... membentuk barisan geometri. Rasio dari barisan tersebut adalah ....
a. 2
b. 3
c. 4
d. 5
e. 6

14. Suku ke-3 dan ke-5 suatu barisan geometri berturut-turut adalah 8 dan 32. Suku ke-7 barisan tersebut adalah ....
a. 128
b. 182
c. 218
d. 281
e. 812

15. Jika diketahui deret ukur tak hingga $x - 1$, $(x - 1)^2$, $(x - 1)^3$, ... konvergen (jumlahnya ada) untuk nilai-nilai x = ...
a. $-1 < x < 1$
b. $0 < x < 2$
c. $x > 2$
d. $x < 2$
e. untuk semua x

16. Suku ke-n suatu deret geometri 4^{-n}. Jumlah deret tak hingga dari deret geometri tersebut adalah ....
a. $\frac{1}{3}$
b. 2
c. 1
d. $\frac{1}{2}$
e. 3

17. Jumlah deret geometri tak hingga
$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \ldots$ adalah ....
a. $\frac{1}{2}$
b. $\frac{1}{3}$
c. 1
d. $\frac{1}{4}$
e. $\frac{1}{5}$

18. Jumlah deret geometri dari
$2 - 3 + \frac{9}{2} - \frac{27}{4} + \ldots$ adalah ....
a. $\frac{2}{5}$
b. 16
c. $-\frac{3}{2}$
d. $\frac{4}{5}$
e. 32

19. Sebuah deret geometri tak hingga jumlahnya 40 dan suku pertamanya 10. Rasio dari deret geometri tersebut adalah ....
a. $-\frac{1}{4}$
b. $-\frac{1}{2}$
c. $\frac{1}{4}$
d. $\frac{1}{2}$
e. $\frac{3}{4}$

20. Diketahui barisan geometri 2, 6, 18, 54, ... Rumus jumlah n suku pertama dari barisan tersebut adalah ....

a. $3n$
b. 2^{3n}
c. 3^{n-1}
d. $3^n - 1$
e. $3n + 1$

B. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Hitunglah jumlah deret aritmetika berikut.
   a. 8 + 17 + 26 + 35 + ... sampai 15 suku
   b. 26 + 21 + 16 + 11 + ... sampai 8 suku
2. Seorang penjual kue mencatat hasil penjualannya selama 10 hari. Jika penjualan hari pertama 18 toples kue dan mengalami kenaikan tetap sebanyak 4 toples setiap hari, tentukan jumlah hasil penjualan kue selama dua bulan.
3. Hitunglah jumlah deret geometri tak hingga berikut.
   a. $3 + 2 + 1\frac{1}{3} + \frac{8}{9} + \ldots$
   b. $2 + (-6) + 18 + (-54) + \ldots$
4. Jumlah 5 suku pertama deret geometri adalah –33. Jika nilai perbandingannya adalah –2, tentukanlah jumlah nilai suku ke-3 dan ke-4 dari deret tersebut.
5. Seutas tali dibagi menjadi 5 bagian. Panjang setiap potongan membentuk barisan geometri. Jika tali yang terpendek adalah 16 cm dan tali yang terpanjang adalah 81 cm, berapakah panjang tali semula?

Evaluasi Semester 2

Kerjakan di buku latihan Anda.

A. Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Dari suatu deret hitung diketahui jumlah 4 suku pertama sama dengan 17 dan jumlah 8 suku pertama sama dengan 58. Suku pertama dari deret tersebut adalah ....
   a. 1
   b. $1\frac{1}{2}$
   c. 2
   d. 3
   e. 4
2. Suku ke-20 dari barisan bilangan 2, 4, 6, ... adalah ....
   a. 38
   b. 40
   c. 42
   d. 50
   e. 62
3. Banyaknya jumlah suku dari deret aritmetika $3 + 5 + 7 + ... + 151$ adalah ....
   a. 151
   b. 150
   c. 75
   d. 50
   e. 25
4. Sebuah barisan aritmetika memiliki suku ke-3 = 16 dan suku ke-6 = 7. Suku ke-8 adalah ....
   a. 1
   b. 10
   c. 22
   d. 64
   e. 92
5. Rumus suku ke-n dari barisan 3, 5, 7, 9, ... adalah ....
   a. $n + 2$
   b. $3n$
   c. $2n - 1$
   d. $2n + 1$
   e. 4^{n-1}
6. Jumlah semua bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3, tetapi tidak habis dibagi 5 adalah ....
   a. 133
   b. 325
   c. 733
   d. 1.368
   e. 1.683
7. Jumlah n suku pertama suatu barisan diberikan oleh rumus $S_n = n^3 + 2n$. Suku ke-4 dari barisan tersebut adalah ....
   a. 33
   b. 39
   c. 49
   d. 63
   e. 72
8. Seorang pengusaha minuman ringan menerima pesanan 2.500 cangkir pada bulan Januari. Selanjutnya, setiap bulan bertambah 40 cangkir. Jumlah minuman yang dibuat sampai bulan November di tahun yang sama adalah ... cangkir.
   a. 20.500
   b. 20.600
   c. 21.800
   d. 27.900
   e. 29.700
9. Seorang petugas kebersihan diberi upah pada bulan pertama sebesar Rp600.000,00. Oleh karena rajin, jujur, dan terampil maka upahnya bertambah Rp10.000,00 setiap bulan. Upah petugas tersebut pada bulan ke-12 adalah ....
   a. Rp610.000,00
   b. Rp612.000,00
   c. Rp710.000,00
   d. Rp720.000,00
   e. Rp786.000,00

10. Banyaknya bilangan antara 15 dan 150 yang habis dibagi 4 adalah ....
   a. 35
   b. 34
   c. 33
   d. 32
   e. 31

11. Hasil produksi suatu industri kerajinan ukiran kayu setiap bulan dinyatakan dengan persamaan $U_n = 10n + 2$ (n menyatakan banyaknya bulan) jumlah hasil produksi selama 1 tahun adalah ... unit.
   a. 122
   b. 144
   c. 804
   d. 1728
   e. 1440

12. Pada hari pertama, suatu pergelaran seni dihadiri oleh 1.000 penonton. Pada hari kedua, pergelaran seni tersebut dihadiri oleh 1.050 penonton. Jika peningkatan jumlah penonton setiap hari adalah tetap maka jumlah penonton pada hari ke-20 adalah ....
   a. 1.800
   b. 1.850
   c. 1.900
   d. 1.950
   e. 2.000

13. Suatu perusahaan pada tahun pertama memproduksi 5.000 unit barang. Produksi pada tahun-tahun berikutnya turun secara tetap sebesar 80 unit per tahun. Perusahaan tersebut memproduksi 3.000 unit barang pada tahun ke- ....
   a. 24
   b. 25
   c. 26
   d. 27
   e. 28

14. Jika diketahui barisan geometri 150, –60, 24, ... maka rasio dari barisan tersebut adalah ....
   a. $\frac{2}{5}$
   b. $-\frac{2}{5}$
   c. $\frac{1}{5}$
   d. $-\frac{1}{5}$
   e. $\frac{3}{5}$

15. Jumlah sembilan suku pertama dari barisan geometri $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}$, ... adalah ....
   a. 511
   b. 512
   c. $\frac{460}{3}$
   d. $\frac{511}{4}$
   e. $\frac{511}{3}$

16. Jika barisan geometri 2, 6, 18, 54, ... maka rumus jumlah n suku pertama dari barisan tersebut adalah ....
   a. $3n$
   b. 2^{3n}
   c. 3^{n-1}
   d. $3^n - 1$
   e. $3n + 1$

17. Sebuah deret geometri tak hingga jumlahnya 15 dan suku pertamanya 12. Rasio dari deret geometri tersebut adalah ....
   a. –5
   b. $-\frac{1}{5}$
   c. $\frac{1}{5}$
   d. $\frac{1}{4}$
   e. 5

18. Suku ke-8 dari barisan geometri 6, 3, $\frac{3}{2}$, ... adalah ....

a. $\frac{1}{128}$

b. $\frac{3}{128}$

c. $\frac{1}{32}$

d. $\frac{3}{64}$

e. $\frac{3}{32}$

19. Suku ke-2 dari suatu barisan geometri adalah 2 dan suku ke-5 adalah 16. Suku ke-8-nya adalah ....

a. 32
b. 64
c. 128
d. 256
e. 512

20. Pada suatu barisan geometri diketahui $U_4 = 27$ dan $U_6 = 243$. Suku pertama (a) dari barisan geometri tersebut adalah ....

a. 1
b. 3
c. 27
d. 54
e. 729

21. Jika diketahui suatu barisan geometri pada suku ke-3 adalah 12 dan suku ke-5 adalah 3 maka barisan geometri tersebut adalah ....

a. 27, 18, 12, 8, $\frac{3}{2}$
b. 27, 18, 12, 8, 3
c. 36, 20, 12, 10, 3
d. 48, 24, 12, 6, 3
e. 48, 24, 12, 6, $\frac{3}{2}$

22. Sebuah deret geometri terdiri atas 8 suku. Jumlah 3 suku pertamanya adalah 210 dan jumlah 3 suku terakhirnya adalah 6. Jumlah dua suku pertama deret tersebut adalah ....

a. 10 d. 60
b. 15 e. 90
c. 30

23. Jumlah dari $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ adalah ....

a. $\frac{1}{2}$
b. 2
c. 4
d. 6
e. 8

24. Diketahui $(a + 2)$, $(a - 1)$, $(a - 7)$, ... membentuk barisan geometri. Rasio dari barisan tersebut adalah ....

a. –2
b. –1
c. 1
d. 2
e. $2\frac{1}{2}$

25. Sebuah bola pingpong dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 2 meter. Setiap kali setelah bola tersebut memantul, ia mencapai ketinggian tiga per empat dari ketinggian yang dicapai sebelumnya. Panjang lintasan bola tersebut sampai berhenti adalah ....

a. 8
b. 10
c. 12
d. 16
e. 32

B. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Suku ke-4 dan suku ke-7 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 17 dan 29. Tentukan suku ke-25 barisan tersebut.
2. Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika ditentukan oleh rumus $S_n = 2n^2 - 6n$. Tentukanlah:
   a. beda dari deret tersebut;
   b. nilai suku ke-5;
   c. jumlah 10 suku pertama.
3. Seorang petani memetik buah cokelat setiap hari dan mencatatnya. Ternyata, banyaknya buah cokelat yang dipetik pada hari ke-n tersebut memenuhi persamaan $U_n = 40 + 5n$. Tentukan jumlah buah cokelat yang telah dipetik selama 30 hari pertama.
4. Suku ke-3 dan ke-5 suatu barisan geometri berturut-turut adalah 8 dan 32. Tentukanlah:
   a. rasio dari barisan geometri tersebut;
   b. nilai suku ke-7 barisan tersebut;
   c. jumlah 10 suku pertama barisan tersebut.
5. Pak Johan melakukan perjalanan dengan sepeda motornya selama lima hari. Jarak tempuhnya dari hari pertama ke hari berikutnya membentuk barisan geometri dengan rasio $\frac{2}{3}$. Jika hari terakhir ia hanya menempuh jarak 16 km, berapa jarak yang sudah Pak Johan tempuh selama lima hari?

Tugas Observasi Semester 2

Anda telah mempelajari materi Barisan dan Deret pada Bab 3. Sekarang, Anda akan menggunakan materi tersebut untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan jurusan Anda.

A. Seni

Sumber: *kotapalembang.blogspot.com*

Kunjungilah perusahaan kerajinan tradisional di daerah Anda yang telah berdiri minimal sepuluh tahun. Kumpulkan data hasil produksi dari sepuluh tahun lalu hingga sekarang sehingga Anda dapat memperkirakan jumlah produksi 10 tahun mendatang. Langkah-langkah yang dapat Anda lakukan sebagai berikut.

1. Kumpulkanlah data hasil produksi dari sepuluh tahun lalu hingga sekarang. Kemudian, tuliskan data-data tersebut seperti pada tabel berikut.

No.	Jenis Kerajinan	Jumlah Produksi				
		1998	1999	2000	...	2008
1.	...					
2.	...					
3.	...					
4.	...					
5.	...					

2. Hitunglah perubahan jumlah produksi setiap tahunnya dan tuliskan pada tabel berikut.

No.	Jenis Kerajinan	Perubahan Jumlah Produksi
1.	...	...
2.	...	...
3.	...	...
4.	...	...
5.	...	...

3. Susunlah jumlah produksi setiap jenis makanan dalam barisan bilangan.
4. Tentukanlah perkiraan hasil produksi 10 tahun mendatang.
5. Kumpulkanlah tugas ini kepada guru Anda.

B. Pariwisata

Sumber: *crut-z.com*

Kunjungilah tempat wisata di daerah Anda. Kumpulkanlah data biaya perawatan tempat wisata tersebut setiap tahunnya dari sepuluh tahun lalu hingga saat ini sehingga Anda dapat menentukan biaya perawatan 10 tahun yang akan datang.

1. Kumpulkan data biaya perawatan tempat wisata setiap tahunnya dari sepuluh tahun lalu hingga saat ini. Tuliskan data tersebut seperti pada tabel berikut.

Tahun	Besar Biaya Perawatan
1998	
1999	
2000	
⋮	
2008	

2. Hitunglah perubahan biaya perawatan setiap tahunnya.
3. Susunlah biaya perawatan setiap tahun dalam barisan bilangan.
4. Tentukanlah perkiraan biaya perawatan tempat wisata 10 tahun yang akan datang.
5. Kumpulkanlah tugas ini kepada guru Anda.

C. Teknologi Kerumahtanggaan

Kunjungilah perusahaan makanan yang telah beroperasi minimal 10 tahun. Kumpulkan data jenis makanan yang diproduksi dan jumlah produksinya setiap tahun dari sepuluh tahun yang lalu. Dengan demikian, Anda dapat menentukan jumlah produksi 10 tahun mendatang.

1. Kumpulkan data hasil produksi sepuluh tahun dari sekarang. Kemudian, tuliskan data-data tersebut seperti pada tabel berikut.

No.	Jenis Makanan	Jumlah Produksi				
		1998	1999	2000	...	2008
1.	...					
2.	...					
3.	...					
4.	...					
5.	...					

2. Hitunglah perubahan jumlah produksi setiap tahunnya dan tuliskan pada tabel berikut.

No.	Jenis Makanan	Perubahan Jumlah Produksi
1.	...	...
2.	...	...
3.	...	...
4.	...	...
5.	...	...

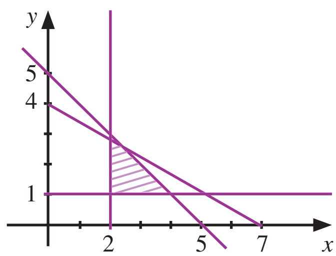
3. Susunlah jumlah produksi setiap jenis makanan dalam barisan bilangan.
4. Tentukanlah, termasuk barisan bilangan apakah soal tersebut.
5. Tentukan rumus U_n nya.
6. Hitunglah jumlah produksi 10 tahun mendatang.
7. Kumpulkanlah tugas yang telah Anda kerjakan kepada guru Anda.

Evaluasi Akhir Tahun

Kerjakan di buku latihan Anda.

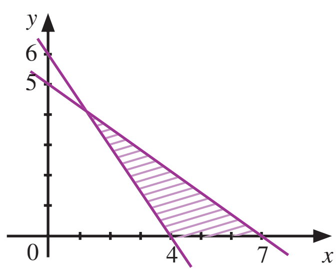
A. Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Sistem pertidaksamaan yang memenuhi daerah yang diarsir pada grafik berikut adalah ....



a. $x + y \le 5$, $4x + 7y \le 28$, $x \ge 2$, $y \ge 1$
b. $x + y \le 5$, $4x + 7y \le 28$, $x \le 2$, $y \le 1$
c. $x + y \ge 5$, $4x + 7y \ge 28$, $x \le 2$, $y \le 1$
d. $x + y \le 5$, $7x + 4y \le 28$, $x \ge 2$, $y \ge 1$
e. $x + y \ge 5$, $7x + 4y \ge 28$, $x \le 2$, $y \le 1$

2. Perhatikan gambar berikut.



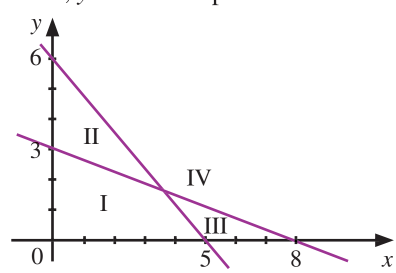
Daerah yang diarsir merupakan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan ....

a. $4x + 6y \le 24$; $5x + 7y \ge 35$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
b. $6x + 4y \le 24$; $5x + 7y \ge 35$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
c. $6x + 4y \le 24$; $5x + 7y \le 35$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
d. $6x + 4y \ge 24$; $5x + 7y \ge 35$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
e. $6x + 4y \ge 24$; $5x + 7y \le 35$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

3. Panitia pentas seni tradisional menjual dua jenis tiket masuk untuk menyaksikan acara tersebut. Jenis pertama, yaitu tiket untuk pelajar yang dijual dengan harga Rp5.000,00. Jenis kedua, yaitu tiket untuk umum dijual dengan harga Rp8.000,00. Ruangan yang digunakan untuk acara tersebut paling banyak memuat 1.000 orang. Panitia telah mengeluarkan uang sebesar Rp2.000.000,00 untuk persiapan acara tersebut. Model matematika untuk permasalahan tersebut adalah ....

a. $5.000x + 8.000y \le 2.000.000$;
$x + y > 1.000$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
b. $5.000x + 8.000y \le 2.000.000$;
$x + y \ge 1.000$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
c. $5.000x + 8.000y \ge 2.000.000$;
$x + y \ge 1.000$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
d. $5.000x + 8.000y \le 2.000.000$;
$x + y \le 1.000$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
e. $5.000x + 8.000y \ge 2.000.000$;
$x + y \le 1.000$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

4. Daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $3x + 8y \ge 24$; $6x + 5y \ge 30$; $x \ge 0$; $y \ge 0$ adalah pada nomor ....

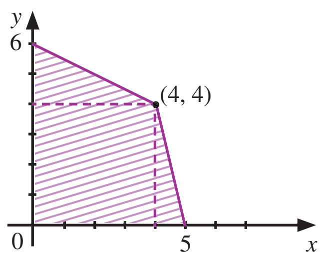


a. I
b. II
c. III
d. IV
e. tidak ada jawaban

5. Seorang pedagang buah mempunyai uang Rp250.000,00. Ia membeli mangga dan jeruk yang masing-masing berharga Rp4.000,00 dan Rp5.000,00 per kg. Buah-buahan tersebut akan dijual menggunakan gerobak yang hanya dapat menampung buah tidak lebih dari 60 kg. Ia mengharapkan mendapat keuntungan dari hasil penjualan mangga dan jeruk tersebut

masing-masing Rp500,00 dan Rp600,00 per kg. Keuntungan maksimum yang dapat diperoleh pedagang tersebut adalah ....
a. Rp30.000,00
b. Rp30.600,00
c. Rp32.000,00
d. Rp34.600,00
e. Rp36.000,00

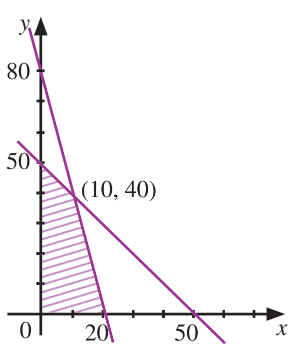
6. Daerah yang diarsir merupakan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear. Nilai maksimum untuk fungsi $P(x, y) = 2x + 3y$ adalah ....



a. 8 **d**. 20
b. 10 **e**. 24
c. 18

Soal UN SMK, 2004

7. Daerah yang diarsir, pada grafik merupakan daerah penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan. Nilai maksimum untuk $z = 7.000x + 8.000y$ adalah ....

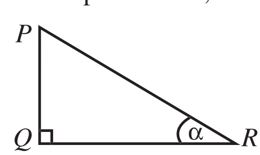


a. 640.000 **d**. 350.000
b. 400.000 **e**. 140.000
c. 390.000

8. Nilai maksimum fungsi $f(x, y) = 25x + 18y$ yang memenuhi sistem persamaan $5x + 9y \leq 45$; $5x - 3y \leq 15$; $x \geq 0$; $y = 0$ adalah ....
a. 260 **d**. 230
b. 250 **e**. 220
c. 240

9. Seorang pengusaha keramik membuat dua jenis keramik, yaitu guci dan lampu duduk. Biaya pembuatan guci sebesar Rp25.000,00 dan dijual dengan keuntungan Rp8.000,00. Biaya pembuatan lampu duduk sebesar Rp30.000,00 dan dijual dengan untung Rp10.000,00. Pengusaha tersebut akan membuat tidak lebih dari 500 keramik. Jika modal yang dimiliki Rp14.000.000,00 maka laba terbesar yang dapat diperoleh pengusaha tersebut adalah ....
a. Rp2.660.000,00
b. Rp2.760.000,00
c. Rp2.860.000,00
d. Rp3.160.000,00
e. Rp3.260.000,00

10. Seorang pengusaha tas rajut membuat dua model tas rajut dari benang wol. Model tas pertama memerlukan 1,5 gulung benang wol warna merah dan 2 gulung benang wol warna hitam. Tas kedua memerlukan 2 gulung benang wol berwarna merah dan 3 gulung benang wol berwarna hitam. Persediaan benang wol berwarna merah yang dimiliki pengusaha sebanyak 120 gulung, sedangkan benang wol warna hitam 165 gulung. Jika pengusaha menjual tas model pertama dengan keuntungan Rp15.000,00 dan tas kedua Rp20.000,00 maka keuntungan maksimum yang dapat diperoleh pengusaha tersebut adalah ....
a. Rp1.000.000,00
b. Rp1.200.000,00
c. Rp1.600.000,00
d. Rp2.400.000,00
e. Rp2.800.000,00

11.


Jika panjang sisi PQ adalah 6 cm dan panjang sisi QR adalah 8 cm maka sin α adalah ....

a. $\frac{5}{3}$
b. $\frac{4}{5}$
c. $\frac{5}{4}$
d. $\frac{3}{4}$
e. $\frac{3}{5}$

12. Nilai trigonometri $(\sin 30^\circ)(\cos 45^\circ)(\tan 60^\circ)$ adalah ....
a. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$
b. $\frac{1}{8}\sqrt{6}$
c. $\frac{1}{8}\sqrt{3}$
d. $\frac{1}{8}\sqrt{2}$
e. $\frac{1}{6}\sqrt{2}$

13. Nilai $\tan -45^\circ + \sin 120^\circ + \cos 225^\circ - \cos 30^\circ$ adalah ....
a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$
b. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
c. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
d. $-1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
e. $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

14. Jika diketahui $\tan \alpha = 1$ dan $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ maka nilai $\sin \alpha + 2 \cos \alpha$ adalah ....
a. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
b. $\sqrt{2}$
c. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$
d. 1
e. $\frac{1}{2}$

15. Nilai $\tan 300^\circ$ sama dengan nilai ....
a. $\tan 30^\circ$
b. $-\tan 30^\circ$
c. $\tan -30^\circ$
d. $\tan 60^\circ$
e. $-\tan 60^\circ$

16. Nilai $\sin 450^\circ$ adalah ....
a. $\frac{1}{3}$
b. $\frac{1}{2}$
c. 1
d. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
e. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

17. Koordinat kutub suatu titik $(4, 45^\circ)$. Koordinat Cartesius titik tersebut adalah ....
a. $(2, 2\sqrt{2})$
b. $(4, 2\sqrt{2})$
c. $(\frac{1}{2}, 2\sqrt{2})$
d. $(2, 2)$
e. $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

Soal UN SMK, 2007

18. Pada segitiga *ABC* diketahui panjang sisi $AB = 8$ cm, $BC = 11$ cm, dan $CA = 5$ cm. Jika α sudut di hadapan sisi *BC* maka nilai $10 \sin \alpha$ adalah ....
a. $-2\sqrt{21}$
b. $-\sqrt{21}$
c. $\frac{1}{2}\sqrt{21}$
d. $\sqrt{21}$
e. $2\sqrt{21}$

Soal SPMB, 2003

19. Dino mengecat tembok dengan menggunakan tangga. Sudut yang dibentuk antara tangga dan tembok adalah 30°. Jika panjang tangga 2 m, jarak kaki tangga ke tembok adalah ....
a. 5 m
b. $\frac{5}{3}\sqrt{3}$ m
c. $\frac{5}{3}$ m
d. $\frac{5}{2}$ m
e. $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ m

20. Diagonal bujur sangkar *ABCD* yang sisi-sisinya $4a$ berpotongan di titik *S*. Jika *T* titik tengah ruas garis *SC* maka $\sin \angle TBS$ adalah ....
a. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
b. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
c. $\frac{1}{6}\sqrt{6}$
d. $\frac{1}{7}\sqrt{7}$
e. $\frac{1}{10}\sqrt{10}$

Soal SPMB, 2002

21. Suku ke-n suatu barisan bilangan dirumuskan dengan $U_n = 3 - 5n$. Salah satu suku barisan tersebut adalah -72 yang terletak pada suku ke ....
a. 15
b. 25
c. 70
d. 357
e. 363

22. Diketahui barisan aritmetika suku kelima 21 dan suku kesepuluh 41. Suku kelima puluh barisan aritmetika tersebut adalah ....
   a. 197
   b. 198
   c. 199
   d. 200
   e. 201

Soal UN SMK, 2004

23. Suatu barisan aritmetika diketahui $U_5 = 33$ dan $U_2 = 12$. Nilai U_3 dari barisan tersebut adalah ....
   a. 18
   b. 19
   c. 20
   d. 21
   e. 22

24. Diketahui jumlah deret tak hingga = $156\frac{1}{4}$. Jika suku pertama = 125 maka rasionya adalah ....
   a. $\frac{1}{3}$
   b. $\frac{1}{4}$
   c. $\frac{1}{5}$
   d. $\frac{1}{6}$
   e. $\frac{1}{7}$

Soal UN SMK, 2006

25. Suku pertama dan suku keempat suatu barisan geometri masing-masing –2 dan 54. Jumlah 6 suku pertama dari barisan tersebut adalah ....
   a. 468
   b. 365
   c. –365
   d. –486
   e. –1458

26. Diketahui barisan geometri dengan suku pertama adalah 4 dan suku kelima adalah 324. Jumlah delapan suku pertama deret tersebut adalah ....
   a. 6.560
   b. 6.562
   c. 13.120
   d. 13.122
   e. 13.124

Soal UN SMK, 2003

27. Suatu barisan aritmetika suku ketiga = 16 dan suku keenam = 7. Suku kedelapannya adalah ....
   a. 1
   b. 10
   c. 22
   d. 64
   e. 92

Soal UN SMK, 2006

28. Jika suatu barisan geometri diketahui suku ke-2 nya adalah 2, sedangkan suku ke-6 = $\frac{1}{8}$. Perbandingan positif barisan geometri tersebut adalah ....
   a. $-\frac{1}{4}$
   b. $-\frac{1}{2}$
   c. 2
   d. $\frac{1}{4}$
   e. $\frac{1}{2}$

29. Seorang pemilik toko pakaian mencatat banyaknya pakaian yang terjual setiap harinya. Banyaknya pakaian yang terjual pada hari ke-n tersebut memenuhi persamaan $U_n = 2n + 3$. Jumlah pakaian yang terjual selama 20 hari pertama adalah ....
   a. 47
   b. 46
   c. 45
   d. 44
   e. 43

30. Setiap bulan gaji Pak Anto dinaikkan 10% dari gaji pokok. Jika gaji pokoknya adalah Rp450.000,00, dan gaji pertama Pak Anto sebesar Rp500.000,00 maka besar gaji Pak Anto pada bulan ke-12 adalah ....
   a. Rp440.000,00
   b. Rp900.000,00
   c. Rp950.000,00
   d. Rp980.000,00
   e. Rp995.000,00

B. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Seorang penjahit akan membuat dua jenis jaket, yaitu jaket *A* dan jaket *B*. Kedua jaket tersebut memerlukan dua bahan kain, yaitu kain katun dan kain parasut. Persediaan kain katun 20 meter dan kain parasut 60 meter. Setiap jaket *A* memerlukan kain katun dan kain parasut berturut-turut 1 meter dan 1,5 meter. Adapun setiap jaket *B* dibutuhkan 0,25 meter kain katun dan 2 meter kain parasut. Keuntungan dari jaket *A* dan jaket *B* masing-masing Rp100.000,00 dan Rp50.000,00. Buatlah model matematika dari masalah di atas untuk mendapatkan keuntungan maksimum.
2. Seorang penjual buah-buahan menggunakan gerobak untuk menjual jeruk dan mangga. Harga pembelian jeruk Rp5.000/kg dan mangga Rp6.000/kg. Modal yang tersedia adalah Rp600.000,00. Harga penjualan jeruk Rp6.500/kg dan mangga Rp8.000/kg. Jika gerobaknya hanya dapat memuat 110 kg jeruk dan mangga maka berapakah laba maksimum yang dapat diperoleh penjual tersebut?
3. Sebuah kereta api mempunyai kapasitas tempat duduk 48 kursi dalam satu gerbong. Setiap penumpang kelas utama boleh mendapat jatah bagasi 60 kg, sedangkan kelas ekonomi mendapat jatah bagasi 20 kg. Kapasitas bagasi kereta api 1.440 kg. Harga tiket kelas utama Rp150.000,00 dan kelas ekonomi Rp100.000,00. Supaya pendapatan dari penjualan tiket pada saat kereta penuh mencapai maksimum, berapakah jumlah tempat duduk untuk kelas utama?
4. Seorang pemilik toko sepatu ingin mengisi tokonya dengan sepatu laki-laki paling sedikit 100 pasang dan sepatu wanita paling sedikit 150 pasang. Toko tersebut dapat memuat 400 pasang sepatu. Keuntungan setiap pasang sepatu laki-laki Rp1.000,00 dan setiap pasang sepatu wanita Rp500,00. Jika banyaknya sepatu laki-laki tidak boleh melebihi 150 pasang maka berapakah keuntungan terbesar yang akan diperoleh oleh pemilik toko tersebut?
5. Tentukan nilai dari
$$\frac{\sin 30^\circ + \cos 330^\circ + \sin 150^\circ}{\tan 45^\circ + \cos 210^\circ}$$
6. Sebuah segitiga *ABC* diketahui panjang sisi $b = 6$ cm, panjang sisi $c = 8$ cm, dan besar sudut $A = 60^\circ$. Berapakah luas segitiga *ABC*?
7. Kota Cirebon terletak 200 km sebelah Utara kota Tasikmalaya dan kota Bandung terletak 150 km Barat Laut kota Tasikmalaya. Berapakah jarak antara kota Bandung dan kota Cirebon?
8. Suatu perusahaan katering pada tahun pertama melayani 5.000 pelanggan. Pada tahun-tahun berikutnya pelanggan turun secara tetap sebesar 80 orang per tahun. Pada tahun berapakah perusahaan tersebut melayani 3.000 pelanggan?
9. Keuntungan seorang pedagang kue bertambah setiap bulan dengan jumlah yang sama. Jika keuntungan sampai bulan keempat 30 ribu rupiah, dan sampai bulan kedelapan 172 ribu rupiah maka berapakah keuntungan sampai bulan ke-18?
10. Jumlah penduduk sebuah kota setiap 10 tahun berubah menjadi 2 kali lipatnya. Berdasarkan perhitungan, pada tahun 2020 nanti akan mencapai 64 juta orang. Tentukan berapakah jumlah penduduk kota tersebut pada tahun 1980.

Kunci Jawaban

Bab 1

Evaluasi Materi Bab 1

A.	**1.**	e	**11.**	c
	3.	d	**13.**	c
	5.	d	**15.**	e
	7.	a	**17.**	c
	9.	b	**19.**	b

B. **1.** 450

3. Rp67.500,00

5. Rp135.000,00

Bab 2

Evaluasi Materi Bab 2

A.	**1.**	c	**11.**	d
	3.	a	**13.**	a
	5.	d	**15.**	b
	7.	b	**17.**	d
	9.	c	**19.**	a

B. **1.** 8,66 m

3. $P(3\sqrt{2}, 45^\circ)$

$Q(2, 330^\circ)$

$R(4, 120^\circ)$

5. $\angle B = 105^\circ$

$AC = 6{,}833$ cm

$BC = 3{,}54$ cm

$L = 8{,}54$ cm^2

Evaluasi Semester I

A.	**1.**	a	**15.**	d
	3.	d	**17.**	e
	5.	b	**19.**	b
	7.	d	**21.**	b
	9.	d	**23.**	d
	11.	d	**25.**	d
	13.	d		

B. **3.** $\left(-\frac{6}{7}, \frac{16}{7}\right)$

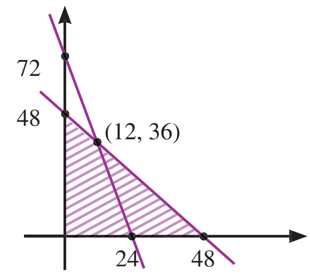
5. **a.** $x + y \le 48$

$3x + y \le 72$

$x \ge 0$

$y \ge 0$

b.



7. **a.** $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

b. $-\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

c. $-\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

9. $4\sqrt{2}$ cm

Bab 3

Evaluasi Materi Bab 3

A.	**1.**	c	**11.**	a
	3.	c	**13.**	b
	5.	c	**15.**	b
	7.	b	**17.**	d
	9.	d	**19.**	e

B. **1.** **a.** 1.065

b. 56

c. –390

3. **a.** 9

b. 1/2

5. 211

Evaluasi Semester 2

A.	**1.**	c	**15.**	e
	3.	c	**17.**	c
	5.	d	**19.**	c
	7.	b	**21.**	d
	9.	d	**23.**	b
	11.	c	**25.**	a
	13.	c		

B. **1.** 101

3. 3.525

5. 211

Evaluasi Akhir Tahun

A.	**1.**	a	**11.**	e	**21.**	a
	3.	d	**13.**	d	**23.**	b
	5.	c	**15.**	b	**25.**	c
	7.	c	**17.**	e	**27.**	a
	9.	d	**19.**	d	**29.**	e

B. **1.** maksimum $f(x, y) = 100.000x + 50.000y$

kendala

$x + 0,25y \leq 20$ atau $4x + y \leq 20$

$1,5x + 2y \leq 60$ atau $3x + 4y \leq 120$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

3. 12 kursi

5. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

7. 141,68 km

9. Rp1.017.000,00

Daftar Istilah

A

Absis: titik yang terletak pada sumbu mendatar koordinat Cartesius • 69

B

Barisan aritmetika: barisan bilangan yang selisih (beda) antara setiap dua suku yang berurutan selalu merupakan bilangan tetap • 109

Barisan bilangan: sekumpulan bilangan yang tersusun menurut pola tertentu • 117

Barisan geometri: barisan bilangan yang perbandingan (rasio = r) antara dua suku yang berurutan selalu tetap • 117

Beda: selisih antara dua suku yang berurutan pada barisan aritmetika • 104

D

Deret aritmetika: jumlah suku-suku pada barisan aritmetika • 107

Deret bilangan: jumlah suku-suku pada barisan bilangan • 99

Deret geometri: jumlah suku-suku pada barisan geometri • 123

Deret geometri tak hingga: deret geometri dengan banyaknya suku tak hingga • 123

G

Grafik Cartesius: salah satu bentuk penyajian data yang dinyatakan dalam koordinat Cartesius • 3

H

Hipotenusa: sisi segitiga siku-siku yang terletak di depan sudut siku-siku, merupakan sisi terpanjang dalam segitga siku-siku • 35

K

Koordinat: perpotongan antara sumbu vertikal dan sumbu horizontal yang saling tegak • 3

Kuadran: seperempat bagian bidang datar yang dibagi oleh sumbu koordinat dalam sistem koordinat Cartesius siku-siku x o y • 45

M

Model matematika: penerjemahan masalah sehari-hari ke dalam kalimat matematika • 9

O

Ordinat: titik yang terletak pada sumbu tegak koordinat cartesius • 69

P

Program linear: metode penyelesaian masalah dengan mengoptimalkan fungsi objektif • 1

Pola bilangan: urutan bilangan-bilangan yang mengikuti aturan tertentu • 99

R

Rasio: perbandingan dua suku yang berurutan pada barisan geometri • 104

S

Segitiga: bangun yang dibentuk dari tiga garis lurus dihubungkan oleh tiga buah titik tak segaris • 35

Segitiga sebarang: segitiga yang tidak mempunyai sepasang sisi sama panjang, ketiga sisinya tidak sama panjang • 73

Segitiga siku-siku: segitiga yang salah satu sudutnya merupakan sudut siku-siku • 35

Suku barisan: unsur bilangan yang tersusun • 104

Indeks

Lampiran

Tabel Cosinus

a°	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.9999	.9999	.9999	.9999
1	.9998	.9998	.9998	.9997	.9997	.9997	.9996	.9996	.9996	.9996
2	.9994	.9993	.9993	.9992	.9991	.9990	.9990	.9989	.9988	.9987
3	.9986	.9985	.9984	.9983	.9982	.9981	.9980	.9979	.9978	.9977
4	.9976	.9974	.9973	.9972	.9971	.9969	.9968	.9966	.9965	.9963
5	.9962	.9960	.9959	.9957	.9956	.9954	.9952	.9951	.9949	.9947
6	.9945	.9943	.9942	.9940	.9938	.9936	.9934	.9932	.9930	.9928
7	.9925	.9923	.9921	.9919	.9917	.9914	.9912	.9910	.9907	.9905
8	.9903	.9900	.9898	.9895	.9893	.9890	.9888	.9885	.9882	.9880
10	.9977	.9974	.9871	.9869	.9866	.9863	.9860	.9857	.9854	.9851
10	.9977	.9974	.9871	.9869	.9866	.9863	.9860	.9857	.9854	.9851
11	.9816	.9813	.9810	.9806	.9803	.9799	.9796	.9792	.9789	.9785
12	.9781	.9778	.9774	.9770	.9767	.9763	.9759	.9755	.9751	.9748
13	.9744	.9740	.9736	.9732	.9728	.9724	.9720	.9715	.9711	.9707
14	.9703	.9699	.9694	.9690	.9686	.9681	.9677	.9673	.9668	.9664
15	.9659	.9655	.9650	.9646	.9641	.9636	.9632	.9627	.9622	.9617
16	.9613	.9608	.9603	.9598	.9593	.9588	.9583	.9578	.9573	.9568
17	.9563	.9558	.9553	.9548	.9542	.9537	.9532	.9527	.9521	.9516
18	.9511	.9505	.9500	.9494	.9489	.9483	.9478	.9472	.9466	.9461
19	.9455	.9449	.9444	.9438	.9432	.9426	.9421	.9415	.9409	.9403
20	.9397	.9391	.9385	.9379	.9473	.9367	.9361	.9354	.9348	.9342
21	.9336	.9330	.9323	.9317	.9311	.9304	.9298	.9291	.9285	.9278
22	.9272	.9265	.9259	.9525	.9245	.9239	.9232	.9225	.9219	.9212
23	.9205	.9198	.9191	.9184	.9178	.9171	.9164	.9157	.9150	.9143
24	.9135	.9128	.9121	.9114	.9107	.9100	.9092	.9085	.9078	.9070
25	.9063	.9056	.9048	.9041	.9033	.9026	.9018	.9011	.9003	.8996
26	.8988	.8980	.8973	.8965	.8957	.8949	.8942	.8934	.8926	.8918
27	.8910	.8902	.8894	.8886	.8878	.8870	.8862	.8854	.8846	.8838
28	.8829	.8821	.8813	.8805	.8796	.8788	.8780	.8771	.8763	.8755
29	.8746	.8738	.8729	.8721	.8712	.8704	.8695	.8686	.8678	.8669
30	.8660	.8652	.8643	.8634	.8625	.8616	.8607	.8599	.8500	.8581
31	.8572	.8563	.8554	.8545	.8536	.8526	.8517	.8508	.8499	.8490
32	.8480	.8471	.8462	.8453	.8443	.8434	.8425	.8415	.8406	.8396
33	.8387	.8377	.8368	.8358	.8348	.8339	.8329	.8320	.8310	.8300
34	.8290	.8281	.8271	.8261	.8251	.8241	.8231	.8221	.8211	.8202
35	.8192	.8181	.8171	.8161	.8151	.8141	.8131	.8121	.8111	.8100

36	.8090	.8080	.8070	.8059	.8149	.8039	.8028	.8018	.8007	.8997
37	.7986	.7976	.7965	.7955	.7944	.7934	.7923	.7912	.7902	.8891
38	.7880	.7869	.7859	.7848	.7837	.7826	.7815	.7804	.7793	.8782
39	.7771	.7760	.7749	.7738	.7727	.7716	.7705	.7694	.7683	.8672
40	.7660	.7649	.7638	.7627	.7615	.7604	.7593	.7581	.7670	.8559
41	.7547	.7536	.7524	.7513	.7501	.7490	.7478	.7466	.7455	.8443
42	.7431	.7420	.7408	.7396	.7385	.7373	.7361	.7349	.7337	.8325
43	.7314	.7302	.7290	.7278	.7266	.7254	.7242	.7230	.7218	.8206
44	.7193	.7181	.7169	.7157	.7145	.7133	.7120	.7108	.7096	.8083
45	.7071	.7059	.7046	.7034	.7022	.7009	.6997	.6984	.6972	.6959

Tabel Sinus

a°	**0.0**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
0	.0000	.0017	.0035	.0052	.0070	.0087	.0105	.0122	.0140	.0157
1	.0175	.0192	.0209	.0227	.0244	.0262	.0279	.0297	.0314	.0332
2	.0349	.0366	.0384	.0401	.0419	.0436	.0454	.0471	.0488	.0506
3	.0523	.0541	.0558	.0576	.0593	.0610	.0628	.0645	.0663	.0680
4	.0698	.0715	.0732	.0750	.0767	.0785	.0802	.0819	.0837	.0854
5	.0872	.0889	.0906	.0924	.0941	.0958	.0976	.0993	.1011	.1028
6	.1045	.1063	1080	.1924	.1115	.1132	.1149	.1167	.1184	.1201
7	.1219	.1236	.1253	.1097	.1288	.1305	.1323	.1340	.1357	.1374
8	.1392	.1409	.1426	.1444	.1461	.1478	.1495	.1513	.1532	.1547
9	.1564	.1582	.1599	.1616	.1633	.1650	.1668	.1685	.1702	.1719
10	.1736	.1754	.1771	.1788	.1805	.1822	.1840	.1857	.1874	.1891
11	.1908	.1925	.1942	.1959	.1977	.1994	.2011	.2028	.2045	.2062
12	.2079	.2006	.2113	.2130	.2147	.204	.2181	.2198	.2215	.2232
13	.2250	.2267	.2284	.2300	.2317	.2334	.2351	.2368	.2385	.2402
14	.2419	.2436	.2453	.2470	.2487	.2504	.2521	.2538	.2554	.2571
15	.2588	.2605	.2622	.2639	.2656	.2672	.2689	.2706	.2723	.2740
16	.2756	.2773	.2790	.2807	.2823	.2840	.2857	.2874	.2890	.2907
17	.2924	.2940	.2957	.2974	.2990	.3007	.3024	.3040	.3057	.3074
18	.3090	.3107	.3123	.3140	.3156	.3173	.3190	.3206	.3223	3239
19	.3256	.3272	.3289	.3305	.3322	.3338	.3355	.3371	.3387	.3404
20	.3420	.3437	.3453	.3469	.3486	.3502	.398	.3535	.3551	.3567
21	.3584	.3600	.3616	.3633	.3649	.3665	.3681	.3697	.3714	.3730
22	.3746	.3762	.3778	.3795	.3811	.3827	.3843	.3859	.3875	.3891
23	.3907	.3923	.3939	.3955	.3971	.3987	.4003	.4019	.4035	.4051
24	.3067	.4083	.4099	.4115	.4131	.4147	.4163	.4179	.4195	.4210
25	.4226	.4242	.4258	.4274	.4289	.4305	.4321	.4337	.4352	.4368
26	.4384	.4399	.4415	.4431	.4446	.4462	.4478	.4493	.4509	.4524
27	.4540	.4555	.4571	.4586	.4602	.4617	.4633	.4648	.4664	.4679

28	.4695	.4710	.4726	.4741	.4756	.4772	.4787	.4802	.4818	.4833
29	.4848	.4863	.4879	.4894	.4909	.4924	.4939	.4955	.4970	.4985
30	.5000	.5015	.5030	.5045	.5060	.5075	.5090	.5105	.5120	.5135
31	.5150	.5165	.5180	.5195	.5210	.5225	.5240	.5255	.5270	.5284
32	.5299	.5314	.5329	.5344	.5358	.5373	.5388	..5402	.5417	.5432
33	.5446	.5461	.5476	.5490	.5505	.5519	.5534	.5548	.5563	.5577
34	.5592	.5606	.5621	.5635	.5650	.5664	.5678	.5693	.5707	.5721
35	.5736	.5750	.5764	.5779	.5793	.5807	.5821	.5835	.5850	.5864
36	.5878	.5892	.5906	.5920	.5934	.5948	.5962	.5976	.5990	.6004
37	.6018	.6032	.6046	.6060	.6074	.6088	.6101	.6115	.6129	.6143
38	.6157	.6170	.6184	.6198	.6211	.6225	.6239	.6252	.6266	.6280
39	.6293	.6307	.6320	.6334	.6347	.6361	.6374	.6388	.6401	.6414
40	.6428	.6441	.6455	.6481	.6481	.6494	.6508	.6521	.6534	.6547
41	.6561	.6574	.6600	.6613	.6613	.6626	.6639	.6652	.6665	.6678
42	.6691	.6704	.6730	.6743	.6743	.6756	.6756	.6782	.6794	.6807
43	.6820	.6833	.6858	.6871	.6871	.6884	.6884	.6909	.6921	.6934
44	.6947	.6959	.6984	.6997	.6997	.7009	.6009	.6034	.6046	.6059
45	.7071	.7083	.7096	.7108	.7120	.7133	.7145	.7157	.7169	.7181

Tabel Tangen

α°	**0.0**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
0	.0000	.0017	.0035	.0052	.0070	.0087	.0105	.0122	.0140	.0157
1	.0175	.0192	.0209	.0227	.0244	.0262	.0279	.0297	.0314	.0332
2	.0349	.0367	.0384	.0402	.0419	.0437	.0454	.0472	.0489	.0506
3	.0524	.0542	.0559	.0577	.0594	.0612	.0629	.0647	.0664	.0682
4	.0699	.0717	.0734	.0752	.0769	.0785	.0805	.0822	.0840	.0857
5	.0875	.0892	.0910	.0928	.0945	.0963	.0981	.0998	.1016	.1033
6	.1051	.1069	.1086	.1104	.1122	.1139	.1157	.1175	.1192	.1210
7	.1228	.1246	.1263	.1281	.1299	.1317	.1334	.1352	.1370	.1388
8	.1484	.1423	.1441	.1459	.1477	.1495	.1512	.1530	.1548	.1566
9	.1584	.162	.1620	.1638	.1655	.1673	.1691	.1709	.1727	.1745
10	.1763	.1781	.1799	.1817	.1835	.1853	.1871	.1890	.1808	.1826
11	.1944	.1962	.1980	.1998	.1977	.2035	.2053	.2071	.2089	.2107
12	.2126	.2144	.2162	.2180	.2199	.2217	.2235	.2254	.2272	.2290
13	.2309	.2327	.2345	.2364	.2382	.2401	.2419	.2438	.2456	.2475
14	.2493	.2512	.2530	.2549	.2568	.2586	.2605	.2623	.2642	.2661
15	.2679	.2698	.2717	.2736	.2754	.2773	.2792	.2811	.2830	.2849
16	.2864	.2886	.2905	.2924	.2943	.2962	.2981	.3000	.3019	.3038
17	.3057	.3076	.3096	.3115	.3134	.3153	.3172	.3191	.3211	.3230
18	.3247	.3269	.3288	.3307	.3327	.3346	.3365	.3385	.3404	.3424
19	.3443	.3463	.3482	.3502	.3522	.3541	.3561	.3581	.3600	.3620

20	.3640	.3659	.3679	.3699	.3719	.3739	.3759	.3779	.3799	.3819
21	.3839	.3859	.3879	.3899	.3919	.3939	.3959	.3979	.4000	.4020
22	.4040	.4061	.4081	.4101	.4122	.4142	.063	.4183	.4204	.4224
23	.4245	.4263	.4286	.4307	.4327	.4348	.4369	.4390	.4411	.4431
24	.4452	.4473	.4494	.4515	.4436	.4557	.4578	.4599	.4621	.4642
25	.4663	.4684	.4706	.4727	.4748	.4770	.4791	.4813	.4834	.4856
26	.4877	.4899	.4921	.4942	.4964	.4986	.5008	.5029	.5051	.5073
27	.5095	.5117	.5139	.5161	.5184	.5206	.5228	.5250	.5272	.5295
28	.5317	.5340	.5362	.5384	.5430	.5430	.5452	.5475	.5498	.5520
29	.5543	.5566	.5589	.5612	.5635	.5658	.5681	.5704	.5727	.5750
30	.5774	.5797	.5820	.5844	.5867	.5890	.5914	.5938	.5961	.5985
31	.6009	.6032	.6056	.6080	.6104	.6128	.6152	.6176	.6200	.6224
32	.6249	.6273	.6297	.6322	.6346	.6371	.6395	.6420	.6445	.6469
33	.6494	.6519	.6544	.6569	.6594	.6619	.6644	.6669	.6694	.6720
34	.6745	.6771	.6796	.6822	.6847	.6873	.6899	.6924	.6950	6976
35	.7002	.7028	.7054	.7080	.7107	.7133	.7159	.7186	.7212	.7239
36	.7265	.7292	.7319	.7346	.7373	.7400	.7427	.7454	.7481	.7508
37	.7536	.7563	.7590	.7618	.7646	.7673	.7701	.7729	.7757	.7785
38	.7813	.7841	.7869	.7898	.7926	.7954	.7983	.8012	.8040	.8009
39	.8008	.8127	.8156	.8185	.8214	.8243	.8273	.8302	.8332	.8361
40	.8391	.8421	.8451	.8481	.8511	.8541	.8571	.8601	.8632	.8662
41	.8693	.8724	.8754	.8785	.8816	.8847	.8878	.8910	.8632	.8972
42	.9004	.9036	.9067	.9099	.9131	.9163	.9195	.9228	.9260	.9293
43	.9325	.9348	.9391	.9424	.9457	.9490	.9523	.9556	.9590	.9623
44	.9657	.9691	.9725	.9759	.97931	.9827	.9861	.9896	.9930	.9965
45	1.0000	.0035	.0070	.0105	.0141	.0176	.0212	.0247	.0283	.0319

Daftar Simbol

$\sum_{k=1}^{n} k$	: jumlah k bilangan untuk k = 1 sampai dengan n
$z = f(x, y)$	: fungsi objektif
U_n	: suku ke-n dari suatu barisan aritmetika
S_n	: jumlah n suku pertama dari barisan aritmetika
Δ	: segitiga
$\angle$	: sudut
$<$	: kurang dari
$\leq$	: kurang dari atau sama dengan
$>$	: lebih dari
$\geq$	: lebih dari atau sama dengan
$\sqrt{\ }$	: akar pangkat
$^\circ$	: derajat

Daftar Pustaka

Badan Standar Nasional Pendidikan. 2006. *Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar 2006 Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Kejuruan*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Departemen Pendidikan Nasional. *Soal-soal Ujian Akhir Nasioanal (UAN) Tahun 2001 Sampai dengan Tahun 2003*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Departemen Pendidikan Nasional. *Soal-Soal Ujian Nasional (UN) tahun 2004 sampai dengan Tahun 2006*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Departemen Pendidikan Nasional. *Soal-Soal Ujian Nasional (UN) SMK tahun 2004 sampai dengan Tahun 2006*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Negoro, ST dan B. Harahap, 2003. *Ensiklopedi Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Purcell, E. dan D. Varberg. 2002. *Kalkulus dan Geometri Analitis* (*Alih Bahasa*) *Jilid 1 dan 2*. Jakarta: Erlangga.

Sembiring, Suwah. 2002. *Olimpiade Matematika*. Bandung: Yrama Widya.

Sukarman, Herry. 2002. *Trigonometri*. Yogyakarta: Widyaiswara PPPG Matematika.

Setya Budhi, Wono. 2003. *Model Buku Pelajaran Matematika SMA Panduan Pengembangan*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

Winarno. 2000. *Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar*. Bandung: Yrama Widya

Sumber Lain

en.wikipedia.org

id.wikipedia.org

math.unipa.it

ISBN 979-462-940-5

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008 Tanggal 10 Juli 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

HET (Harga Eceran Tertinggi) Rp. 10.140,-