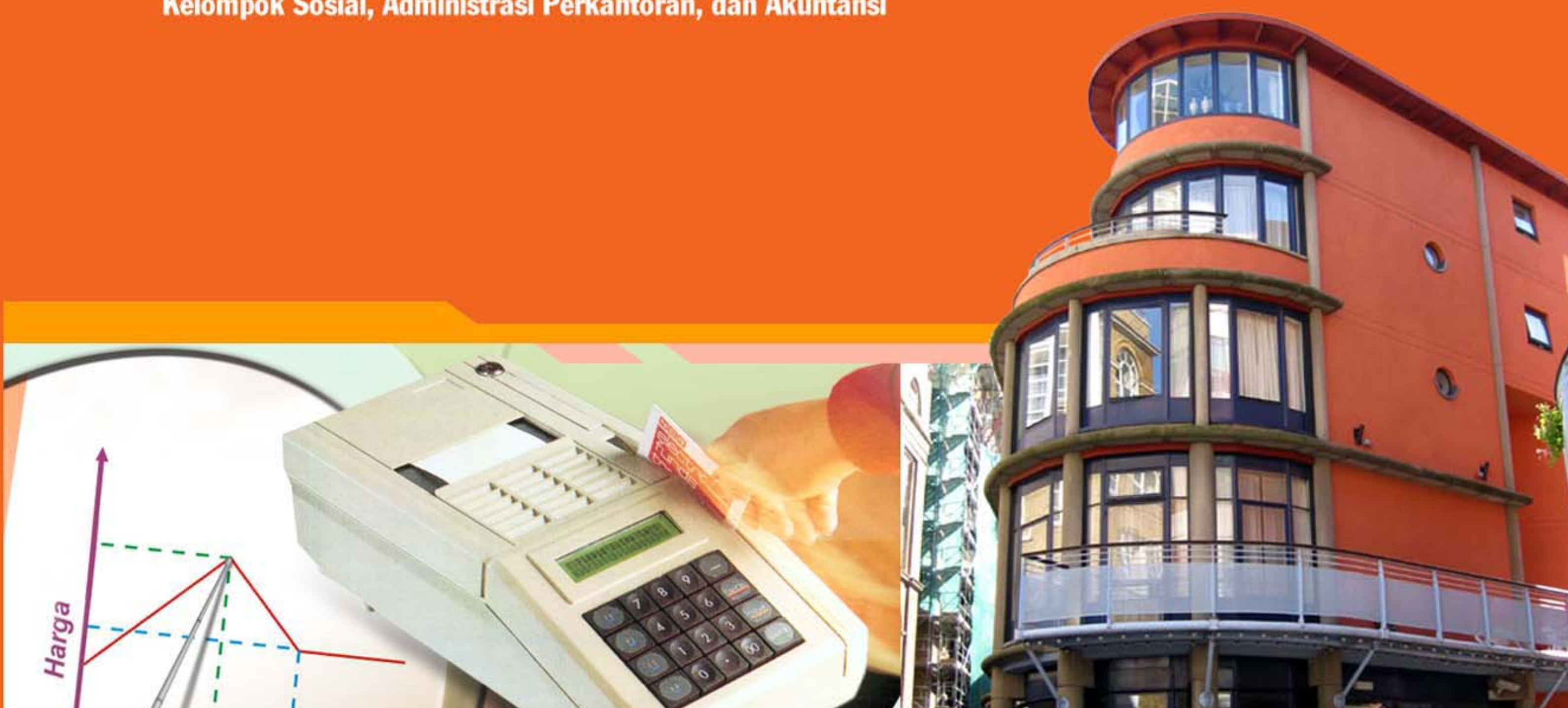
• Agus Irawati • Erens Sarindat • Pratikno • Bayan Ardana W.

Mahir Matematika

untuk SMK (NonTeknik) Kelas XI

Kelompok Sosial, Administrasi Perkantoran, dan Akuntansi



2

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Mahir Matematika 2
untuk SMK (NonTeknik) Kelas XI
• Agus Irawati • Erens Sarindat • Pratikno • Bayan Ardana W.

Agus Irawati • Erens Sarindat • Pratikno • Bayan Ardana W.

BUKU SEKOLAH bse ELEKTRONIK

Mahir Matematika

untuk SMK (NonTeknik) Kelas XI

Kelompok Sosial, Administrasi Perkantoran, dan Akuntansi

2

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

MAHIR
MATEMATIKA 2

Untuk SMK/MAK Kelas XI

Penulis : Agus Irawati
Erens Sarindat
Pratikno
Bayan Ardana W
Editor : Dian Pramani dan Suharyati
Ilustrasi, Tata Letak : Herman Sriwijaya, Dian Pramani
Perancang Kulit : Oric Nugroho Jati
Sumber Gambar Kulit : Joanna Askey-2004, Oxford Ensiklopedia Pelajar, dan dokumen penerbit

Ukuran Buku : 21 x 29 cm

510.07
MAH Mahir matematika 2 : untuk SMK (Non teknik) Kelas XI Kelompok Sosial, Administrasi Perkantoran, dan Akuntansi/Agus Irawati..[et.al.]; editor Dian Pramani, Suharyati. — Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2008.
vi, 112 hlm. ; ilus. ; 29 Cm.

Bibliografi : hlm.107
Indeks
ISBN 979-462-885-9

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul II. Irawati, Agus
III. Oramani, Dian IV. Suharyati

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

Diperbanyak oleh ...

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2008, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juli 2008
Kepala Pusat Perbukuan

Kata Pengantar

Ada pendapat bahwa tanpa harus belajar matematika secara khusus pun orang bisa sukses dalam usahanya. Contohnya, seorang pedagang di kampung, pengusaha kerajinan, atau tukang bangunan yang tidak pernah sekolah, tetapi usahanya berjalan lancar. *Benarkah pendapat demikian*?

Dalam kehidupan yang semakin modern, manusia tidak hanya ingin memenuhi kebutuhan primernya, tetapi juga kebutuhan-kebutuhan sekunder dan tersiernya. Hal itu menuntut konsekuensi usaha lebih keras untuk mendapatkan pemasukan lebih besar. Belum lagi, munculnya pesaing-pesaing baru, baik dalam usaha maupun bidang keahli-annya, memaksa manusia berkompetisi, jika tidak ingin tersisih. Jelas, semua itu memer-lukan suatu pengetahuan dan keterampilan. Karena itulah, muncul ilmu akuntansi, mana-jemen, teknik, dan sebagainya. Namun sebenarnya, matematikalah yang mendasari dan membantu konsep-konsep dalam ilmu-ilmu tersebut.

Didasari hal itulah, kami ingin membantu menyajikan konsep-konsep matematika yang berhubungan dengan ilmu-ilmu yang dipelajari oleh siswa-siswa SMK. Kurikulum Sekolah Menengah Kejuruan (SMK) dikembangkan sebagai upaya untuk memenuhi kebutuhan pengembangan program sekolah berbasis kebutuhan dan potensi wilayah. Strategi ini merupakan upaya meningkatkan peran SMK dalam pengembangan wilayah melalui peningkatan kualitas sumber daya manusia profesional dan produktif, sehingga program sekolah mampu mengakar kuat pada masyarakat. Penyelenggaraan proses pemelajaran dilaksanakan melalui pendekatan belajar tuntas/*Mastery Learning*, berorientasi pada kegiatan siswa/*Student Centered Learning*, dan berbasis produksi/*Production Based Training* (PBT).

Mahir Matematika SMK (nonteknik) Kelas XI disusun sesuai dengan standar isi untuk mengarahkan bagaimana siswa belajar menguasai standar kompetensi Logika Matematika, Fungsi, Barisan dan Deret, serta Geometri Dimensi Dua agar tujuan pemelajaran dapat tercapai. Setiap materi, kami bahas mulai dari konsep dasar, penurunan rumus, kemudian aplikasinya dalam bentuk contoh soal, latihan, dan dilengkapi dengan lembar tugas. Di akhir standar kompetensi, kami juga memberikan lembar kerja siswa untuk mengukur seberapa besar standar kompetensi yang telah dikuasai siswa. Semua ini bertujuan agar pemakai buku matematika ini tidak hanya mengambil rumus jadi, lalu menerapkannya pada soal-soal hitungan, tetapi memahami mengapa, kapan, dan bagaimana rumus itu digunakan.

Selain memahami konsep, terampil dalam menyelesaikan soal-soal hitungan juga sangat diharapkan. Itulah ciri yang khas dari tujuan pemelajaran matematika. Soal-soal kami susun menurut tingkat kesulitannya, agar siswa dapat mengukur sendiri tingkat pemahamannya terhadap materi yang diajarkan. Keberhasilan pemelajaran ditandai de-ngan adanya perubahan perilaku positif pada diri siswa sesuai standar kompetensi dan tujuan pendidikan, serta siswa sudah mampu menguasai standar kompetensi yang ada.

Kami mengharapkan buku matematka ini benar-benar dapat menjadi rujukan bagi siswa dalam mempelajari konsep matematika serta menjadi alat bantu yang efektif dalam menyelesaikan berbagai persoalan.

Tersedianya mahir matematika SMK ini tidak lepas dari adanya kerjasama yang baik dari berbagai pihak. Untuk itu, kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan kontribusi, baik moril maupun materiil. Akhirnya, seperti kata pepatah: tiada gading yang tak retak, kami mengharapkan saran dan kritik yang konstruktif demi kesempurnaan buku ini di waktu yang akan datang.

Jakarta, Januari 2008

Tim Penulis

Daftar Isi

Bab 1 Logika Matematika

Bab 2 Fungsi

Bab 3 Barisan dan Deret

Bab 4 Geometri Dimensi Dua

Bab 1

Logika Matematika

Kelas XI

Sumber : www.google.com

Logika matematika banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari, sebagai contoh adalah dalam menyimpulkan atau mengambil suatu keputusan baik dalam dunia bisnis, teknologi maupun dalam dunia pemerintahan. Pada gambar di samping tampak gambar laptop (*Notebook*). Tahukah Anda, prinsip logika matematika juga diterapkan dalam proses berfikir suatu sistem komputer.

Untuk lebih memahami tentang prinsip logika matematika, maka marilah kita pelajari materi dalam bab ini dengan saksama!

Peta Konsep

Menerapkan logika matematika dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor

→

- Kalimat berarti dan tidak berarti
- Kalimat terbuka
- Pernyataan
- Ingkaran
- Konjungsi
- Disjungsi
- Implikasi
- Biimplikasi
- Ingkaran kalimat majemuk
- Invers
- Konvers
- Kontraposisi
- Penarikan kesimpulan:
  - Modus ponens
  - Modus tollens
  - Silogisme

→

Menggunakan logika matematika untuk menyelesaikan masalah pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor

Di Sekolah Menengah Pertama, kita telah mempelajari pengertian kalimat benar, kalimat salah, kalimat terbuka, kalimat tertutup, peubah atau variabel, konstanta, penyelesaian kalimat terbuka, dan cara menentukan himpunan penyelesaian suatu kalimat terbuka.

Beberapa pengertian yang telah dipelajari itu akan kita gunakan untuk memahami pengertian pernyataan, operasi-operasi pada pernyataan, seperti ingkaran atau negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi. Selanjutnya, kita akan mempelajari pengertian pernyataan majemuk yang ekuivalen, ingkaran dari pernyataan majemuk, konvers, invers, dan kontraposisi.

Kita awali pembahasan kita dengan meninjau kembali pengertian pernyataan, nilai kebenaran, dan kalimat terbuka.

1.1 Mendeskripsikan Pernyataan dan Bukan Pernyataan (Kalimat Terbuka)

1.1.1 Pernyataan

A. Pengertian pernyataan

Untuk memahami pengertian pernyataan, perhatikan contoh berikut!

Contoh soal 1:

1. Teknik mesin adalah salah satu program keahlian dalam sekolah lanjutan teknik.
2. Indonesia mempunyai penduduk terbesar di dunia.
3. Jeruk mengandung vitamin C.
4. Nilai x yang memenuhi $2x + 5 = -3$ adalah -4.

Kalimat-kalimat pada contoh soal 1 hanya mempunyai nilai benar saja atau nilai salah saja, tetapi tidak sekaligus keduanya. Kalimat-kalimat seperti itu disebut pernyataan. Dengan demikian, kita dapat mendefinisikan pernyataan.

Pernyataan adalah kalimat yang hanya benar saja atau salah saja, tetapi tidak sekaligus benar dan salah pada saat yang bersamaan. Jadi, jika sebuah kalimat tidak bernilai benar atau salah, maka kalimat tersebut *bukan pernyataan*.

Perhatikan contoh berikut!

Contoh soal 2:

1. Berapa jumlah baju dalam lemari pakaianmu?
2. Makanlah kue itu!
3. Wah, bagus benar nilai matematikamu!

Kalimat-kalimat pada contoh soal 2 bukan pernyataan, sebab kalimat tersebut tidak menerangkan sesuatu (bukan kalimat deklaratif). Jadi, kalimat-kalimat yang digolongkan sebagai pernyataan adalah kalimat-kalimat yang menerangkan sesuatu (kalimat deklaratif) yang dapat bernilai benar atau salah. Namun demikian, tidak semua kalimat deklaratif merupakan pernyataan. Perhatikan contoh berikut!

Contoh soal 3:

1. Badan Vega tinggi.
2. Baju pesta Ani bagus.
3. Letak Bandung jauh.
4. Jurusan akuntansi paling diminati siswa.

Kalimat pada contoh soal 3 dapat bernilai benar atau salah tergantung pada keadaan/fakta.

B. Lambang dan nilai kebenaran suatu pernyataan

Dalam matematika, pernyataan-pernyataan dilambangkan dengan huruf kecil, seperti a, b, p, dan q. Perhatikan contoh berikut!

Contoh soal 4:

1. Pernyataan "6 adalah bilangan genap" dapat dilambangkan dengan huruf p, atau p : 6 adalah bilangan genap.
2. Pernyataan "ibu kota Jawa Barat adalah Bandung" dapat dilambangkan dengan huruf q, atau q : ibu kota Jawa Barat adalah Bandung.
3. Pernyataan "harga bersih adalah selisih harga semula dengan diskonnya" dapat dilambangkan dengan huruf a, atau a: harga bersih adalah selisih harga semula dengan diskonnya.

Untuk menunjukkan bahwa suatu pernyataan bernilai benar atau bernilai salah, dapat dilakukan dua cara berikut.

a. *Dasar empiris* yaitu berdasarkan fakta yang kita jumpai sehari-hari. Perhatikan contoh berikut!

Contoh soal 5:

1. "Batu adalah benda cair" merupakan pernyataan salah.
2. "Ibu kota Sumatra Utara adalah Medan" merupakan pernyataan benar.

b. *Dasar tak empiris* yaitu berdasarkan bukti-bukti atau perhitungan-perhitungan dalam matematika. Perhatikan contoh berikut!

Contoh soal 6:

1. "Pada sebuah segitiga, jumlah sudut dalam sama dengan 180°" merupakan pernyataan yang bernilai benar.
2. "Jika $x = 1$ maka $x - 5 = 6$" merupakan pernyataan yang bernilai salah.

Selanjutnya, terhadap pernyataan yang benar dikatakan mempunyai nilai kebenaran B (benar), sedangkan pada pernyataan yang salah dikatakan mempunyai nilai kebenaran S (salah). Namun, dalam penerapan konjungsi dan disjungsi pada jaringan listrik, nilai kebenaran B memakai angka 1, sedangkan nilai kebenaran S memakai angka 0. Dengan kata lain, nilai kebenaran dapat dituliskan dengan menggunakan huruf Yunani σ (dibaca: tau).

Contoh soal 7:

1. Pernyataan p : 5 adalah bilangan ganjil merupakan pernyataan yang bernilai benar, dapat ditulis $\sigma(p) = \text{B}$.
2. Pernyataan q : Ayam adalah binatang menyusui merupakan pernyataan yang bernilai salah, dapat ditulis $\sigma(q) = \text{S}$.

1.1.2 Kalimat terbuka

Perhatikan beberapa kalimat pada contoh berikut!

Contoh soal 8:

1. $x - 1 = 5$
2. $y + 2 = 4$
3. Dia adalah salah satu petinju Indonesia yang pernah menjadi juara dunia.

Kalimat-kalimat pada contoh soal 8 tidak dapat dinyatakan benar atau salah sebelum kita menentukan x, y, dan dia. Kalimat-kalimat seperti itu disebut kalimat terbuka, sedangkan x, y, dan dia disebut peubah atau variabel. Dengan demikian, kita dapat mendefinisikan kalimat terbuka.

Kalimat terbuka adalah kalimat yang masih mengandung peubah atau variabel, sehingga belum dapat ditentukan benar atau salah.

Sekarang kita tinjau kembali kalimat terbuka "$x - 1 = 5$". Jika semesta pembicaraannya adalah himpunan bilangan asli (A), maka kita dapat menggantikan nilai-nilai $x \in A$ pada kalimat $x - 1 = 5$, sehingga kalimat terbuka itu menjadi sebuah pernyataan. Nilai kebenaran dari pernyataan yang diperoleh bergantung pada nilai x yang menggantikan.

Misalkan:

a. Jika $x = 6$, maka didapat $6 - 1 = 5$, merupakan pernyataan yang benar.

b. Jika $x = 7$, maka didapat $7 - 1 = 6$, merupakan pernyataan yang salah.

Nilai pengganti $x = 6$ yang mengubah kalimat terbuka "$x - 1 = 5$" menjadi pernyataan yang benar disebut *penyelesaian*, sedangkan himpunan yang anggota-anggotanya merupakan seluruh penyelesaian dari kalimat terbuka disebut *himpunan penyelesaian*.

Berdasarkan uraian tersebut, dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Sebuah kalimat terbuka dapat diubah menjadi pernyataan (kalimat tertutup) dengan cara mengganti nilai peubah pada himpunan semestanya.
2. *Variabel* atau *peubah* adalah lambang untuk menunjuk anggota sembarang dari himpunan semesta.
3. *Konstanta* adalah lambang untuk menunjuk anggota tertentu dari semesta pembicaraan.
4. *Penyelesaian dari sebuah kalimat terbuka* adalah nilai pengganti peubah pada himpunan semesta yang menyebabkan kalimat terbuka tersebut menjadi sebuah pernyataan yang benar.
5. *Himpunan penyelesaian* adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan semua penyelesaian yang mungkin dari kalimat terbuka itu.

Contoh soal 9:

1. Himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat $x^2 - 4x + 3 = 0$ dengan peubah pada himpunan bilangan real adalah {1, 3}.
2. Himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat $x^2 + 4 = 0$ dengan peubah pada himpunan bilangan real adalah himpunan kosong atau $\varnothing$ atau { }.

1.1.3 Kalimat tertutup

Kalimat tertutup adalah kalimat yang mempunyai nilai benar atau salah tetapi tidak sekaligus keduanya.

Contoh soal 10:

1. Nilai x yang memenuhi $2x + 5 = 3$ adalah -1.

Akuntansi adalah salah satu program keahlian da-lam SMK teknik.

Kalimat tersebut di atas dapat ditentukan nilai benar atau salahnya. Perhatikan penjelasan di bawah ini!

Pernyataan pada contoh soal 10.1 bernilai benar sedangkan pernyataan pada contoh soal 10.2 bernilai salah karena pernyataan yang bernilai benar adalah akuntansi merupakan salah satu program keahlian di SMK nonteknik (manajemen bisnis).

Dari penjelasan di atas, dapat disimpulkan bahwa kalimat tertutup adalah suatu pernyataan.

Latihan 1

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Di antara kalimat berikut ini, tentukan yang merupakan pernyataan dan tentukan nilai kebenarannya!
   a. 25 habis dibagi 4.
   b. Semua bilangan prima adalah bilangan ganjil.
   c. 5 adalah bilangan ganjil.
   d. Ada 12 bulan dalam setahun.
   e. Saya lapar.
   f. Biarlah kebahagiaan itu berlalu.
   g. Tolong ambilkan buku itu!
   h. Jika $x = 3$, maka $x^2 = 9$.
   i. Carilah nilai x pada persamaan $x - 3 = 7$!
   j. Benarkah 2 merupakan bilangan prima?
2. Dari kalimat-kalimat di bawah ini, manakah yang merupakan pernyataan dan manakah yang merupakan kalimat terbuka?
   a. $x^2 - 4 = 0$
   b. 2 adalah bilangan prima dan bilangan genap.
   c. $3x - 2 < 5$
   d. Jumlah bilangan asli adalah bilangan real.
   e. Ibu kota Jawa Barat adalah Bandung.
   f. $\log x = 1$.
   g. π termasuk bilangan rasional.
   h. Sudut pusat segi lima beraturan adalah $72°$.
   i. Jika $x = 2$, berapa nilai $5x^2$?
   j. Dia seorang turis.
3. Berilah masing-masing dua contoh dari:
   a. kalimat terbuka;
   b. pernyataan!

Lembar Tugas 1

1. Berilah masing-masing tiga buah contoh untuk:
   a. pernyataan yang benar;
   b. pernyataan yang salah;
   c. bukan pernyataan!
2. Diketahui kalimat $2x - 1 < 5$ dan x peubah pada bilangan real. Carilah nilai pengganti x, sehingga kalimat terbuka itu menjadi pernyataan:
   a. bernilai benar;
   b. bernilai salah!
3. Jika x peubah pada bilangan bulat, carilah himpunan penyelesaian untuk tiap kalimat terbuka berikut!
   a. $2x - 1 = 5$
   b. ${}^3\log 9 + {}^2\log 8 = x$
   c. $x^5 = 32$
   d. $x + 10 = 2x + 2 + 2(3x - 3)$
   e. $x^2 + 2x - 15 = 0$
   f. x adalah bilangan genap kurang dari 10
   g. $x^2 - 4x = 0$
   h. x adalah bilangan prima kurang dari 11
   i. $3x = 9$
4. Tentukan kalimat-kalimat berikut, merupakan pernyataan atau bukan!
   a. Ia anak yang pandai.
   b. Semua ikan hidup di air.
   c. Tokyo ibu kota Jepang.
   d. Tidak boleh merokok.
   e. Dia anggota karang taruna.

1.2 Mendeskripsikan Ingkaran, Konjungsi, Disjungsi, Implikasi, Biimplikasi dan Ingkarannya

1.2.1 Pernyataan majemuk

Perhatikan contoh berikut!

Contoh soal 11:

a. $3 + 4 = 7$ dan 7 adalah bilangan ganjil.

b. Luas persegi panjang adalah panjang kali lebar atau $2 + 6 = 10$.

Contoh soal 11a terdiri dari dua pernyataan, yaitu "$3 + 4 = 7$" dan "7 adalah bilangan ganjil". Kedua pernyataan itu dirangkai dengan menggunakan kata penghubung "dan".

Demikian juga, contoh soal 11b terdiri dari dua pernyataan, yaitu "Luas persegi panjang adalah panjang kali lebar" dan "$2 + 6 = 10$". Kedua pernyataan itu dirangkai dengan menggunakan kata penghubung "atau". Pernyataan-pernyataan yang dirangkai dengan cara seperti itu disebut dengan pernyataan majemuk. Dengan demikian, kita dapat mendefinisikan pernyataan majemuk.

Pernyataan majemuk adalah pernyataan baru yang dibentuk dari beberapa pernyataan tunggal dengan menggunakan kata penghubung.

1.2.2 Ingkaran atau negasi

Jika diketahui sebuah pernyataan, kita dapat membentuk pernyataan baru dengan membubuhkan kata *tidak benar bahwa* ... sebelum pernyataan itu atau menyisipkan kata *tidak* atau *bukan* pada pernyataan itu. Pernyataan baru yang diperoleh dengan cara seperti itu disebut *ingkaran* atau *negasi* dari pernyataan semula.

Jika p adalah sebuah pernyataan yang diketahui, ingkaran dari p dapat ditulis dengan lambang:

$\sim p$ $\Rightarrow$ dibaca: tidak benar bahwa p atau bukan p

Untuk menentukan nilai kebenaran dari ingkaran, perhatikan contoh berikut!

Contoh soal 12:

a. $p : 5 - 3 = 2 \Rightarrow \sim p$: Tidak benar bahwa $5 - 3 = 2$

$\Rightarrow \sim p : 5 - 3 \neq 2$

b. q : 4 adalah bilangan ganjil

$\Rightarrow \sim q$: Tidak benar bahwa 4 adalah bilangan ganjil.

$\Rightarrow \sim q$: 4 bukan bilangan ganjil.

Pada contoh soal 12a, pernyataan semula bernilai benar dan ingkarannya bernilai salah. Pada contoh soal 12b, pernyataan semula bernilai salah dan ingkarannya bernilai benar. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan sebagai berikut.

Jika p pernyataan yang bernilai benar, maka ingkaran p bernilai salah dan jika p pernyataan bernilai salah, maka ingkaran p bernilai benar.

Jadi, nilai kebenaran pada ingkaran sebuah pernyataan selalu berlawanan dengan nilai kebenaran pernyataan semula.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan tabel kebenaran berikut!

Tabel Kebenaran Ingkaran

p	$\sim p$
B	S
S	B

Contoh soal 13:

Tentukan ingkaran dari pernyataan berikut!

a. $p : 3 + 4 < 8$

b. q : Semua presiden adalah laki-laki.

c. r : Ada rumah yang terbuat dari kayu.

d. s : Tidak ada orang yang berusia 200 tahun.

Jawab:

a. $p : 3 + 4 < 8 \Rightarrow \sim p$: Tidak benar bahwa $3 + 4 < 8$

$\Rightarrow \sim p : 3 + 4 \geq 8$

b. q : Semua presiden adalah laki-laki.

$\Rightarrow \sim q$: Tidak benar bahwa semua presiden adalah laki-laki.

$\Rightarrow \sim q$: Beberapa presiden bukan laki-laki.

c. r : Ada rumah yang terbuat dari kayu.

$\Rightarrow \sim r$: Tidak ada rumah yang terbuat dari kayu.

$\Rightarrow \sim r$: Semua rumah tidak terbuat dari kayu.

d. s : Tidak ada orang yang berusia 200 tahun.

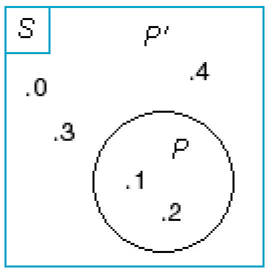
$\Rightarrow \sim s$: Ada orang yang berusia 200 tahun.

Hubungan antara ingkaran pernyataan dan komplemen himpunan

Untuk memahami hubungan antara ingkaran pernyataan dengan komplemen himpunan, perhatikan kalimat terbuka $p(x) : x^2 - 3x + 2 = 0$ dengan semesta pembicaraan $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Pernyataan p diperoleh dari kalimat terbuka $p(x)$ dengan mengganti peubah x dengan anggota-anggota pada semesta pembicaraan S. Perhatikan beberapa hal berikut!

1. Jika P adalah himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka $p(x) : x^2 - 3x + 2 = 0$ dengan semesta S, maka himpunan $P = \{1, 2\}$.
2. $\sim p(x) : x^2 - 3x + 2 \neq 0$, himpunan penyelesaian kalimat terbuka $\sim p(x)$ dalam semesta S adalah $P' = \{0, 3, 4\}$.

   Jika himpunan P, P', S digambarkan dalam diagram Venn, hasilnya sebagai berikut.



Gambar 1.1

Pada gambar 5.1, tampak bahwa himpunan P' adalah komplemen himpunan P dalam semesta pembicaraan S. Dengan kata lain, himpunan penyelesaian $p(x)$ merupakan komplemen himpunan penyelesaian $p(x)$ dalam semesta pembicaraan S. Hal itu dapat ditulis dengan lambang berikut.

$P = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, p benar jika $x \in P$;

$P' = \{x | x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$, $\sim p$ benar jika $x \in P'$.

Berdasarkan pembahasan pada contoh di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut.

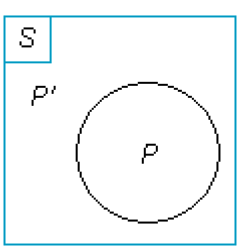
Jika P merupakan penyelesaian dari kalimat terbuka $p(x)$ dalam semesta pembicaraan S dan p merupakan pernyataan yang terbentuk dengan mengganti $x \in S$, maka himpunan komplemen dari P (ditulis P') merupakan penyelesaian kalimat terbuka $\sim p(x)$ dalam semesta yang sama.

Dalam bentuk lambang himpunan, pernyataan tersebut dapat ditulis sebagai berikut.

$P = \{x | p(x)\}$, p benar jika $x \in P$;

$P' = \{x | q(x)\}$, $\sim p$ benar jika $x \in P'$ atau p salah jika $x \in P$.

Jika disajikan dalam diagram Venn, hasilnya sebagai berikut.



Gambar 1.2

$P' = \{x | \sim p(x)\}$

Latihan 2

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Tentukan ingkaran dari tiap-tiap pernyataan berikut!
   a. 5 adalah bilangan ganjil.
   b. Tidak benar bahwa log 100 = 2.
   c. 15 habis dibagi 3.
2. p sebuah pernyataan "Semua hadirin berdiri ketika membaca doa".
   a. Tentukan ingkaran dari p!
   b. Pernyataan "Semua hadirin tidak berdiri ketika membaca doa" bukan ingkaran p, mengapa?
3. Panitia sebuah lomba kebersihan sekolah memberikan informasi, seperti berikut. "Beberapa siswa tidak dapat mengikuti lomba". Ternyata informasi itu salah. Dapatkan Anda menyebutkan informasi yang benar?

Lembar Tugas 2

1. Tentukan ingkaran dari tiap-tiap pernyataan berikut!
   a. Beberapa ayam bertelur.
   b. Semua bunga mawar berwarna merah.
   c. Tidak ada bayi yang mempunyai rambut putih.
2. Misalkan, x adalah variabel kalimat terbuka $p(x)$ dalam semesta $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ dan p adalah pernyataan yang terbentuk dengan mengganti nilai $x \in S$. Jika $p(x)$ adalah kalimat terbuka $x^2 - 13x + 47 \leq 7$, tentukan:
   a. nilai-nilai $x \in S$, sehingga p bernilai benar;
   b. nilai-nilai $x \in S$, sehingga p bernilai salah!
3. q adalah pernyataan "Ada ikan yang tidak bertelur".
   a. Tentukan ingkaran dari q!
   b. Pernyataan "Ada ikan yang bertelur" bukan ingkaran q, mengapa?

1.2.3 Konjungsi

Untuk memahami pengertian konjungsi, perhatikan contoh soal 11a: $3 + 4 = 7$ dan 7 adalah bilangan ganjil. Pernyataan majemuk tersebut terdiri dari dua pernyataan tunggal, yaitu pernyataan p : $3 + 4 = 7$ dan pernyataan q : "7 adalah bilangan ganjil" yang dirangkai dengan menggunakan kata penghubung "dan". Dua buah pernyataan yang dirangkai dengan kata penghubung "dan" disebut *konjungsi*. Dengan demikian, kita dapat mendefinisikan konjungsi, sebagai berikut.

Konjungsi dari dua buah pernyataan p dan q adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari pernyataan p dan q dengan menggunakan kata penghubung "dan".

Kata "dan" dalam konjungsi dapat juga diganti dengan "tetapi", "walaupun", "meskipun", "namun demikian" yang digunakan pada saat tertentu dan harus bermakna sama dengan kata "dan".

Lambang konjungsi dari pernyataan p dan q dinyatakan: $p \wedge q$ (dibaca: p dan q). Nilai kebenaran suatu konjungsi p dan q selalu mengikuti ketentuan berikut.

Apabila p benar dan q benar maka $p \wedge q$ benar. Selain itu, $p \wedge q$ salah.

Contoh soal 14:

Tentukan konjungsi dari pernyataan berikut!

1. p : $4 \times 4 = 16$ (B)
   q : 20 adalah kelipatan 5 (B)
   $p \wedge q$: $4 \times 4 = 16$ dan 20 adalah kelipatan 5 (B)
2. p : $5 + 6 = 11$ (B)
   q : Jakarta terletak di Sumatra (S)
   $p \wedge q$: $5 + 6 = 11$ dan Jakarta terletak di Sumatra (S)
3. p : $6 \times 4 = 30$ (S)
   q : 12 adalah bilangan genap (B)
   $p \wedge q$: $6 \times 4 = 30$ dan 12 adalah bilangan genap (S)
4. p : Medan adalah ibu kota Indonesia (S)
   q : 7 adalah bilangan genap (S)
   $p \wedge q$: Medan adalah ibu kota Indonesia dan 7 adalah bilangan genap (S)

Dengan mengingat definisi dan nilai kebenaran sebuah konjungsi dari contoh 14, diperoleh tabel kebenaran untuk konjungsi, sebagai berikut.

Tabel Kebenaran Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Contoh soal 15:

Tentukan nilai kebenaran dari konjungsi berikut!

$2 + 5 = 8$ dan 7 adalah bilangan ganjil.

Jawab:

p : $2 + 5 = 8$ (S)

q : 7 adalah bilangan ganjil (B)

$p \wedge q$: $2 + 5 = 8$ dan 7 adalah bilangan ganjil (S)

Contoh soal 16:

Carilah nilai-nilai x agar tiap pernyataan berikut menjadi konjungsi yang benar!

a. $3x - 2 = 4$ dan 3 adalah bilangan ganjil.

b. $x^2 - x = 0$ dan ikan bernapas dengan insang.

Jawab:

a. Pernyataan "$3x - 2 = 4$ dan 3 adalah bilangan ganjil" terdiri atas kalimat terbuka $p(x)$: $3x - 2 = 4$ dan pernyataan q : 3 adalah bilangan ganjil. Pernyataan q bernilai benar. Oleh karena itu, agar kalimat "$3x - 2 = 4$ dan 3 adalah bilangan ganjil" menjadi konjungsi yang benar, maka $p(x)$: $3x - 2 = 4$ harus diubah menjadi pernyataan yang benar (lihat tabel kebenaran konjungsi) dengan mengganti nilai $x = 2$. Jadi, "$3x - 2 = 4$ dan 3 adalah bilangan ganjil" merupakan konjungsi yang benar untuk $x = 2$.

b. Dengan memakai analisis yang sama pada jawaban a, kalimat "$x^2 - x = 0$ dan ikan bernapas dengan insang" menjadi konjungsi yang benar untuk $x = 0$ atau $x = 1$.

Hubungan antara konjungsi dan irisan dua himpunan

Untuk memahami hubungan antara konjungsi dan irisan dua himpunan, perhatikan kalimat terbuka $p(x)$: $x^2 - 3x + 2 = 0$ dan $q(x)$: $2 \le x \le 3$ dengan semesta $S = \{1, 2, 3, 4\}$! Pernyataan p dan q diperoleh dari kalimat terbuka $p(x)$ dan $q(x)$ dengan mengganti peubah x dengan anggota-anggota pada semesta S. Perhatikan beberapa hal berikut!

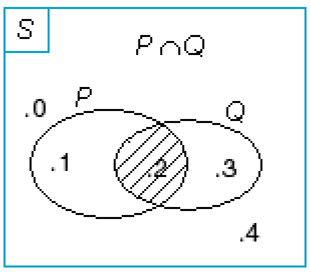
1. Jika P adalah himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka $p(x) : x^2 - 3x + 2 = 0$ dengan semesta S, maka $P = \{1, 2\}$.
2. Jika Q adalah himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka $q(x) : 2 \leq x \leq 3$ dengan semesta S, maka $Q = \{2, 3\}$.
3. $p(x)$ dan $q(x)$: $(x^2 - 3x + 2 = 0) \wedge (2 \leq x \leq 3)$ mempunyai himpunan penyelesaian $\{2\}$.

Himpunan-himpunan P, Q, S diperlihatkan pada gambar 1.3, sebagai berikut.

Dari gambar 1.3 tampak bahwa himpunan penyelesaian kalimat $p(x) \wedge q(x)$ adalah irisan dari himpunan penyelesaian $p(x)$ dengan himpunan penyelesaian $q(x)$. Hal itu dapat ditulis dengan lambang himpunan sebagai berikut.

$P = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, p benar jika $x \in P$;

$Q = \{x | 2 \leq x \leq 3\}$, q benar jika $x \in Q$.



Gambar 1.3

$P \cap Q = \{x | (x^2 - 3x + 2 = 0) \wedge (2 \leq x \leq 3)\}$,

$p \wedge q$ benar jika $x \in (P \cap Q)$.

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Jika P dan Q masing-masing merupakan himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka $p(x)$ dan $q(x)$ pada himpunan semesta S, maka $P \cap Q$ adalah himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka $p(x) \wedge q(x)$ pada himpunan semesta S yang sama.

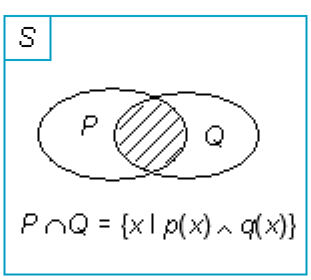
Dalam bentuk lambang himpunan:

$P = \{x | p(x)\}$, p benar jika $x \in P$;

$Q = \{x | q(x)\}$, q benar jika $x \in Q$.

$P \cap Q = \{x | p(x) \wedge q(x)\}$, $p \wedge q$ benar jika $x \in (P \cap Q)$.

Hubungan itu secara umum dapat digambarkan dengan menggunakan diagram Venn, seperti gambar 1.4.



Gambar 1.4

Contoh soal 17:

Diketahui $p(x) : x^2 - 6x + 5 = 0$ dan $q(x) : x^2 - 3x + 2 = 0$ dengan x peubah pada himpunan bilangan real R. Pernyataan p dan q adalah pernyataan-pernyataan yang terbentuk dengan mengganti nilai $x \in R$. Carilah nilai x, sehingga $(p \wedge q)$ bernilai benar!

Jawab:

Himpunan penyelesaian $p(x) : x^2 - 6x + 5 = 0$ adalah $P = \{1, 5\}$.

Himpunan penyelesaian $q(x) : x^2 - 3x + 2 = 0$ adalah $Q = \{1, 2\}$.

$P \cap Q = \{1\}$. Dengan demikian, $(p \wedge q)$ benar jika $x \in (P \cap Q)$ atau $x = 1$.

Latihan 3

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Tentukan nilai kebenaran tiap kalimat berikut!
   a. 3 adalah bilangan ganjil dan 10 habis dibagi 3.
   b. 2 faktor dari 8 dan 2 adalah bilangan genap.
   c. $2^3 \times 2^4 = 2^7$ dan ${}^2\log 8 = 4$
2. Jika p adalah pernyataan yang bernilai benar dan q adalah pernyataan yang bernilai salah, tentukan nilai kebenaran tiap pernyataan mejemuk berikut!
   a. $p \wedge q$ b. $\sim(p \wedge q)$
3. Diketahui p : Harga barang naik dan q : Jumlah barang turun. Terjemahkan lambang berikut dalam bentuk kalimat!
   a. $p \wedge q$ c. $p \wedge \sim q$
   b. $\sim p \wedge q$
4. Carilah nilai-nilai x agar kalimat berikut menjadi konjungsi yang benar!
   a. $4x - 5 = 3$ dan 3 adalah bilangan prima.
   b. $2x = 8$ dan $2 + 5 = 7$.
5. Misalkan x adalah variabel pada kalimat terbuka $p(x) : x^2 - 10x + 9 = 0$ dan $q(x) : x^2 - 17x + 70 \leq 0$ pada himpunan bilangan asli A. p dan q masing-masing merupakan pernyataan yang terbentuk dengan mengganti $x \in A$ pada kalimat terbuka $p(x)$ dan $q(x)$.
   a. Carilah nilai $x \in A$ sehingga p benar!
   b. Carilah nilai $x \in A$ sehingga q benar!
   c. Carilah nilai $x \in A$ sehingga $p \wedge q$ benar!

Lembar Tugas 3

1. Tentukan nilai kebenaran tiap kalimat berikut!
   a. Bandung adalah ibu kota Jawa Tengah dan Surabaya adalah ibu kota Jawa Timur.
   b. $3^5 : 3^2 = 3^7$ dan $(2^3)^4 = 2^{12}$.
2. Jika p adalah pernyataan yang bernilai benar dan q adalah pernyataan yang bernilai salah, tentukan nilai kebenaran tiap pernyataan mejemuk berikut!
   a. $p \wedge \sim q$ c. $\sim p \wedge \sim q$
   b. $\sim p \wedge q$
3. Diketahui p : Harga barang naik dan q : Jumlah barang turun. Terjemahkan lambang berikut dalam bentuk kalimat!
   a. $\sim p \wedge \sim q$ c. $q \wedge \sim p$
   b. $\sim q \wedge p$
4. Carilah nilai-nilai x agar kalimat berikut menjadi konjungsi yang benar!
   a. $x^2 + x - 6 = 0$ dan 3 faktor dari 9.
   b. $x - 1 = 9 - x$ dan $3 \log 27 = 3$.
5. Misalkan x adalah variabel pada kalimat terbuka $p(x) : x^2 - 10x + 9 = 0$ dan $q(x) : x^2 - 17x + 70 \leq 0$ pada himpunan bilangan asli A. p dan q masing-masing merupakan pernyataan yang terbentuk dengan mengganti $x \in A$ pada kalimat terbuka $p(x)$ dan $q(x)$.
   a. Jika P dan Q masing-masing merupakan himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka $p(x)$ dan $q(x)$, gambarlah P dan Q dalam sebuah diagram Venn!
   b. Kesimpulan apa yang Anda peroleh pada jawaban a?

1.2.4 Disjungsi

Pada contoh soal 11b, pernyataan majemuk "Luas persegi panjang adalah panjang kali lebar atau 2 + 6 = 10". Pernyataan majemuk tersebut terdiri dari dua pernyataan tunggal yang dirangkai dengan kata penghubung "atau". Dua buah pernyataan yang dirangkai dengan cara seperti itu disebut *disjungsi*. Dengan demikian, dapat didefinisikan sebagai berikut.

Disjungsi dari dua buah pernyataan p dan q adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari pernyataan p dan q yang dirangkai dengan kata penghubung "atau".

Disjungsi dinotasikan: $p \vee q$ (dibaca: p atau q). Nilai kebenaran suatu disjungsi p dan q selalu mengikuti ketentuan berikut.

Apabila p salah dan q salah maka $p \vee q$ bernilai salah. Selain itu, $p \vee q$ bernilai benar.

Jika disajikan dalam tabel kebenaran ialah sebagai berikut.

Tabel Kebenaran Disjungsi

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Contoh soal 18:

Dengan menggunakan tabel kebenaran disjungsi:

1. $p : 4 \times 4 = 16$ (B)
   q : 20 adalah kelipatan 5 (B)
   $p \vee q$: $4 \times 4 = 16$ atau 20 adalah kelipatan 5 (B)
2. $p : 5 + 6 = 11$ (B)
   q : Matahari adalah satelit (S)
   $p \vee q$: $5 + 6 = 11$ atau matahari adalah satelit (B)
3. $p : 80 - 10 = 60$ (S)
   q : Jakarta terletak di Pulau Jawa (B)
   $p \vee q$: $80 - 10 = 60$ atau Jakarta terletak di Pulau Jawa (B)
4. $p : 45 : 9 = 7$ (S)
   q : Australia pernah menjajah Indonesia (S)
   $p \vee q$: $45 : 9 = 7$ atau Australia pernah menjajah Indonesia (S)

Contoh soal 19:

Carilah nilai-nilai x agar tiap kalimat berikut menjadi disjungsi yang benar!

a. $2x - 3 = 5$ atau 4 adalah bilangan ganjil.

b. $x^2 - 9 = 0$ atau $4 - 1 = 2$.

Jawab:

a. Agar kalimat "$2x - 3 = 5$ atau 4 adalah bilangan ganjil" menjadi disjungsi yang benar, maka kalimat terbuka $p(x) : 2x - 3 = 5$ harus bernilai benar sebab pernyataan q : 4 adalah bilangan ganjil bernilai salah. Nilai x yang menyebabkan kalimat terbuka $p(x) : 2x - 3 = 5$ benar adalah $x = 4$.

Jadi, kalimat "$2x - 3 = 5$ atau 4 adalah bilangan ganjil" menjadi disjungsi yang benar untuk $x = 4$.

b. Dengan menggunakan analisis yang sama, maka kalimat "$x^2 - 9 = 0$ atau $4 - 1 = 2$" menjadi disjungsi yang benar untuk $x = -3$ atau $x = 3$.

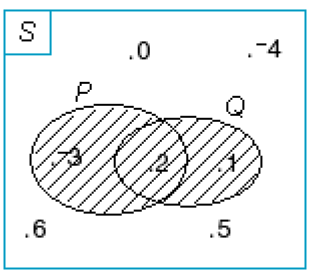
Hubungan antara disjungsi dan gabungan dua himpunan

Untuk memahami hubungan antara disjungsi dan gabungan dua himpunan, perhatikan kalimat terbuka $p(x) : x^2 + x - 6 = 0$ dan $q(x) : x^2 - 3x + 2 = 0$ dengan semesta $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pernyataan p dan q diperoleh dari kalimat terbuka $p(x)$ dan $q(x)$ dengan cara mengganti peubah x dengan anggota-anggota pada semesta S. Perhatikan beberapa hal berikut!

1. Jika P adalah himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka $p(x) : x^2 + x - 6 = 0$ dengan semesta S maka $P = \{-3, 2\}$.
2. Jika Q adalah himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka $q(x) : x^2 - 3x + 2 = 0$ dengan semesta S maka $Q = \{1, 2\}$.
3. $p(x) \vee q(x) : (x^2 + x - 6 = 0) \vee (x^2 - 3x + 2 = 0)$ mempunyai himpunan penyelesaian $\{-3, 1, 2\}$.

Jika himpunan P, Q, S diperlihatkan pada gambar 1.5, akan tampak sebagai berikut.

Pada gambar 1.5 di samping, tampak bahwa himpunan penyelesaian $p(x) \vee q(x)$ adalah gabungan atau *union* dari himpunan penyelesaian $p(x)$ dengan himpunan penyelesaian $q(x)$. Jika ditulis dengan lambang himpunan adalah sebagai berikut.



Gambar 1.5

$P = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, p benar jika $x \in P$;

$Q = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, q benar jika $x \in Q$.

$$P \cup Q = \{x | (x^2 + x - 6 = 0) \vee (x^2 - 3x + 2 = 0)\},$$
$$p \vee q \text{ benar jika } x \in (P \cup Q).$$

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Jika P dan Q masing-masing merupakan himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka $p(x)$ dan $q(x)$ pada himpunan semesta S, maka $P \cup Q$ adalah himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka $p(x) \vee q(x)$ pada himpunan semesta S yang sama.

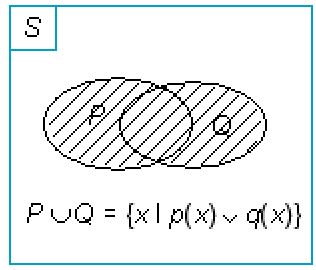
Dalam bentuk lambang himpunan dapat ditulis:

$P = \{x | p(x)\}$, p benar jika $x \in P$;

$Q = \{x | q(x)\}$, q benar jika $x \in Q$.

$P \cup Q = \{x | p(x) \vee q(x)\}$, $p \vee q$ benar jika $x \in (P \cup Q)$.

Hubungan tersebut di atas secara umum dapat digambarkan dengan menggunakan diagram Venn, seperti gambar 1.6 di samping.



Gambar 1.6

Contoh soal 20:

Misalkan $p(x) : x^2 - 7x + 12 = 0$ dan $q(x) : x^2 - 6x + 8 = 0$ dengan x peubah pada himpunan bilangan real R. Jika p dan q adalah pernyataan-pernyataan yang terbentuk dengan mengganti nilai $x \in R$, carilah nilai x sehingga $(p \vee q)$ bernilai benar!

Jawab:

Himpunan penyelesaian $p(x) : x^2 - 7x + 12 = 0$ adalah $P = \{3, 4\}$.

Himpunan penyelesaian $q(x) : x^2 - 6x + 8 = 0$ adalah $Q = \{2, 4\}$.

$P \cup Q = \{2, 3, 4\}$. Dengan demikian $(p \vee q)$ benar jika $x \in (P \cup Q)$ atau $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

Latihan 4

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Tentukan nilai kebenaran dari tiap disjungsi berikut!
   a. 3 adalah bilangan prima atau 4 adalah bilangan genap.
   b. $3 \times 3^2 = 3^4$ atau 4 faktor dari 12.
   c. ${}^5\log 125 = 5$ atau 5 adalah bilangan prima.
   d. 6 atau 12 habis dibagi 3.
   e. $5^2 = 25$ atau $(2^4)^3 = 2^{12}$.
2. Jika p adalah pernyataan yang bernilai salah dan q adalah pernyataan yang bernilai benar, tentukan nilai kebenaran tiap pernyataan berikut!
   a. $p \wedge q$ b. $\sim(p \wedge q)$
3. Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut!
   p : 4 adalah bilangan asli.
   q : 5 adalah bilangan prima.

Carilah rumus simbolis untuk pernyataan berikut dalam p dan q!

a. 5 adalah bilangan prima atau 4 bukan bilangan asli.

b. 5 bukan bilangan prima atau 4 bilangan asli.

c. 4 adalah bilangan asli atau 5 adalah bilangan prima.

4. Carilah nilai-nilai x agar kalimat berikut menjadi disjungsi yang benar!

a. $2x + 1 = 7$ atau $3 - 3 = 0$.

b. $3x - 2 = x + 4$ atau 3 adalah bilangan prima.

5. Buatlah tabel kebenaran dari:

a. $p \vee q$; b. $\sim(p \vee q)$!

Lembar Tugas 4

1. Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut!

a. $-3 < -5$ atau $\log 10 < 2$.

b. $3 + 5 = 12$ atau Surabaya ibu kota Jawa Tengah.

c. Jika ikan bernapas dengan insang, maka $2 + 5 < 8$.

2. Jika p adalah pernyataan yang bernilai salah dan q adalah pernyataan yang bernilai benar, tentukan nilai kebenaran tiap pernyataan berikut!

a. $\sim p \wedge q$ b. $p \wedge \sim q$ c. $\sim p \wedge \sim q$

3. Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut!

p : 4 adalah bilangan asli.

q : 5 adalah bilangan prima.

Carilah rumus simbolis untuk pernyataan berikut dalam p dan q!

a. 4 adalah bilangan asli atau 5 bukan bilangan prima.

b. 5 bilangan prima atau 4 bukan bilangan asli.

4. Carilah nilai-nilai x agar kalimat berikut menjadi disjungsi yang benar!

a. $x^2 - 9 = 0$ atau $(3, -3)$ adalah bilangan asli.

b. $8 - x^3 = 0$ atau 2 adalah bilangan genap.

1.2.5 Implikasi

Untuk memahami pengertian implikasi atau kondisional atau pernyataan bersyarat, perhatikan pernyataan-pernyataan berikut!

p : Hari ini hujan lebat.

q : Saya pergi ke sekolah memakai payung.

Dari pernyataan p dan q, kita dapat menyusun sebuah pernyataan majemuk, sebagai berikut.

"Jika hari ini hujan lebat, maka saya pergi ke sekolah memakai payung."

"Jika p maka q."

Pernyataan yang disusun dengan cara seperti itu disebut implikasi. Jadi, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Implikasi adalah pernyataan majemuk yang disusun dari dua buah pernyataan p dan q dalam bentuk "jika p maka q".

Jika dinyatakan dengan lambang ialah: $p \Rightarrow q$ (dibaca: jika p maka q).

Cara membaca implikasi $p \Rightarrow q$ adalah:

1. p hanya jika q,
2. q jika p,
3. p syarat cukup bagi q,
4. q syarat perlu bagi p.

Bagian "p" dinamakan alasan atau sebab (*antesedent* atau hipotesis).

Bagian "q" dinamakan kesimpulan atau akibat (*konklusi* atau konsekuen).

Nilai kebenaran $p \Rightarrow q$ selalu mengikuti ketentuan berikut.

$p \Rightarrow q$ dinyatakan salah jika p benar dan q salah. Dalam kemungkinan yang lain, $p \Rightarrow q$ dinyatakan benar.

Jika disajikan dalam tabel kebenaran ialah sebagai berikut.

Tabel Kebenaran Implikasi

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contoh soal 21:

Tentukan nilai kebenaran tiap implikasi berikut!

a. Jika $4 + 3 = 7$, maka 7 adalah bilangan prima.

b. Jika 2 adalah bilangan ganjil, maka Bandung ibu kota Jawa Barat.

c. Jika $5 + 2 = 7$, maka 7 adalah bilangan genap.

d. Jika $2 + 3 = 4$, maka 4 adalah bilangan ganjil.

Jawab:

a. p : $4 + 3 = 7$ (B)
   q : 7 adalah bilangan prima (B)
   $p \Rightarrow q$: Jika $4 + 3 = 7$ maka 7 adalah bilangan prima (B)

b. p : 2 adalah bilangan ganjil (S)
   q : Bandung ibu kota Jawa Barat (B)
   $p \Rightarrow q$: Jika 2 adalah bilangan ganjil maka Bandung ibu kota Jawa Barat (B)

c. p : $5 + 2 = 7$ (B)
   q : 7 adalah bilangan genap (S)
   $p \Rightarrow q$: Jika $5 + 2 = 7$ maka 7 adalah bilangan genap (S)

d. p : $2 + 3 = 4$ (S)
   q : 4 adalah bilangan ganjil (S)
   $p \Rightarrow q$: Jika $2 + 3 = 4$ maka 4 adalah bilangan ganjil (S)

Contoh soal 22:

Carilah nilai-nilai x agar tiap kalimat berikut menjadi implikasi yang benar!

a. Jika $x - 3 = 4$, maka 4 adalah bilangan ganjil.

b. Jika $4 - 4 = 0$, maka $x^2 - 4 = 0$.

Jawab:

a. Dapat ditulis dalam bentuk "$p(x) \Rightarrow q$" dengan $p(x)$: $x - 3 = 4$ merupakan kalimat terbuka dan q : 4 adalah bilangan ganjil suatu pernyataan yang bernilai salah. Agar kalimat "Jika $x - 3 = 4$, maka 4 adalah bilangan ganjil"menjadi implikasi yang benar, maka kalimat terbuka $p(x)$: $x - 3 = 4$ harus diubah menjadi bernilai salah.

   Caranya ialah dengan mengganti nilai x dengan $x \neq 7$.

   Jadi, kalimat "Jika $x - 3 = 4$, maka 4 adalah bilangan ganjil" menjadi implikasi yang benar untuk $x \neq 7$.

b. Dapat ditulis dalam bentuk "$p \Rightarrow q(x)$" dengan p : $4 - 4 = 0$ merupakan pernyataan benar, sedangkan $q(x)$: $x^2 - 4 = 0$ merupakan kalimat terbuka. Kalimat "Jika $4 - 4 = 0$, maka $x^2 - 4 = 0$" akan menjadi implikasi benar, jika kalimat terbuka $q(x)$: $x^2 - 4 = 0$ diubah menjadi pernyataan benar.

   Caranya ialah dengan mengganti nilai $x = -2$ atau $x = 2$, sebab pernyataan p : $4 - 4 = 0$ bernilai benar.

   Jadi, kalimat "Jika $4 - 4 = 0$, maka $x^2 - 4 = 0$" menjadi implikasi yang benar untuk $x = -2$ atau $x = 2$.

Contoh soal 23:

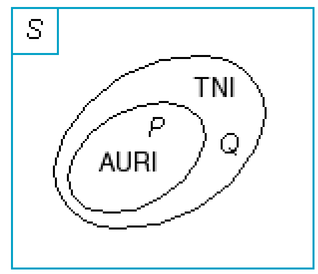
Apabila Vega seorang AURI, tentukan nilai kebenaran implikasi berikut!

a. Jika Vega seorang AURI, maka Vega seorang TNI.

b. Jika Vega seorang TNI, maka Vega seorang AURI.

Jawab:

Misalkan, P adalah himpunan semua AURI dan Q ada-lah himpunan semua TNI. Hubungan antara P dan Q dapat diperlihatkan dengan diagram Venn, seperti gambar di samping.



Dari gambar di atas, tampak bahwa $P \subset Q$ dan $Q \not\subset P$ Jadi, impli-kasi:

a. "Jika Vega seorang AURI maka Vega seorang TNI" merupakan implikasi benar, sebab $P \subset Q$;

b. "Jika Vega seorang TNI maka Vega seorang AURI" bukan implikasi, sebab $Q \not\subset P$;

Latihan 5

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Manakah yang benar dari pernyataan-pernyataan implikasi berikut?
   a. Jika $4 + 5 = 9$ maka $5 \times 6 = 30$.
   b. Jika 3 faktor dari 12 maka 12 habis dibagi 5.
2. Jika p adalah pernyataan yang bernilai salah dan q adalah pernyataan yang bernilai benar, tentukan nilai kebenaran tiap pernyataan majemuk berikut!
   a. $p \Rightarrow q$
   b. $q \Rightarrow p$
   c. $p \Rightarrow \sim q$
   d. $\sim p \Rightarrow q$
   e. $\sim p \Rightarrow \sim q$
3. Dari soal nomor 2, jawaban mana yang mempunyai nilai kebenaran setara atau ekuivalen?
4. Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut!
   p : Vega mendapat rejeki.
   q : Rentia ditraktir makan bakso.
   Jika p dan q merupakan pernyataan yang benar, tentukan nilai kebenaran tiap implikasi berikut!

a. Jika Vega mendapat rejeki, maka Rentia ditraktir makan bakso.

b. Jika Vega mendapat rejeki, maka Rentia tidak ditraktir makan bakso.

5. Carilah nilai x, agar kalimat berikut menjadi implikasi yang benar!

a. Jika $2x + 1 = 9$ atau $5 + 3 = 8$.

b. Jika $x^2 = 9$ maka 9 adalah bilangan genap.

Lembar Tugas 5

1. Manakah yang benar dari pernyataan-pernyataan implikasi berikut?

   a. Jika 6 bilangan ganjil, maka 6 bukan bilangan genap.

   b. Jika Semarang ibu kota Jawa Tengah, maka 1 bukan bilangan asli.

   c. Jika $3 \times 2 < 8$, maka 8 bilangan genap.

2. Jika p adalah pernyataan yang bernilai salah dan q adalah pernyataan yang bernilai benar, tentukan nilai kebenaran tiap pernyataan majemuk berikut!

   a. $\sim(p \Rightarrow \sim q)$ c. $\sim(q \Rightarrow \sim p)$

   b. $\sim(\sim p \Rightarrow q)$ d. $\sim q \Rightarrow \sim p$

3. Dari soal nomor 2, jawaban mana yang mempunyai nilai kebenaran setara atau ekuivalen?

4. Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut!

   p : Vega mendapat rejeki.

   q : Rentia ditraktir makan bakso.

   Jika p dan q merupakan pernyataan yang benar, tentukan nilai kebenaran tiap implikasi berikut!

   a. Jika Vega tidak mendapat rejeki, maka Rentia ditraktir makan bakso.

   b. Jika Vega tidak mendapat rejeki, maka Rentia tidak ditraktir makan bakso.

5. Carilah nilai x, agar kalimat berikut menjadi implikasi yang benar!

   a. Jika $\sqrt{9} = 3$ maka $x - 1 = 3x - 9$.

   b. Jika 5 bilangan prima maka $2^3 \times 2^5 = 2^x$.

1.2.6 Biimplikasi

Dua buah pernyataan p dan q dengan menggunakan kata penghubung "jika dan hanya jika". Pernyataan majemuk seperti itu disebut biimplikasi atau implikasi dwiarah atau pernyataan ekuivalen. Biimplikasi dinotasikan:

$p \Leftrightarrow q$ (dibaca: "p jika dan hanya jika q").

Cara membaca biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ adalah:

1. Jika p maka q dan jika q maka p.
2. p syarat perlu dan cukup untuk q.
4. q syarat perlu dan cukup untuk p.

Nilai kebenaran biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ selalu mengikuti ketentuan berikut.

Apabila p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama atau sejenis, maka $p \Leftrightarrow q$ mempunyai nilai benar dan sebaliknya.

Apabila dinyatakan dengan tabel kebenaran, maka akan tampak seperti berikut.

Tabel Kebenaran Biimplikasi

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh soal 24:

Dengan menggunakan tabel kebenaran biimplikasi:

1. $p : 4 + 6 = 10$ (B)
   $q : 5 \times 4 = 20$ (B)
   $p \Leftrightarrow q : 4 + 6 = 10$ jika dan hanya jika $5 \times 4 = 20$ (B)
2. $p : 4 + 6 = 10$ (B)
   $q : 5 \times 4 = 25$ (S)
   $p \Leftrightarrow q : 4 + 6 = 10$ jika dan hanya jika $5 \times 4 = 25$ (S)
3. $p : 4 + 6 = 15$ (S)
   $q : 5 \times 4 = 20$ (B)
   $p \Leftrightarrow q : 4 + 6 = 15$ jika dan hanya jika $5 \times 4 = 20$ (S)
4. $p : 4 + 6 = 15$ (S)
   $q : 5 \times 4 = 25$ (S)
   $p \Leftrightarrow q : 4 + 6 = 15$ jika dan hanya jika $5 \times 4 = 25$ (B)

Contoh soal 25:

Carilah nilai x, agar tiap kalimat berikut menjadi biimplikasi yang benar!

a. $3x - 4 = 2x + 1$ jika dan hanya jika 2 bilangan genap.

b. $3 > 5$ jika dan hanya jika $x - 3 = 0$.

Jawab:

a. Dapat ditulis dalam bentuk "$p(x) \Leftrightarrow q$" dengan $p(x)$: $3x - 4 = 2x + 1$ merupakan kalimat terbuka dan q : 2 bilangan genap merupakan pernyataan yang bernilai benar. Agar kalimat "$3x - 4 = 2x + 1$ jika dan hanya jika 2 bilangan genap" menjadi biimplikasi yang benar, maka kalimat terbuka $p(x)$: $3x - 4 = 2x + 1$ diubah menjadi bernilai benar.

Caranya ialah dengan mengganti nilai $x = 5$, sebab q : 2 bilangan genap merupakan pernyataan benar (lihat tabel kebenaran biimplikasi).

Jadi, kalimat "$3x - 4 = 2x + 1$ jika dan hanya jika 2 bilangan genap" menjadi biimplikasi yang benar untuk $x = 5$.

b. Dengan menggunakan analisis yang sama dengan (a), agar kalimat "$3 > 5$ jika dan hanya jika $x - 3 = 0$" menjadi biimplikasi benar, maka kalimat terbuka $q(x)$: $x - 3 = 0$ harus bernilai salah, sebab p: $3 > 5$ merupakan pernyataan salah. Nilai x yang menyebabkan kalimat terbuka $q(x)$: $x - 3 = 0$ menjadi pernyataan yang salah adalah $x \neq 3$.

Jadi, kalimat "$3 > 5$ jika dan hanya jika $x - 3 = 0$" menjadi biimplikasi yang benar untuk $x \neq 3$.

a. Biimplikasi yang berbentuk $p(x) \Leftrightarrow q(x)$

Misalkan, P dan Q masing-masing merupakan himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka $p(x)$ dan $q(x)$ pada semesta pembicaraan S. Kalimat $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ menjadi biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ yang bernilai benar jika $P = Q$.

Contoh soal 26:

1. $x = -3$ jika dan hanya jika $2x + 4 = x + 1$.
2. $x > 2$ jika dan hanya jika $2x > 4$.

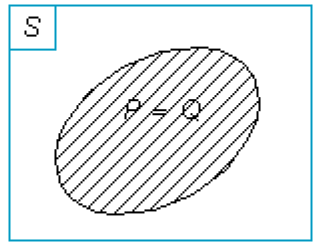
Dalam bentuk himpunan, biimplikasi ditulis sebagai berikut.

$P = \{x|p(x)\}$, p benar jika $x \in P$;

$Q = \{x|q(x)\}$, q benar jika $x \in Q$.

$p \Leftrightarrow q$ benar jika $P = Q$.

Biimplikasi di atas, jika kita nyatakan dalam bentuk diagram Venn, ditunjukkan pada gambar 1.7.



Gambar 1.7

b. Pernyataan majemuk yang ekuivalen atau setara dan ingkaran dari pernyataan majemuk

Suatu pernyataan majemuk dikatakan ekuivalen atau setara, jika nilai kebenaran dari pernyataan majemuk tersebut sama.

Notasi ekuivalen atau setara ialah:

$a \equiv b$ (dibaca: a ekuivalen b atau a setara b).

Contoh soal 27:

Tunjukkan bahwa:

a. $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$; b. $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$!

Jawab:

a. Untuk menunjukkan bahwa pernyataan $\sim(p \wedge q)$ dan $(\sim p \vee \sim q)$ ekuivalen, dapat digunakan tabel kebenaran berikut.

Tabel Kebenaran $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	S	B	B
S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B

lawan ekuivalen

Berdasarkan tabel tersebut, ternyata nilai kebenaran pernyataan majemuk $\sim(p \wedge q)$ dan $(\sim p \vee \sim q)$ adalah sama. Jadi, $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$, sedangkan $\sim(p \wedge q)$ nilai kebenarannya berlawanan dengan $(p \wedge q)$.

b. Tabel Kebenaran $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
B	B	S	B	S	S
B	S	B	S	B	B
S	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	S

lawan ekuivalen

Jadi, $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$, sedangkan nilai kebenaran $\sim(p \Rightarrow q)$ lawan dari nilai kebenaran $(p \Rightarrow q)$.

Jadi, ingkaran dari pernyataan majemuk, mempunyai nilai kebenaran yang berlawanan dengan pernyataan majemuk tersebut.

Latihan 6

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Dari pernyataan biimplikasi berikut, mana yang benar?
   a. 3 adalah bilangan ganjil jika dan hanya jika 3 faktor dari 5.
   b. $3 + 8 = 11$ jika dan hanya jika 11 habis dibagi 2.
2. Jika p adalah pernyataan yang bernilai benar dan q adalah pernyataan yang bernilai salah, tentukan nilai kebenaran tiap pernyataan majemuk berikut!
   a. $p \Leftrightarrow q$
   b. $q \Leftrightarrow p$
   c. $\sim p \Leftrightarrow q$
   d. $p \Leftrightarrow \sim q$
   e. $\sim p \Leftrightarrow \sim q$
3. Dari soal nomor 2, jawaban mana yang mempunyai nilai kebenaran setara atau ekuivalen?
4. Carilah nilai x, agar kalimat berikut menjadi biimplikasi yang benar!
   a. $x - 3 = 5$ jika dan hanya jika $4 > 5$.
   b. $x^2 - 4 = 0$ jika dan hanya jika $x^2 - 5x + 6 = 0$.
5. Di antara pernyataan implikasi berikut manakah yang merupakan biimplikasi?
   a. ΔABC sama kaki $\Rightarrow \angle A = \angle C$.
   b. Jika $A \subset B$ dan $B \subset A$ maka $A = B$
   c. Jika jumlah sudut dalam segi banyak S sama dengan $360°$, maka S adalah segi empat.

Lembar Tugas 6

1. Dari pernyataan biimplikasi berikut, manakah yang benar?
   a. $4 \times 5 = 9$ jika dan hanya jika 9 bukan bilangan ganjil.
   b. $\sin 60° = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
   c. $\log 10 - \log 2 = \log 8 \Leftrightarrow \log 10 + \log 2 = \log 20$.
2. Jika p adalah pernyataan yang bernilai benar dan q adalah pernyataan yang bernilai salah, tentukan nilai kebenaran tiap pernyataan majemuk berikut!
   a. $\sim q \Leftrightarrow p$
   b. $\sim q \Leftrightarrow \sim p$
   c. $q \Leftrightarrow \sim p$
   d. $\sim(p \Leftrightarrow q)$
3. Dari soal nomor 2, jawaban mana yang mempunyai nilai kebenaran setara atau ekuivalen?
4. Carilah nilai x, agar kalimat berikut menjadi biimplikasi yang benar!
   a. 2 adalah bilangan ganjil jika dan hanya jika $x^2 - 5x + 6 = 0$.
   b. $5^x = 25$ jika dan hanya jika 5 adalah bilangan prima.
5. Buatlah tabel kebenaran dari notasi:
   a. $p \vee q \Leftrightarrow q$
   b. $(p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim p$

1.3 Mendeskripsikan Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Jika dua pernyataan p dan q membentuk pernyataan majemuk implikasi $p \Rightarrow q$ maka:

1. konvers dari pernyataan $p \Rightarrow q$ adalah $q \Rightarrow p$;
2. invers dari pernyataan $p \Rightarrow q$ adalah $\sim p \Rightarrow \sim q$;
3. kontraposisi dari pernyataan $p \Rightarrow q$ adalah $\sim q \Rightarrow \sim p$.

Hubungan antara nilai kebenaran $q \Rightarrow p$, $\sim p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow \sim p$, dan $p \Rightarrow q$ dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel Kebenaran Konvers, Invers, dan Kontraposisi

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi $p \Rightarrow q$	Konvers $q \Rightarrow p$	Invers $\sim p \Rightarrow \sim q$	Kontraposisi $\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

ekuivalen

ekuivalen

Berdasarkan tabel tersebut, dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Implikasi $p \Rightarrow q$ ekuivalen dengan kontraposisi $\sim q \Rightarrow \sim p$.
2. Konvers $q \Rightarrow p$ ekuivalen dengan invers $\sim p \Rightarrow \sim q$.

Contoh soal 28:

Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan implikasi "Jika hari hujan maka saya membawa payung"!

Jawab:

a. Konvers: "Jika saya membawa payung maka hari hujan".

b. Invers: "Jika hari tidak hujan maka saya tidak membawa payung".

c. Kontraposisi: "Jika saya tidak membawa payung maka hari tidak hujan".

Contoh soal 29:

Diketahui $(p \wedge q) \Rightarrow r$.

Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari soal di atas!

Jawab:

a. Konvers: $r \Rightarrow (p \wedge q)$

b. Invers: $\sim (p \wedge q) \Rightarrow \sim r$

c. Kontraposisi: $\sim r \Rightarrow \sim (p \wedge q)$

Latihan 7

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari tiap implikasi berikut!
   a. Jika sulit mendapatkan bahan baku, maka hasil produksi berkurang.
   b. Jika pajak produksi makin besar, maka harga jual naik.
   c. Jika saya mempunyai uang, maka saya membeli buku.
   d. Jika $3 + 6 = 8$ maka 8 bilangan genap.
   e. Jika n bilangan ganjil maka n^2 bilangan ganjil.
2. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari tiap implikasi berikut!
   a. $p \Rightarrow \sim q$
   b. $\sim p \Rightarrow q$
   c. $\sim p \Rightarrow \sim q$
   d. $(p \wedge q) \Rightarrow r$
   e. $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$
3. Diketahui sebuah implikasi yang berbunyi "jika $3 + 4 = 8$ maka $5 + 6 = 11$".

   Buatlah konvers dari pernyataan di atas dan tentukan nilai kebenarannya!

Lembar Tugas 7

1. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari tiap implikasi berikut!
   a. Jika $x = -5$, maka $x^2 = 16$.
   b. Jika $n - 3 = 0$, maka $n^2 - n - 2 = 0$.
   c. Jika $x > 3$ maka $x^2 > 9$.
   d. Jika $6 > 10$ maka $-6 < -10$.
   e. Jika suatu bilangan adalah bilangan genap maka bilangan itu merupakan kelipatan 2.
2. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari tiap implikasi berikut!
   a. $p \Rightarrow (\sim q \wedge \sim r)$
   b. $(\sim p \vee q) \Rightarrow r$
   c. $p \Rightarrow (\sim q \vee \sim r)$
   d. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim r$
   e. $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$

1.4 Menerapkan Modus Ponens, Modus Tollens, dan Prinsip Silogisme dalam Menarik Kesimpulan

Penarikan kesimpulan dari beberapa pernyataan benar yang diketahui (premis) disebut dengan *argumentasi*. Melalui aturan tertentu, dapat diturunkan suatu pernyataan baru yang ditarik dari premis-premis semula. Pernyataan itu disebut kesimpulan atau *konklusi*.

Suatu argumentasi dikatakan sah, jika premis-premis dan kesimpulannya bernilai benar. Apabila premis-premis bernilai benar, tetapi kesimpulan bernilai salah, maka argumentasi tidak sah atau palsu.

Agar kesimpulan sah, ada beberapa prinsip yang digunakan dalam menarik kesimpulan, yaitu modus ponens, modus tollens, dan silogisme.

1.4.1 Modus ponens

Modus ponens adalah argumentasi yang disajikan dalam bentuk sebagai berikut.

$p \Rightarrow q$ (B)
p (B)

$\therefore\ q$ (B)

Pernyataan $p \Rightarrow q$ disebut premis 1.

Pernyataan p disebut premis 2.

Pernyataan q disebut kesimpulan atau konklusi.

Dalam bentuk implikasi, argumentasi tersebut dapat ditulis: $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$, yaitu konjungsi dari premis-premis yang berimplikasi konklusi. Argumentasi itu dikatakan sah, apabila pernyataan $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ merupakan tautologi (komponen-komponennya bernilai benar).

Untuk menguji sah atau tidaknya argumentasi, dapat digunakan tabel kebenaran, sebagai berikut.

Tabel Kebenaran Modus Ponens $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Dari tabel, tampak bahwa $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ merupakan tautologi. Jadi, modus ponens merupakan argumentasi yang sah.

Contoh soal 30:

$p \Rightarrow q$: Jika suatu bilangan habis dibagi empat, maka bilangan itu adalah bilangan genap.
p : 20 habis dibagi empat.

$\therefore\ q$: 20 bilangan genap.

Contoh soal 31:

$p \Rightarrow q$: Jika Arfenda seorang pegawai negeri, maka ia mendapat gaji bulanan.
p : Arfenda seorang pegawai negeri.

$\therefore\ q$: Arfenda mendapat gaji bulanan.

1.4.2 Modus tollens

Modus tollens adalah argumentasi yang bentuknya dinyatakan sebagai berikut.

$p \Rightarrow q$ (B)
$\sim q$ (B)

$\therefore\ \sim p$ (B)

Dalam bentuk implikasi, modus tollens dapat ditulis sebagai: $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$.

Sah atau tidaknya suatu modus tollens dapat diuji dengan tabel kebenaran.

Tabel Kebenaran Modus Tollens $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

Dari tabel, tampak bahwa $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ merupakan tautologi. Jadi, modus tollens merupakan argumentasi yang sah.

Contoh soal 32:

$p \Rightarrow q$: Jika hari ini hari Minggu, maka Vega lari pagi.
$\sim q$: Vega tidak lari pagi.

$\therefore\ \sim p$: Hari ini bukan hari Minggu.

Contoh soal 33:

$p \Rightarrow q$: Jika harga barang naik, maka permintaan barang turun.
$\sim q$: Permintaan barang tidak turun.

$\therefore\ \sim p$: Harga barang tidak naik.

1.4.3 Silogisme

Silogisme adalah argumentasi yang bentuknya dinyatakan sebagai berikut.

$p \Rightarrow q$ (B)
$q \Rightarrow r$ (B)

$\therefore\ p \Rightarrow r$ (B)

Dalam bentuk implikasi, silogisme dapat ditulis sebagai: $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Sah atau tidaknya suatu silogisme dapat diuji dengan tabel kebenaran, seperti yang tampak pada tabel kebenaran silogisme berikut.

Tabel Kebenaran Silogisme $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	B	S	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B

Dari tabel, tampak bahwa $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ merupakan tautologi. Jadi, silogisme merupakan argumentasi yang sah.

Contoh soal 34:

$p \Rightarrow q$: Jika ia pedagang, maka ia menjual barang.

$q \Rightarrow r$: Jika ia menjual barang, maka ia mendapat laba.

$\therefore p \Rightarrow r$: Jika ia pedagang, maka ia mendapat laba.

Contoh soal 35:

$p \Rightarrow q$: Jika Vega meniup seruling di bawah pohon, maka Renti duduk di pinggir kolam.

$q \Rightarrow r$: Jika Renti duduk di pinggir kolam, maka ia akan masuk angin.

$\therefore p \Rightarrow r$: Jika Vega meniup seruling di bawah pohon, maka Renti akan masuk angin.

Contoh soal 36:

Periksalah, sah atau tidak argumentasi berikut!

Jika Bagio seorang pelawak, maka ia bertampang lucu.

Bagio bertampang lucu.

Jadi, Bagio adalah pelawak.

Jawab:

p : Bagio seorang pelawak.

q : Bagio bertampang lucu.

Argumentasi pada soal di atas dapat disusun sebagai berikut.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \quad q \\ \hline \therefore \; p \end{array}$$

Untuk mengujinya, digunakan tabel kebenaran, sebagai berikut.

Tabel Kebenaran $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	B	S
S	S	B	S	B

Dari tabel tersebut, tampak bahwa $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ bukan merupakan tautologi. Jadi, argumentasi di atas tidak sah atau palsu.

Latihan 8

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Periksalah sah atau tidak argumentasi berikut!
   a. Jika ada gula maka ada semut.
      Tidak ada semut.
      $\therefore$ Tidak ada gula.
   b. Jika gunung berapi akan meletus, maka udara di sekitarnya panas.
      Binatang yang hidup di gunung turun.
      $\therefore$ Gunung berapi akan meletus.
   c. Jika harga barang tinggi, maka upah buruh tinggi.
      Jika upah buruh tinggi, maka terjadi inflasi.
      $\therefore$ Jika harga barang tinggi, maka terjadi inflasi.
   d. Jika setiap orang bekerja keras, maka uang-nya banyak.
      Arfenda bekerja keras.
      $\therefore$ Arfenda uangnya banyak.

e. Jika hari hujan, maka pejalan kaki memakai payung.
Pejalan kaki memakai payung.
____
$\therefore$ Hari hujan.

2. Dengan menggunakan tabel kebenaran, periksalah sah atau tidak tiap argumentasi berikut!

a. $p \Rightarrow q$
$\sim p$
______
$\therefore \sim q$

b. $p \Rightarrow q$
$q \Rightarrow \sim r$
______
$\therefore p \Rightarrow \sim r$

Lembar Tugas 8

1. Tentukan kesimpulan dari premis berikut!
   a. Premis 1 : jika mendapat marah, maka sakit hati.
      Premis 2 : tidak sakit hati.
   b. Premis 1 : jika harga barang tinggi, maka upah buruh tinggi.
      Premis 2 : jika upah buruh tinggi, maka terjadi inflasi.
   c. Premis 1 : jika setiap orang bekerja keras, maka akan berhasil.
      Premis 2 : Surya bekerja keras.
2. Dengan menggunakan tabel kebenaran, periksalah sah atau tidak argumentasi berikut!

a. $\sim q \Rightarrow q$
$q \vee \sim p$
$\therefore q$

b. $p \vee q$
p
$\therefore \sim p$

INFO MATEMATIKA

Bertrand Russell (1872 - 1970) adalah seorang penggerak sosial, matematikawan, dan filsuf Inggris kelahiran Trelleck, Wales. Russel tidak mendapatkan pendidikan dasar sampai tingkat lanjutan atas secara formal. Pendidikan ini diberikan oleh sejumlah pengajar privat wanita dari Swiss dan Jerman serta para tutor Inggris.

Jasa Russel yang terbesar di bidang ilmiah terutama dalam pengembangan logika, yang lazim disebut metalogika (logika mengenai pertimbangan dan perkembangan logika itu sendiri). Pandangannya dimuat dalam karyanya bersama Alfred North Whitehead, berjudul Principia Mathematica (Jilid I-III, 1910 - 1913).

(Sumber: Ensiklopedi Nasional Indonesia)

Rangkuman

1. *Pernyataan* adalah kalimat yang hanya benar saja atau salah saja, tetapi tidak sekaligus benar dan salah. Jika kalimat tersebut tidak memuat nilai benar atau salah, maka disebut *bukan pernyataan*.
2. Suatu pernyataan dapat bernilai benar atau bernilai salah, dapat ditunjukan dalam dua cara :
   a. *Dasar empiris* yaitu berdasarkan fakta yang kita jumpai sehari-hari.
   b. *Dasar tak empiris* yaitu berdasarkan bukti-bukti atau perhitungan-perhitungan dalam matematika.
3. *Kalimat terbuka* adalah kalimat yang masih mengandung peubah atau variabel, sehingga belum dapat ditentukan benar atau salah.
4. *Pernyataan majemuk* adalah pernyataan baru yang dibentuk dari beberapa pernyataan tunggal dengan menggunakan kata penghubung.
5. Ingkaran atau negasi

   Jika diketahui sebuah pernyataan, kita dapat membentuk pernyataan baru dengan membubuhkan kata *tidak benar bahwa* ... sebelum pernyataan itu atau menyisipkan kata *tidak* atau *bukan* pada pernyataan itu. Pernyataan baru yang diperoleh dengan cara seperti itu disebut *ingkaran* atau *negasi* dari pernyataan semula.

   Jika p adalah sebuah pernyataan yang diketahui, ingkaran dari p dapat ditulis dengan lambang $\sim p$ (dibaca: tidak benar bahwa p atau bukan p)

Jika p pernyataan yang bernilai benar, maka ingkaran p bernilai salah dan jika p pernyataan bernilai salah, maka ingkaran p bernilai benar.

6. Dua buah pernyataan yang dirangkai dengan kata penghubung "dan" disebut *konjungsi*. Dengan demikian, kita dapat mendefinisikan konjungsi, sebagai berikut. *Konjungsi* dari dua buah pernyataan p dan q adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari pernyataan p dan q dengan menggunakan kata penghubung "dan".

   Kata "dan" dalam konjungsi dapat juga diganti dengan "tetapi", "walaupun", "meskipun", "namun demikian" yang digunakan pada saat tertentu dan harus bermakna sama dengan kata "dan".
7. Pernyataan majemuk "Luas persegi panjang adalah panjang kali lebar atau 2 + 6 = 10". Pernyataan majemuk tersebut terdiri dari dua pernyataan tunggal yang dirangkai dengan kata penghubung "atau". Dua buah pernyataan yang dirangkai dengan cara seperti itu disebut *disjungsi*. Jadi, *disjungsi* dari dua buah pernyataan p dan q adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari pernyataan p dan q yang dirangkai dengan kata penghubung "atau".
8. *Implikasi* adalah pernyataan majemuk yang disusun dari dua buah pernyataan p dan q dalam bentuk "jika p maka q".
9. Dua buah pernyataan p dan q dengan menggunakan kata penghubung "jika dan hanya jika". Pernyataan majemuk seperti itu disebut biimplikasi atau implikasi dwiarah atau pernyataan ekuivalen.
10. Penarikan kesimpulan dari beberapa pernyataan benar yang diketahui (premis) disebut dengan *argumentasi*. Melalui aturan tertentu, dapat diturunkan suatu pernyataan baru yang ditarik dari premis-premis semula. Pernyataan itu disebut kesimpulan atau *konklusi*.

    Suatu argumentasi dikatakan sah, jika premis-premis dan kesimpulannya bernilai benar. Apabila premis-premis bernilai benar, tetapi kesimpulan bernilai salah, maka argumentasi tidak sah atau palsu. Agar kesimpulan sah, ada beberapa prinsip yang digunakan dalam menarik kesimpulan, yaitu modus ponens, modus tollens, dan silogisme.

Evaluasi

A. Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Di antara kalimat berikut, yang bukan kalimat terbuka adalah ... .
   a. $2x \neq 8$
   b. $x > 3x$
   c. $2x^2 - 1 = 3$
   d. $2 - 4 = 5$
   e. $x^2 - x + 1 = 0$
2. Ingkaran dari kalimat "Semua murid menganggap matematika sulit" adalah ... .
   a. Beberapa murid menganggap matematika sulit
   b. Semua murid menganggap matematika mudah
   c. Ada murid yang menganggap matematika tidak sulit
   d. Tidak seorang pun murid yang menganggap matematika sulit
   e. Ada murid yang tidak menganggap matematika mudah
3. Kalimat ingkaran dari "Ada ikan yang tidak bertelur" adalah ... .
   a. Tidak semua ikan bertelur
   b. Tidak semua ikan tidak bertelur
   c. Beberapa ikan tidak bertelur
   d. Semua ikan bertelur
   e. Semua ikan tidak bertelur
4. Pernyataan di bawah ini yang bernilai salah adalah ... .
   a. $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$
   b. $x = -3 \Rightarrow x^2 = 9$
   c. $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$
   d. $x^2 = 9 \Rightarrow x = -3$
   e. $x^2 = 9 \Rightarrow x \neq 3$
5. Diketahui pernyataan majemuk $(p \wedge q)$ mempunyai nilai kebenaran B (benar), maka dapat disimpulkan bahwa ... .
   a. p benar, q salah
   b. p salah, q benar
   c. p benar, q benar

d. p dan q keduanya salah
e. p atau q bernilai benar

6. Diketahui pernyataan:
p : Arfenda seorang pelajar.
q : Arfenda tidak rajin belajar.
Pernyataan majemuk "Arfenda seorang pelajar dan rajin belajar" dapat dilambangkan dengan ... .
a. $p \wedge q$
b. $p \vee q$
c. $p \wedge \sim q$
d. $p \vee \sim q$
e. $\sim p \wedge q$

7. Pernyataan biimplikasi yang bernilai benar dari tiap kalimat berikut adalah ... .
a. $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$
b. $x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x < 1$
c. $x = 3 \Leftrightarrow x^2 = 9$
d. $x = y \Leftrightarrow {}^-x = {}^-y$
e. $x > y \Leftrightarrow {}^-x = {}^-y$

8. Jika p dan q dua buah pernyataan yang bernilai benar, maka pernyataan majemuk berikut yang salah adalah ... .
a. Jika p, maka tidak q
b. Jika tidak p, maka tidak q
c. Jika tidak q, maka tidak p
d. Jika q, maka p
e. Jika tidak q, maka p

9. Diketahui:
p : Nadia makan bubur.
q : Nadia makan nasi.
r : Nadia minum air putih.
Pernyataan majemuk "Jika Nadia tidak makan bubur maka ia makan nasi dan jika Nadia makan nasi maka ia minum air putih" dapat dinyatakan dengan lambang ... .
a. $(\sim p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q)$
b. $(\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$
c. $(\sim p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$
d. $(p \Rightarrow \sim q) \wedge (q \Rightarrow r)$
e. $(p \Rightarrow \sim q) \wedge (r \Rightarrow q)$

10. Semua kemungkinan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk $\sim(p \vee q) \Rightarrow p$ adalah ... .
a. BBBB
b. BBBS
c. BBSS
d. BSSS
e. SBBB

11. Pernyataan $(p \vee q) \Rightarrow p$ bernilai salah, jika ... .
a. p benar dan q benar
b. p benar dan q salah
c. p salah dan q benar
d. p salah dan q salah
e. p dan q keduanya salah

12. Negasi dari pernyataan "Jika $x = 3$, maka $x^2 = 9$" adalah ... .
a. $x \neq 3$ dan $x^2 \neq 9$
b. $x = 3$ dan $x^2 \neq 9$
c. $x \neq 3$ dan $x^2 = 9$
d. $x \neq 3$ atau $x^2 \neq 9$
e. jika $x \neq 3$, maka $x^2 \neq 9$

13. "Jika Rentia rajin belajar, maka Rentia naik kelas". Invers dari pernyataan tersebut adalah ... .
a. Jika Rentia tidak rajin belajar, maka Rentia tidak naik kelas
b. Jika Rentia rajin belajar, maka Rentia tidak naik kelas
c. Jika Rentia tidak naik kelas, maka Rentia tidak rajin belajar
d. Jika Rentia tidak naik kelas, maka Rentia rajin belajar
e. Jika Rentia naik kelas, maka Rentia tidak naik kelas

14. Kontraposisi dari pernyataan implikasi $p \Rightarrow (p \vee \sim q)$ adalah ... .
a. $\sim p \Rightarrow (\sim p \wedge q)$
b. $(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim p$
c. $(\sim p \wedge q) \Rightarrow p$
d. $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim p$
e. $(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$

15. Konvers dari pernyataan "Jika ia lulus EBTA maka ia pergi ke Bali" adalah ... .
a. Jika ia tidak lulus EBTA, maka ia tidak pergi ke Bali
b. Jika ia tidak pergi ke Bali, maka ia tidak lulus EBTA
c. Jika ia pergi ke Bali, maka ia lulus EBTA
d. Jika ia tidak pergi ke Bali, maka ia lulus EBTA
e. Jika ia lulus EBTA, maka ia tidak pergi ke Bali

16. Pernyataan implikasi $p \Rightarrow \sim q$ ekuivalen dengan pernyataan ... .
a. $p \Rightarrow q$
b. $\sim p \Rightarrow \sim q$
c. $\sim p \Rightarrow q$
d. $q \Rightarrow \sim p$
e. $q \Rightarrow p$

17. Jika suatu bilangan habis dibagi 5 maka bilangan itu habis dibagi 3.
15 habis dibagi 5
$\therefore$ 15 habis dibagi 3
Jenis penarikan kesimpulan seperti di atas dinamakan ... .
a. modus ponens
b. modus tollens
c. silogisme
d. kontraposisi
e. konvers

18. Perhatikan pernyataan berikut!
Jika saya jujur, maka usaha saya berhasil.
Jika usaha saya berhasil, maka hidup saya senang.

Kesimpulan yang dapat ditarik dari kedua premis itu adalah ... .

a. Jika saya jujur, maka usaha saya berhasil
b. Jika hidup saya senang, maka saya jujur
c. Jika usaha saya berhasil, maka saya jujur
d. Jika usaha saya berhasil, maka hidup saya senang
e. Jika saya jujur, maka hidup saya senang

19. Diketahui dua buah premis:
(i) Jika Suryati seorang pelari, maka ia berbadan kekar.
(ii) Suryati tidak berbadan kekar.
Kesimpulan yang dapat ditarik dari kedua premis tersebut adalah ... .
a. Suryati seorang pelari
b. Suryati bukan seorang pelari
c. Suryati berbadan kekar
d. Suryati tidak berbadan kekar
e. Tidak dapat diambil kesimpulan yang sah

20. Diketahui tiga buah premis, sebagai berikut.
(i) Jika hari panas, maka saya merasa gerah.
(ii) Jika saya merasa gerah, maka saya keluar keringat.
(iii) Hari panas.
Kesimpulan yang dapat ditarik dari ketiga premis tersebut adalah ... .
a. Hari tidak panas
b. Saya tidak kegerahan
c. Saya tidak keluar keringat
d. Saya kegerahan
e. Saya keluar keringat

B. Kerjakanlah soal-soal berikut ini!

1. Berilah masing-masing dua contoh dari:
a. kalimat terbuka;
b. pernyataan!

2. Diketahui:
p : Baju Nadia bagus.
q : $(2^4)^5 = 2^{20}$.
Tulislah pernyataan berikut!
a. $p \vee q$
b. $\sim p \wedge q$
c. $p \Rightarrow q$
d. $p \Rightarrow \sim q$

3. Tentukan kalimat-kalimat berikut, merupakan pernyataan atau bukan!
a. Ia anak yang pandai.
b. Semua ikan hidup di air.
c. Tokyo ibu kota Jepang.
d. Tidak boleh merokok.
e. Dia anggota karang taruna.

4. Tentukan ingkaran dari pernyataan berikut!
a. $3 + 4 > 5$.
b. Jika ada awan, maka turun hujan.
c. Pangkat tiga dari suatu bilangan negatif selalu positif.
d. Ikan hiu bernapas dengan insang.
e. Setiap planet mempunyai satelit.

5. Buatlah tabel kebenaran dari notasi berikut!
a. $\sim(p \wedge q) \Rightarrow q$
b. $(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$
c. $(p \vee q) \Leftrightarrow q$
d. $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r)$
e. $(\sim p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \wedge r)$

6. Tentukan x agar pernyataan-pernyataan berikut benar!
a. $x^2 - 4x + 4 = 0$ dan Bandung ibu kota Jawa Barat.
b. $2x - 10 > 0$, $x \in A$ dan garam rasanya manis.
c. $\left(\frac{1}{9}\right)^{3x} = 3^{-5}$, $x \in R$ dan batu merupakan benda padat.

7. Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut!
a. $-3 < -5$ atau $\log 10 < 2$.
b. $3 + 5 = 12$ atau Surabaya ibu kota Jawa Tengah.
c. Jika ikan bernapas dengan insang maka $2 + 5 < 8$.

Bab 2

Fungsi

Kelas XI

Sumber: www.ktb.co.id/imagestotalsales_id.gif

Pada gambar grafik di samping memperlihatkan total penjualan mobil dari sebuah perusahaan mobil di Indonesia dari tahun 1995-2007. Dengan bantuan grafik ini, perusahaan tersebut dapat mengetahui total penjualan mobil dari tahun ke tahun, apakah terjadi peningkatan atau terjadi penurunan. Gambar grafik tersebut merupakan contoh dari penerapan suatu fungsi yang diaplikasikan dalam dunia bisnis.

Untuk lebih memahami materi dan dapat mengaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, maka marilah kita pelajari materi ini dengan saksama!

Peta Konsep

Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan fungsi linear dan fungsi kuadrat

→

- Pengertian relasi dan fungsi
- Sifat-sifat fungsi (injektif, surjektif, bijektif)
- Bentuk umum fungsi linear
- Grafik fungsi linear
- Persamaan garis lurus yang melalui satu titik dengan gradien tertentu
- Persamaan garis lurus yang melalui dua titik
- Titik potong dua buah garis lurus yang diketahui persamaannya
- Syarat hubungan dua garis berpotongan tegak lurus
- Syarat hubungan dua garis sejajar
- Bentuk umum fungsi kuadrat
- Titik potong grafik fungsi dengan sumbu koordinat
- Sumbu simetri dan nilai ekstrim suatu fungsi titik ekstrim
- Menentukan persamaan fungsi kuadrat jika diketahui grafik atau unsur-unsurnya
- Penerapan fungsi pada fungsi permintaan, penawaran, dan keseimbangan pasar
- Pembuatan kurva permintaan, penawaran, dan keseimbangan pasar
- Penerapan fungsi pada biaya dan penerimaan
- Perhitungan analisis pulang pokok (BEP)

→

Menggunakan fungsi, persamaan fungsi linear dan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah kejuruan

2.1 Mendeskripsikan Perbedaan Konsep Relasi dan Fungsi

2.1.1 Relasi

Penggunaan kata *relasi* dalam kehidupan sehari-hari berarti hubungan. Hubungan itu bisa berarti hubungan keluarga, teman atau kerabat, ataupun hubungan bisnis dan kerja.

Kata *relasi* dalam matematika berarti hubungan atau pasangan tertentu antara dua buah himpunan yang bisa dinyatakan dalam suatu diagram, baik diagram panah maupun diagram Cartesius.

Contoh soal 1:

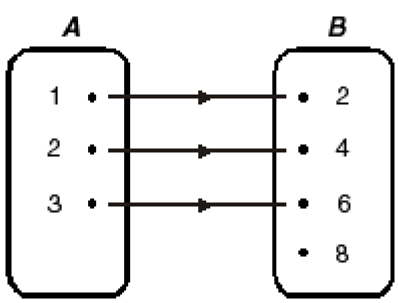
Diketahui $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Relasi antara himpunan A dan himpunan B dalam relasi "B dua kali A" dapat dinyatakan dalam diagram panah $R : A \rightarrow B$.

Jawab:

Diketahui: $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

$R : A \rightarrow B$



Hubungan antara diagram panah tersebut adalah:

A disebut daerah asal (*domain*) = {1, 2, 3};

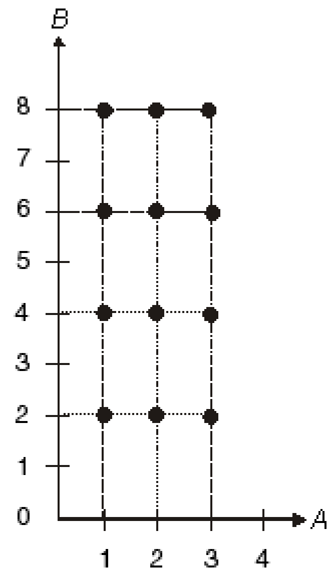
B disebut daerah kawan (*kodomain*) = {2, 4, 6, 8};

{2, 4, 6} disebut daerah hasil (*range*).

Jika himpunan A dikalikan dengan himpunan B, diperoleh:

$$A \times B = \{1, 2, 3\} \times \{2, 4, 6, 8\}$$
$$= \{(1,2), (1,4), (1,6), (1,8), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,2), (3,4), (3,6), (3,8)\}$$

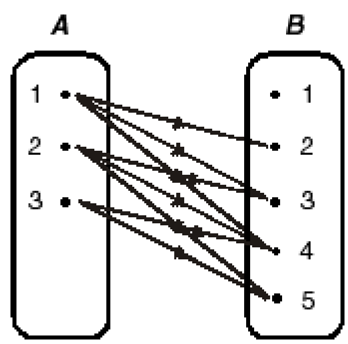
Hasil perkalian himpunan A dengan himpunan B dapat digambarkan dalam suatu diagram Cartesius (lihat gambar berikut ini!).



Contoh soal 2:

Diketahui $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nyatakan dalam diagram panah, relasi $R : A \rightarrow B$ yang menyatakan relasi "kurang dari"!

Jawab:



Himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ disebut daerah asal (*domain*).

Himpunan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ disebut daerah kawan (*kodomain*).

{2, 3, 4, 5} disebut daerah hasil (*range*).

2.1.2 Fungsi atau pemetaan

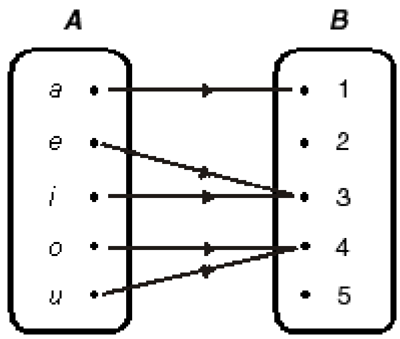
Fungsi f atau *pemetaan f* dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi khusus yang memasangkan setiap anggota atau elemen A dengan tepat satu anggota B.

Suatu fungsi atau pemetaan dapat ditulis dengan notasi:
$f : A \rightarrow B$, dibaca f memetakan A ke B atau fungsi f dari A ke B.

Jadi, anggota B bisa saja berpasangan dengan satu atau lebih anggota A atau bisa juga tidak mendapat pasangan anggota A. Sementara itu, anggota himpunan A harus mempunyai tepat satu dan hanya satu pasangan pada anggota B.

Contoh soal 3:

Diketahui $A = \{a, e, i, o, u\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $f : A \to B$ dinyatakan dalam diagram panah berikut.



> Diagram panah di atas merupakan suatu fungsi, sebab semua anggota A terpetakan ke B dengan tepat satu.
> 1. Himpunan $A = \{a, e, i, o, u\}$ disebut daerah asal atau domain.
> 2. Himpunan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ disebut daerah kawan (*kodomain*)
> 3. $\{1, 3, 4\}$ disebut daerah hasil atau daerah jelajah (*range*).

Contoh soal 4:

Sebuah perusahaan sepatu menawarkan sepatu seragam ke salah satu SMK dengan ukuran nomor 38, 39, 40, dan 41. Empat orang siswa telah melakukan pengukuran, antara lain:

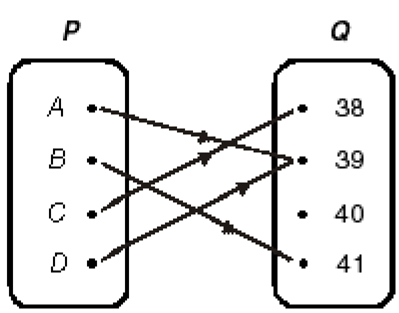
Ahmad	nomor sepatu 39
Bahrun	nomor sepatu 41
Cecilia	nomor sepatu 38
Dorin	nomor sepatu 39

Buatlah diagram panah dari masalah ukuran sepatu tersebut!

Jawab:

Dari ukuran sepatu keempat siswa tersebut, dapat dibuat diagram dengan ketentuan sebagai berikut.

A, B, C, dan D masing-masing nama keempat siswa, dimasukkan dalam himpunan P, sedangkan nomor-nomor sepatu yang tersedia dimasukkan dalam himpunan Q.



Relasi ukuran sepatu pada diagram di atas merupakan fungsi, sebab setiap P hanya mempunyai tepat satu pasangan anggota Q dan semua anggota P terpetakan ke Q. Dari diagram panah tersebut, dapat diperoleh hasil:

$P = \{A, B, C, D\}$ adalah daerah asal (*domain*);

$Q = \{38, 39, 40, 41\}$ adalah daerah kawan (*kodomain*);

$\{38, 39, 41\}$ adalah daerah jelajah atau daerah hasil atau *range*.

Contoh soal 5:

Diketahui $A = \{x \mid x < 5; x \text{ bilangan asli}\}$. Tentukan $f : A \to A$ dengan $f(x) = 2x + 3$!

Jawab:

Diketahui: $A = \{x \mid x < 5; x \text{ bilangan asli}\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$$f(x) = 2x + 3$$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2(2) + 3 = 4 + 3 = 7$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = 2(3) + 3 = 6 + 3 = 9$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = 2(4) + 3 = 8 + 3 = 11$

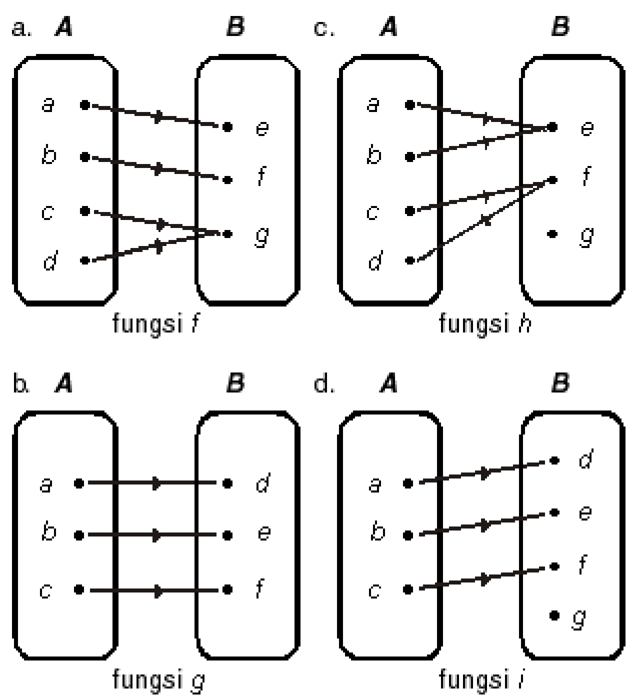
Jadi, daerah asal (*domain*) $= \{1, 2, 3, 4\}$ dan daerah hasil (*range*) $= \{5, 7, 9, 11\}$.

2.1.3 Sifat-sifat fungsi

Beberapa sifat fungsi ialah sebagai berikut.

A. Fungsi surjektif

Untuk memahami fungsi surjektif, perhatikan contoh pada gambar 2.1!



Gambar 2.1

Pada gambar 2.1, fungsi *f* dan fungsi *g* adalah contoh *fungsi surjektif* atau *fungsi onto* atau *fungsi kepada,* fungsi *h* dan fungsi *i bukan* contoh fungsi surjektif, tetapi *fungsi into* atau *fungsi ke dalam*. Dari penjelasan tersebut, dapat disimpulkan bahwa suatu fungsi dapat dikategorikan sebagai fungsi surjektif atau bukan, tergantung pada habis atau tidaknya elemen kodomain (*B*) terpasangkan.

Apabila dalam suatu fungsi elemen kodomain habis terpasangkan, maka fungsi tersebut merupakan fungsi surjektif. Apabila dalam suatu fungsi elemen kodomain tidak habis terpasangkan, maka fungsi tersebut bukan fungsi surjektif, tetapi fungsi into.

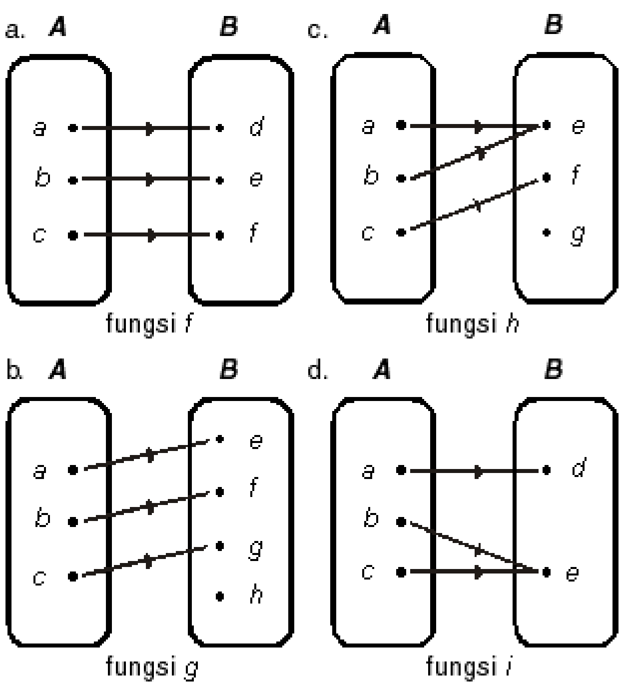
Berikut ini definisi dari fungsi surjektif atau fungsi onto dan fungsi into.

(1) Fungsi $f : A \to B$ disebut *fungsi surjektif* atau *fungsi onto* atau *fungsi kepada*, jika dan hanya jika daerah hasil fungsi *f* sama dengan himpunan *B* atau $R_f = B$.

(2) Fungsi $f : A \to B$ disebut *fungsi into* atau *fungsi ke dalam*, jika dan hanya jika daerah hasil fungsi *f* merupakan himpunan bagian dari himpunan *B* atau $R_f \subset B$.

B. Fungsi injektif

Untuk memahami fungsi injektif, perhatikan contoh pada gambar 2.2!



Gambar 2.2

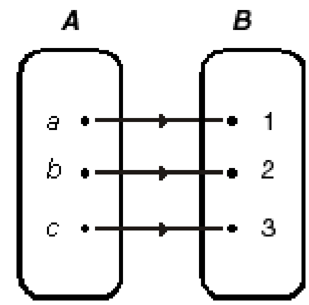
Pada gambar 2.2, fungsi *f* dan fungsi *g* adalah contoh fungsi injektif. Fungsi *h* dan fungsi *i bukan* contoh fungsi injektif.

Dari gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa fungsi injektif adalah fungsi satu-satu.

Berikut ini definisi dari fungsi injektif atau fungsi satu-satu.

Fungsi $f : A \to B$ disebut *fungsi injektif* atau *fungsi satu-satu*, jika dan hanya jika untuk tiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$. Atau setiap anggota domain mempunyai pasangan atau peta yang berbeda.

C. Fungsi bijektif



Gambar 2.3

Contoh fungsi bijektif dapat dilihat pada gambar 2.1(b), gambar 2.2(a), dan gambar 2.3.

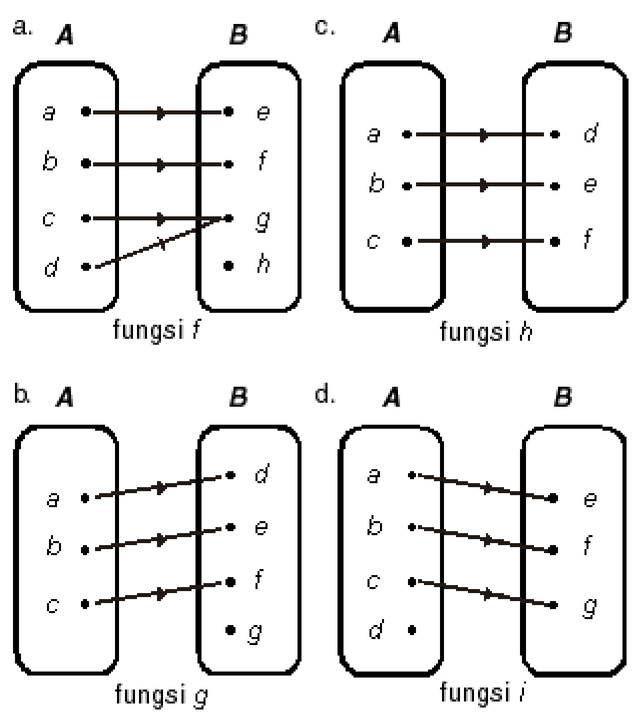
Dari penjelasan tersebut, dapat disimpulkan bahwa suatu fungsi merupakan *fungsi bijektif*, jika memenuhi sifat *surjektif* dan memenuhi sifat *injektif*. Fungsi bijektif disebut juga *korespondensi satu-satu*.

Berikut ini definisi dari fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu.

Fungsi $f : A \to B$ disebut *bijektif*, jika dan hanya jika fungsi *f* merupakan fungsi *surjektif* sekaligus merupakan fungsi *injektif*.

Contoh soal 6:

Manakah dari relasi-relasi berikut yang merupakan fungsi surjektif, fungsi into (fungsi ke dalam), fungsi injektif, dan fungsi bijektif?



Jawab:

a. Relasi f adalah contoh fungsi into.

b. Relasi g adalah contoh fungsi into dan injektif.

c. Relasi h adalah contoh fungsi surjektif dan fungsi injektif yang disebut fungsi bijektif.

d. Relasi i *bukan* merupakan contoh fungsi karena tidak memenuhi salah satu dari sifat fungsi.

Contoh soal 7:

Tentukan domain dari fungsi-fungsi berikut supaya $f(x)$ merupakan bilangan real!

a. $f(x) = \dfrac{6}{x-1}$

b. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c. $f(x) = x^2 - x - 6$

Jawab:

a. Syarat:

Penyebut tidak boleh sama dengan 0.

$x - 1 \neq 0$ maka $x \neq 1$.

Jadi, domain (D) $= \{x \mid x \neq 1, x \in R\}$

b. Syarat:

Dibawah tanda akar harus ≥ 0.

$x^2 - 4 \geq 0$ maka $(x+2)(x-2) \geq 0$

$x \leq -2,\ x \geq 2$

Jadi, domain (D) $= \{x \mid -2 \geq x \geq 2, x \in R\}$

c. $f(x) = x^2 - x - 6$

$f(x) = (x-3)(x+2)$

Domain: semua harga x memenuhi.

Latihan 1

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Diketahui $A = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Tentukan domain, kodomain, dan range dengan hubungan:

   a. $A = B$;

   b. B lebih besar dari A;

   c. B kurang dari A!

2. Diketahui $A = \{x \mid x < 4; x \text{ bilangan asli}\}$. Nyatakan $R : A \to B$ untuk relasi:

   a. lebih besar;

   b. lebih kecil!

3. Diketahui $f(x) = x^2 - 2$. Tentukan nilai berikut!

   a. $f(3)$

   b. $f(-1)$

   c. $f(1)$

   d. $f(-3)$

4. Diketahui $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

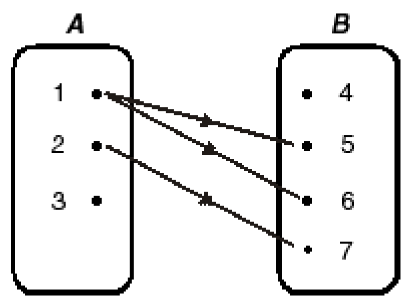
   a. Tentukan $R : x \to x^2 + 5$!

   b. Gambarkan dengan diagram panah!

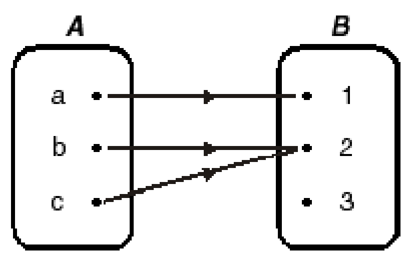
   c. Tentukan daerah hasil atau daerah jelajahnya!

5. Dari diagram berikut, manakah yang merupakan fungsi?

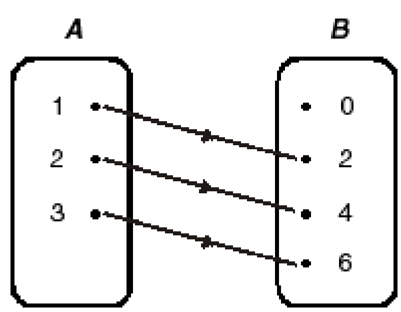
a.



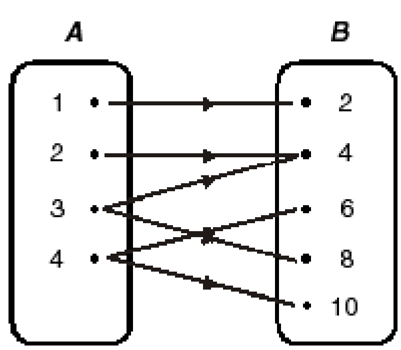
b.



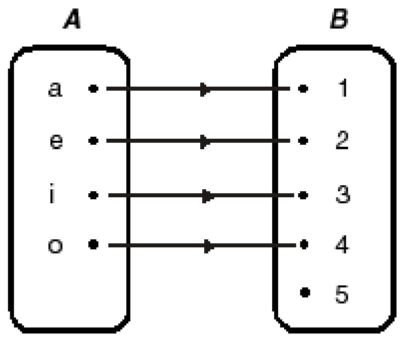
c.



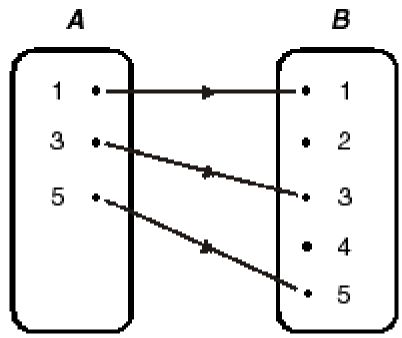
d.



e.



f.



6. Tentukan himpunan pasangan terurut dari fungsi-fungsi di bawah ini dan selidiki apakah fungsi-fungsi di bawah ini merupakan fungsi injektif, surjektif, atau bijektif!
   a. A = {0, 2, 4}; B = {1, 5, 9}; dan $f : x \to x^2 + 1$
   b. P = {1, 3, 5, 7}; Q = {2, 4, 6, 8, 10}; dan $f : x \to x + 1$
   c. M = {– 3, – 2, –1, 0, 1, 2}; N = {0, 1, 4, 9}; dan $f : x \to x^2$

Lembar Tugas 1

1. Diketahui fungsi $f : R \to R$ dengan rumus $f(x) = -2x^2 + 2x + 3$.

   Hitunglah:

   a. $f(-3)$,   d. $f(0)$,
   b. $f(-2)$,   e. $f(5)$!
   c. $f(1)$,

2. Tentukan daerah asal supaya tiap $f(x)$ berikut merupakan bilangan real!

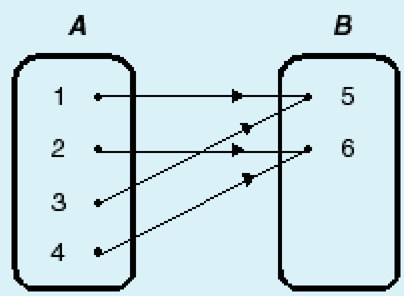
   a. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$
   b. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$
   c. $f(x) = \dfrac{7}{6x^2 - 7x + 2}$
   d. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x^2 + 1}$

3. Misal $f(x) = x^2 - 5x + 8$. Jika $f(a) = 2$, tentukan nilai a!

4. Diketahui fungsi $f : R \to R$ dengan rumus $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

   a. Jika daerah asalnya (domain) adalah $A = \{x \mid 0 \le x \le 5, x \in R\}$ tentukan daerah hasilnya (range)!
   b. Jika daerah asalnya (domain) adalah $A = \{x \mid x < 1 \text{ atau } x > 5, x \in R\}$, tentukan rangenya!

5. Selidikilah diagram di bawah ini, apakah merupakan fungsi injektif, surjektif, atau bijektif? Jelaskan alasan Anda!



2.2 Menerapkan Konsep Fungsi Linear

2.2.1 Bentuk umum fungsi linear

Bentuk umum fungsi linear adalah sebagai berikut :

$$y = ax + b \quad \text{atau}$$
$$y = mx + c$$

Keterangan:

a, m = gradien atau koefisien arah

b, c = konstanta

Ada dua bentuk fungsi linear, yaitu:

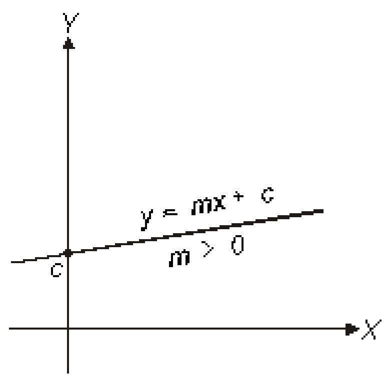
1. $y = ax + b$ atau $y = mx + c$, disebut bentuk eksplisit;

2. $ax + by + c = 0$ atau $mx + ny + c = 0$, disebut bentuk implisit.

Disebut *fungsi linear* karena dua peubah atau variabel yang ada, yaitu x dan y masing-masing berpangkat satu. x disebut peubah atau *variabel bebas*, sedangkan y disebut peubah atau *variabel terikat*. Karena kedua peubah berpangkat satu, maka hubungan antara kedua peubah tersebut dapat digambarkan dalam suatu diagram Cartesius dan berbentuk garis lurus.

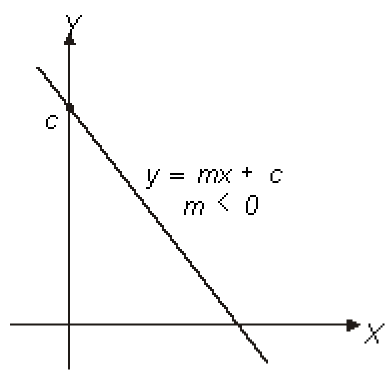
Perhatikan gambar 2.4! Arah dari grafik fungsi linear atau garis lurus ditentukan oleh gradien atau koefisien arah, yaitu a dan m.

1. Jika a atau m lebih besar dari nol, arah garis lurus adalah dari kiri bawah ke kanan atas. (lihat Gambar 2.4 a)



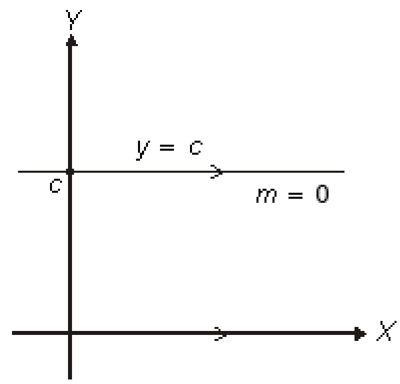
Gambar 2.4 (a)

2. Jika a atau m lebih kecil dari nol, arah garis lurus adalah dari kiri atas ke kanan bawah. (lihat Gambar 2.4 b)



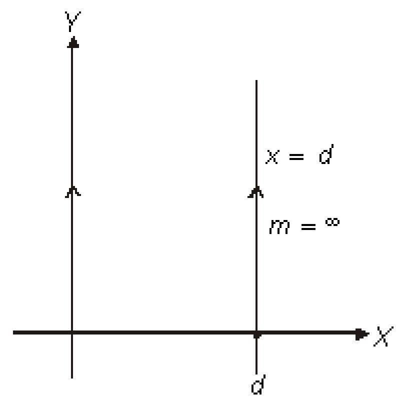
Gambar 2.4 (b)

3. Jika a atau m sama dengan nol, arah garis lurus adalah sejajar sumbu X. (lihat Gambar 2.4 c)



Gambar 2.4 (c)

4. Jika a atau m sama dengan tak terhingga, arah garis lurus adalah sejajar sumbu Y. (lihat Gambar 2.4 d)



Gambar 2.4 (d)

Dalam pembahasan berikutnya kita menggunakan fungsi:

$$\boxed{y = mx + c}$$

disebut juga dengan persamaan garis lurus.

2.2.2 Menggambar grafik fungsi linear

Cara yang paling mudah dalam menggambar grafik sebuah fungsi linear adalah dengan menentukan dua buah titik sembarang sesuai dengan fungsi yang diketahui. Dua buah titik tersebut dipilih dari nilai x atau peubah bebas, lalu menghitung nilai y berdasarkan fungsi yang diketahui. Jika kedua titik tersebut dihubungkan, terbentuk sebuah garis lurus yang merupakan grafik fungsi linear yang dimaksud.

Contoh soal 7:

Gambarlah grafik dari fungsi-fungsi berikut!

a. $y = 2x + 6$ c. $y = x - 2$

b. $y = -3x + 3$ d. $2x + 6y = 18$

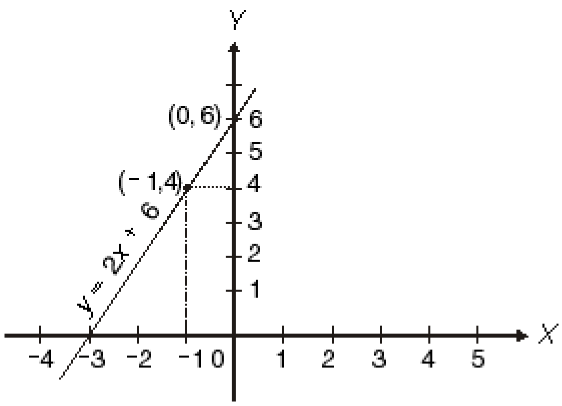
Jawab:

a. $y = 2x + 6$

Dipilih dua nilai x sembarang, misalkan $x = -1$ dan $x = 0$.

$x = -1 \Rightarrow y = 2(-1) + 6 = -2 + 6 = 4$ diperoleh titik $(-1, 4)$

$x = 0 \Rightarrow y = 2(0) + 6 = 0 + 6 = 6$ diperoleh titik $(0, 6)$

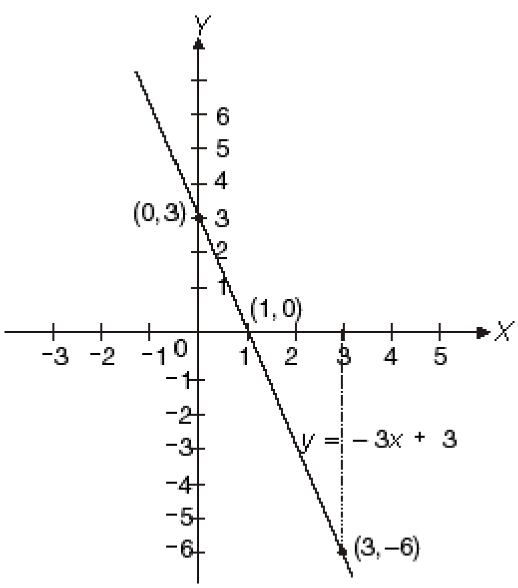


b. $y = -3x + 3$

Dipilih dua nilai x sembarang, misalkan $x = 1$ dan $x = 3$.

$x = 1 \Rightarrow y = -3(1) + 3 = -3 + 3 = 0$ diperoleh titik $(1, 0)$

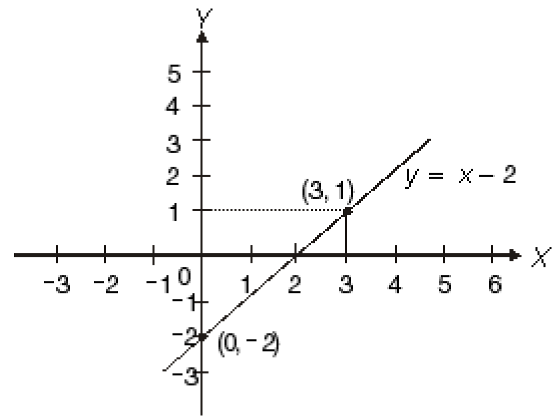
$x = 3 \Rightarrow y = -3(3) + 3 = -9 + 3 = -6$ diperoleh titik $(3, -6)$



Untuk menjawab soal c dan d, kita pergunakan tabel untuk menentukan nilai x sebarang.

c. $y = x - 2$

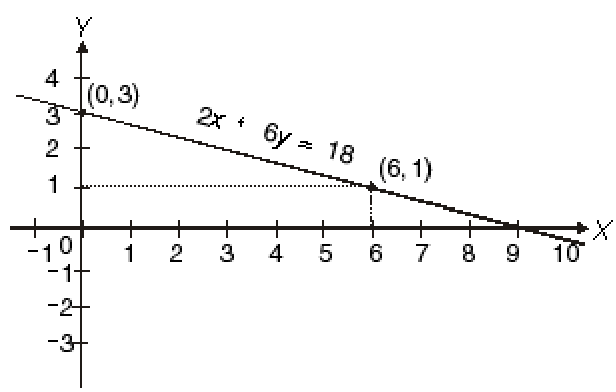
x	– 2	–1	0	1	2	3
y	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1



d. $2x + 6y = 18$ persamaan ini diubah menjadi

$6y = -2x + 18 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 3$

x	– 3	0	3	6
y	4	3	2	1



Latihan 2

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Gambarlah grafik fungsi linear berikut!

   a. $y = \frac{1}{2}x + 6$ c. $y = 2x - 6$

   b. $y = -\frac{1}{2}x + 6$

2. Gambarlah grafik fungsi linear berikut!

   a. $2x - 2y = 4$ c. $4x - 2y = -6$

   b. $3x + 6y - 12 = 0$

3. Gambarlah grafik dari persamaan garis berikut!

   a. $\frac{2x+3y}{2} = 2x - 3$ c. $\frac{1}{3}y = \frac{5}{3}x - 2$

   b. $2x - \frac{2}{3}y = 4$ d. $2y - 4x - 10 = 0$

2.2.3 Persamaan garis lurus yang melalui sebuah titik dengan gradien diketahui

Bentuk umum fungsi linear $y = mx + c$ disebut juga persamaan garis lurus. Persamaan garis lurus yang melalui sebuah titik $P(x_1,y_1)$ dengan gradien atau koefisien arah m diketahui dapat ditentukan dengan rumus:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Contoh soal 8:

Tentukan persamaan sebuah garis yang melalui titik $P(-2,3)$ dengan gradien $m = -4$!

Jawab:

$P(-2,3)$ berarti $x_1 = -2$ dan $y_1 = 3$, $m = -4$

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 3 &= -4(x - (-2)) \\ y - 3 &= -4(x + 2) \\ y - 3 &= -4x - 8 \\ y &= -4x - 8 + 3 \\ y &= -4x - 5 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis yang dimaksud adalah $y = -4x - 5$.

Selain dengan cara tersebut, persamaan garis lurus dapat juga ditentukan dengan menggunakan bentuk umum $y = mx + c$ dengan melalui titik $P(x_1,y_1)$.

$$\begin{aligned} P(-2,3) \Rightarrow y &= mx + c \\ 3 &= -4(-2) + c \\ 3 &= 8 + c \\ c &= -5 \\ y &= -4x - 5 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis yang dimaksud adalah $y = -4x - 5$.

2.2.4 Persamaan sebuah garis lurus yang melalui dua buah titik

Jika diketahui dua buah titik $P(x_1,y_1)$ dan $Q(x_2,y_2)$, persamaan garis yang melalui dua buah titik tersebut dirumuskan:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

Rumus tersebut dapat dijabarkan menjadi:

$$\boxed{y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)}$$

atau

$$\boxed{y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1) + y_1}$$

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \Rightarrow \text{disebut gradien atau koefisien arah.}$$

Selain cara di atas, cara lainnya ialah dengan menghitung gradien (m) lebih dahulu, kemudian menggunakan rumus:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Contoh soal 9:

Diketahui dua buah titik, masing-masing $P(-5,2)$ dan $Q(1,4)$. Tentukan persamaan garis PQ!

Jawab:

$P(-5,2) \Rightarrow x_1 = -5$ dan $y_1 = 2$

$Q(1,4) \Rightarrow x_2 = 1$ dan $y_2 = 4$

(posisi (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) boleh ditukar)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 2}{4 - 2} = \frac{x - (-5)}{1 - (-5)}$$

$$\frac{y - 2}{2} = \frac{x + 5}{6}$$

$$y - 2 = \frac{2}{6}(x + 5)$$

$$y - 2 = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} + 2$$

$$y = \frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$$

Jadi, persamaan garis yang dimaksud adalah

$$y = \frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}.$$

Cara lain:

$P(-5,2)$ dan $Q(1,4)$

$P(-5,2) \Rightarrow x_1 = -5$ dan $y_1 = 2$

$Q(1,4) \Rightarrow x_2 = 1$ dan $y_2 = 4$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{1-(-5)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$; dipilih salah satu titik P atau Q.

Kita pilih $Q(1,4) \Rightarrow x_1 = 1$ dan $y_1 = 4$

$$y - 4 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y - 4 = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + 4 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$$

Jika titik $P(-5,2)$ yang dipilih, maka hasilnya akan sama, yaitu $y = \frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$.

Jika ruas kiri dan kanan kita kalikan 3, akan kita peroleh: $3y = x + 11$.

2.2.5 Dua buah garis saling sejajar

Dua buah garis dikatakan saling sejajar, jika gradien kedua garis tersebut sama.

$$\boxed{m_1 = m_2 = m}$$

Contoh soal 10:

Diketahui persamaan dua buah garis lurus $y = 2x - 4$ dan $2y - 4x - 8 = 0$. Selidikilah, apakah kedua garis tersebut sejajar, kemudian gambarkan grafiknya!

Jawab:

Garis I : $y = 2x - 4 \Rightarrow m_1 = 2$

Garis II : $2y - 4x - 8 = 0$

$$2y = 4x + 8$$

$$y = 2x + 4 \Rightarrow m_2 = 2$$

$m_1 = m_2 = m = 2$

Jadi, kedua garis tersebut mempunyai gradien yang sama, yaitu $m = 2$, maka kedua garis tersebut sejajar.

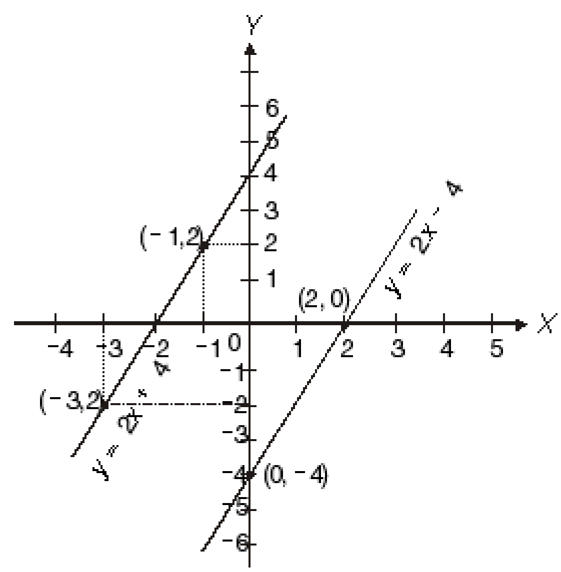
Gambar:

Garis I : $y = 2x - 4$

x	–1	0	1	2	3
y	– 6	– 4	– 2	0	2

Garis II : $y = 2x + 4$

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2
y	– 2	0	2	4	6	8



Contoh soal 11:

Tentukan persamaan sebuah garis yang melalui titik A(–1, 6), sejajar dengan garis yang persamaannya $3y + 9x = 12$!

Jawab:

Persamaan garis: $3y + 9x = 12$

$$3y = -9x + 12$$

$$y = -3x + 4 \Rightarrow m_1 = -3$$

Syarat dua garis sejajar: $m_1 = m_2$, jadi $m_2 = -3$

$A(-1, 6) \Rightarrow x_1 = -1$ dan $y_1 = 6$

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - 6 &= -3(x - (-1)) \\
y - 6 &= -3(x + 1) \\
y - 6 &= -3x - 3 \\
y &= -3x - 3 + 6 \\
y &= -3x + 3
\end{aligned}
$$

Jadi, persamaan garis yang dimaksud adalah $y = -3x + 3$.

2.2.6 Dua buah garis saling tegak lurus

Dua buah garis dikatakan saling tegak lurus, apabila gradien kedua garis tersebut saling berkebalikan dan berlawanan arah. Maksudnya ialah sebagai berikut.

$\boxed{m_1 = \frac{-1}{m_2}}$ atau $\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$

Hasil kali kedua gradien sama dengan –1.

Contoh soal 12:

Diketahui dua garis lurus, masing-masing $x + 3y - 3$ dan $y = 3x - 6$

a. Selidikilah, apakah kedua garis tersebut saling tegak lurus dengan menentukan gradiennya!

b. Gambarlah grafiknya!

Jawab:

Persamaan garis I : $y = 3x - 6 \Rightarrow m_1 = 3$

Persamaan garis II : $x + 3y - 3 = 0$

$$
\begin{aligned}
3y &= -x + 3 \\
y &= -\frac{1}{3}x + 1 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$m_1 \cdot m_2 = 3 \times -\frac{1}{3} = -1$$

Syarat tegak lurus: gradien kedua garis saling berkebalikan dan berlawanan arah, atau hasil kalinya $= -1$

Jadi, kedua garis tersebut saling tegak lurus.

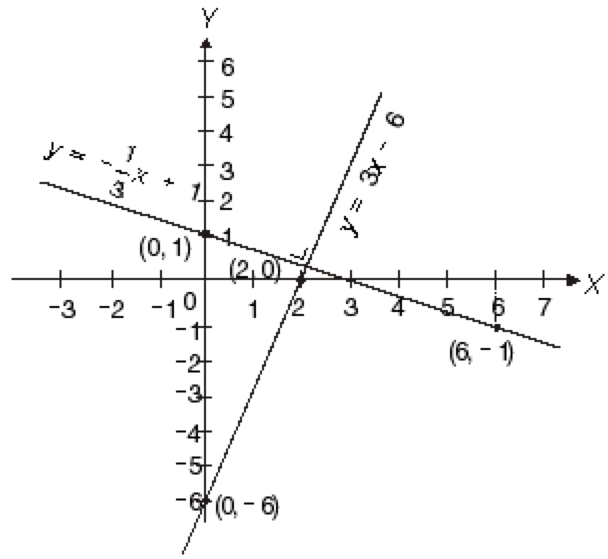
Gambar:

Garis I : $y = 3x - 6$

x	0	1	2	3
y	– 6	– 3	0	3

Garis II : $y = -\frac{1}{3}x + 1$

x	0	3	6	9
y	1	0	– 1	– 2



Contoh soal 13:

Diketahui fungsi linear $y = -4x + 1$. Tentukan persamaan sebuah garis lurus yang tegak lurus terhadap garis tersebut dan melalui $P(2, -1)$!

Jawab:

Persamaan garis : $y = -4x + 1 \Rightarrow m_1 = -4$

Syarat tegak lurus :
$$
\begin{aligned}
m_1 \cdot m_2 &= -1 \\
-4m_2 &= -1 \\
m_2 &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Melalui titik $P(2, -1) \Rightarrow x_1 = 2$ dan $y_1 = -1$.

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - (-1) &= \frac{1}{4}(x - 2) \\
y + 1 &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \\
y &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} - 1 \\
y &= \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \\
4y &= x - 6
\end{aligned}
$$

Jadi, persamaan garis yang dimaksud adalah

$4y = x - 6$ atau $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$.

2.2.7 Menentukan koordinat titik potong dua buah garis lurus

Dua buah garis dikatakan berpotongan apabila mempunyai nilai peubah atau variabel persekutuan (x, y).

Titik potong kedua garis dapat ditentukan berdasarkan tiga cara, yaitu cara eliminasi, cara substitusi, dan cara grafik.

Contoh soal 14:

Diketahui dua buah garis $y = 2x + 4$ dan $y = 4x - 2$. Tentukan koordinat titik potong kedua garis tersebut, dengan cara:

a. eliminasi;

b. substitusi;

c. grafik!

Jawab:

a. Cara eliminasi:

$$\begin{array}{l} y = 2x + 4 \\ \underline{y = 4x - 2} \; - \\ 0 = -2x + 6 \\ 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l|lr} y = 2x + 4 & \times 2 & \Rightarrow & 2y = 4x + 8 & \\ y = 4x - 2 & \times 1 & \Rightarrow & \underline{y = 4x - 2} & - \\ & & & y = 10 & \end{array}$$

Jadi, koordinat titik potong kedua garis adalah (3, 10).

b. Cara substitusi:

$y = 2x + 4$

disubstitusikan ke $y = 4x - 2$, diperoleh:

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 4x - 2 \\ 2x - 4x &= -2 - 4 \\ -2x &= -6 \\ x &= 3 \\ y &= 2x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 3 \Rightarrow y &= 2(3) + 4 \\ y &= 6 + 4 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Jadi, koordinat titik potong kedua garis adalah (3, 10).

c. Cara grafik:

Garis I : $y = 2x + 4$

x	– 2	– 1	0	1	2	3
y	0	2	4	6	8	10

Garis II : $y = 4x - 2$

x	– 1	0	1	2	3
y	– 6	– 2	2	6	10

Dari ketiga cara tersebut, diperoleh nilai yang sama, yaitu (3, 10).

Jadi, cara manapun yang digunakan, hasilnya tetap sama.

2.2.8 Jarak (materi pengayaan)

a. Jarak antara dua buah titik

Jarak antara dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ ditentukan dengan rumus:

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Contoh soal 15:

Tentukan jarak antara titik $A(-1, 3)$ dan $B(6, 3)$!

Jawab:

Titik $A(-1, 3) \Rightarrow x_1 = -1$ dan $y_1 = 3$

Titik $B(6, 3) \Rightarrow x_2 = 6$ dan $y_2 = 3$

$$\begin{aligned} \text{Jarak } AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(6 - (-1))^2 + (3 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(6 + 1)^2 + (0)^2} = \sqrt{7^2} \end{aligned}$$

Jadi, jarak AB adalah 7 satuan.

Contoh soal 16:

Diketahui titik $P(-4, 7)$ dan $Q(2, 1)$. Tentukan jarak PQ!

Jawab:

Titik $P(-4, 7) \Rightarrow x_1 = -4$ dan $y_1 = 7$.

Titik $Q(2, 1) \Rightarrow x_2 = 2$ dan $y_2 = 1$.

$$\text{Jarak } PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(2-(-4))^2 + (1-7)^2}$$
$$= \sqrt{(2+4)^2 + (-6)^2}$$
$$= \sqrt{6^2 + 6^2}$$
$$= \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Jadi, jarak PQ adalah $6\sqrt{2}$ satuan.

b. Jarak sebuah garis terhadap titik pangkal

Jika diketahui sebuah garis yang tidak melalui titik pangkal $O(0,0)$, jarak titik pangkal terhadap garis ditentukan dengan rumus:

$$\boxed{OP = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|}$$

Keterangan:

a, b, c = konstanta dari persamaan linear

$ax + by + c = 0$ (bentuk implisit)

Contoh soal 17:

Tentukan jarak antara garis $5x + 7y = 35$ dengan titik pangkal!

Jawab:

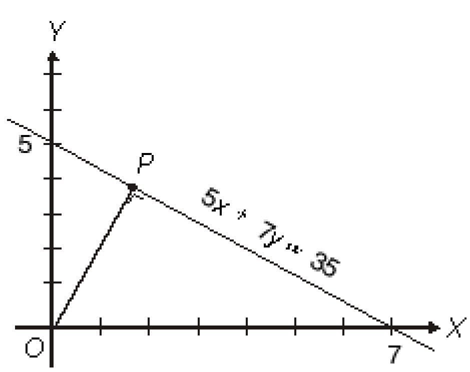
Persamaan garis:

$5x + 7y = 35$

$5x + 7y - 35 = 0 \Rightarrow a = 5,\ b = 7,\ c = -35$

$$OP = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\frac{-35}{\sqrt{5^2+7^2}}\right| = \left|\frac{-35}{\sqrt{25+49}}\right|$$
$$= \frac{35}{\sqrt{74}} = \frac{35}{74}\sqrt{74}$$

Grafiknya tampak pada gambar di bawah ini.



c. Jarak antara dua garis sejajar

Jarak antara dua garis sejajar dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.

a. Tentukan sebuah titik sembarang pada salah satu garis, misalnya $P(x_1, y_1)$.

b. Tarik sebuah garis lurus melalui $P(x_1, y_1)$, tegak lurus terhadap garis sejajar yang lain hingga memotong, misalnya di $Q(x_2, y_2)$. Garis PQ itulah jarak kedua garis sejajar tersebut.

Jarak PQ dapat dihitung dengan rumus:

$$\boxed{PQ = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|}$$

Contoh soal 18:

Diketahui dua garis dengan persamaan:

$2x - 4y + 6 = 0$ dan $x - 2y - 4 = 0$

Tentukan jarak kedua garis tersebut!

Jawab:

Garis I : $2x - 4y + 6 = 0$

$$-4y = -2x - 6$$
$$y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2}$$

Garis II : $x - 2y - 4 = 0$

$$-2y = -x + 4$$
$$y = \frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

Jadi, kedua garis tersebut sejajar.

Tentukan titik P pada salah satu garis tersebut, misalnya kita pilih garis $x - 2y - 4 = 0$.

Pilih $x = 2 \Rightarrow 2 - 2y - 4 = 0$

$$2y - 2 = 0$$
$$y = -1$$

Koordinat titik $P(2, -1)$; $x_1 = 2$ dan $y_1 = -1$

Persamaan garis yang lain:

$2x - 4y + 6 = 0 \Rightarrow a = 2,\ b = -4,\ c = 6$

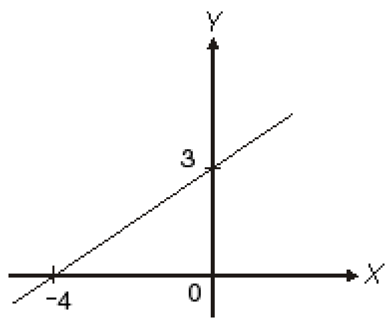
$$PQ = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\frac{2(2) + (-4)(-1) + 6}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}}\right|$$
$$= \left|\frac{4 + 4 + 6}{\sqrt{4+16}}\right|$$
$$= \frac{14}{\sqrt{20}} = \frac{14}{20}\sqrt{20} = \frac{7}{5}\sqrt{5}$$

Latihan 3

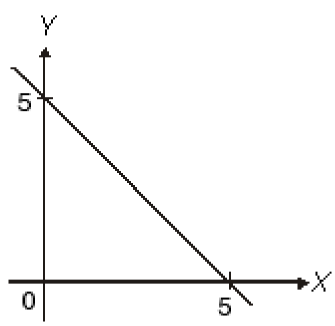
Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Tentukan persamaan sebuah garis lurus yang melalui titik $P(3, -5)$ dengan gradien $m = -3$!
2. Tentukan persamaan sebuah garis lurus yang melalui titik pangkal dan membentuk sudut 45° terhadap sumbu X!
3. Tentukan persamaan sebuah garis lurus yang melalui titik $A(6, 3)$ dengan tan $\alpha = 1$ (gradien = 1)!
4. Diketahui titik $P(4, 3)$. Tentukan:
   a. persamaan garis OP; b. jarak OP!
5. Sebuah segitiga mempunyai titik sudut $A(0, 6)$, $B(8, 0)$, dan $C(4, 9)$. Tentukan:
   a. persamaan garis AB, BC, dan AC;
   b. panjang sisi AB, BC, dan AC!
6. Tentukan persamaan garis-garis pada grafik berikut!

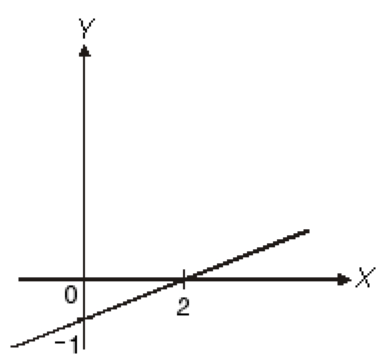
   a.



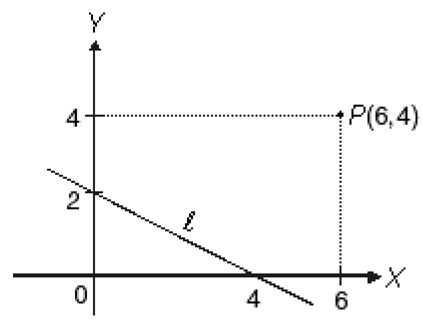
   b.



   c.

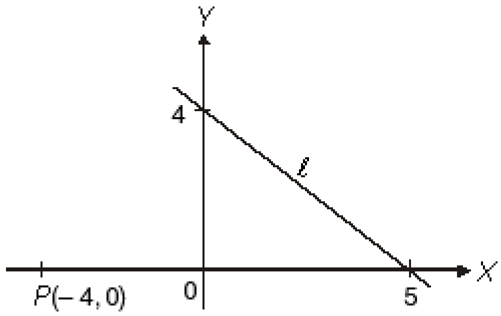


7. Koordinat ketiga titik sudut segitiga ABC ialah $A(-8, 7)$, $B(-2, 1)$, dan $C(4, 7)$. Tentukan:
   a. persamaan sisi-sisi segitiga ABC;
   b. panjang sisi-sisi segitiga;
   c. luas segitiga (gunakan rumus: $L = \frac{1}{2}$ alas × tinggi);
   d. gambar segitiga tersebut!
8. Tentukan gradien dari fungsi-fungsi berikut!
   a. $2y = 6x - 8$
   b. $\frac{3y + 5y}{4} = 5$
   c. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = 2x + \frac{1}{3}y + 5$
   d. $2{,}5x + 5y - 10 = 1{,}5x$
   e. $\frac{2y - 5y}{2x} - 3 = 2$
9. Diketahui sebuah garis dengan persamaan $2y - 4x = 8$ dan sebuah titik $P(-3, -1)$. Tentukan:
   a. persamaan sebuah garis melalui P dan sejajar garis tersebut;
   b. jarak titik P dengan garis;
   c. gambarlah grafiknya!
10. Tentukan persamaan sebuah garis yang melalui titik pangkal dan sejajar garis $2x - 2y = 4$
11. Perhatikan gambar berikut!



   a. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui $P(6,4)$ dan sejajar garis ℓ!
   b. Tentukan jarak $P(6,4)$ terhadap garis ℓ!
12. Diketahui dua buah garis lurus dengan persamaan $5y - 10x - 20 = 5$ dan $2y = 3mx - 5x - 8$.
   a. Hitunglah nilai m, agar kedua garis tersebut sejajar!
   b. Hitunglah jarak kedua garis sejajar tersebut!
   c. Gambarlah grafiknya!

13. Tentukan persamaan garis yang melalui $P(3, 8)$ dan tegak lurus terhadap garis $5y - 5 = 10x + 5$!
14. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik $A(-1, 5)$ dan tegak lurus terhadap garis yang melalui titik $P(-3, -1)$ dan $Q(8, -4)$!
15. Perhatikan gambar berikut!



   a. Tentukan persamaan garis yang melalui P dan tegak lurus ℓ!
   b. Hitunglah jarak P terhadap garis ℓ!
16. Dari soal nomor 12, tentukan nilai m agar kedua garis tersebut saling tegak lurus serta gambarlah garisnya!
17. Dari soal nomor 11, tentukan persamaan garis yang tegak lurus terhadap garis ℓ yang melalui titik $P(6, 4)$!
18. Jika garis $4x - 5y = 3x + 10$ sejajar garis $2y = (3a - 2)x + 1$, hitunglah nilai a yang memenuhi!
19. Jika garis $4x - 10 = 3x + 5y$ tegak lurus garis $2y + 2x = 3ax + 1$, hitunglah nilai a!
20 Dua buah garis masing-masing $(\frac{1}{2}m - 1)x + \frac{1}{2}y = 3$ dan $2y + mx + \frac{1}{2} = y - 4x + \frac{1}{5}$. Tentukan nilai m agar:
   a. kedua garis tersebut saling sejajar;
   b. kedua garis tersebut saling tegak lurus!

   Dari soal a dan b, gambarlah grafiknya!

Lembar Tugas 2

1. Tentukan persamaan garis, jika diketahui:
   a. melalui titik $(3, 3)$ dengan gradien $\frac{1}{3}$;
   c. melalui titik $(-2, 6)$ dan $(4, 6)$;
   b. sejajar sumbu X dan melalui $(0, -5)$;
   d. sejajar sumbu Y dan melalui $(-2, 3)$!
2. Tentukan nilai p bila garis $y = px + 4$
   a. sejajar dengan garis $2x - 5y + 10 = 0$;
   b. tegak lurus pada garis $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y = 4$!

   Kemudian gambarlah grafiknya pada bidang Cartesius!

INFO MATEMATIKA

Tahukah kamu bahwa di dalam **Museum Ashmolean** di Oxford, Inggris terdapat sebuah tongkat kebesaran kerajaan Mesir yang berisi sebuah catatan tentang 120.000 tawanan perang dan harta rampasan yang terdiri atas 400.000 lembu jantan dan 1.422.000 kambing? Catatan yang berasal dari tahun 3.400 SM ini menunjukkan bahwa pada zaman dahulu, orang telah belajar menulis angka-angka besar. Tentu saja, permulaan penggunaan angka telah jauh sebelum bangsa Mesir menggunakannya.

Orang primitif yang hidup di gua-gua tentu tidak memerlukan banyak hal tentang matematika (ilmu berhitung) untuk tetap dapat hidup dan melestarikan keturunannya karena semua kebutuhan hidupnya telah terpenuhi dari alam di sekitarnya. Tetapi, bila orang mulai mengumpulkan hewan menjadi kawanan ternak atau satu keluarga mulai melakukan hubungan sosial dengan keluarga yang lain, maka mereka perlu memutuskan "berapa yang menjadi milik seseorang dan berapa yang menjadi milik tetangga".

Untuk memenuhi kebutuhan tersebut, pada mulanya sudah cukup bila dipergunakan suatu konsep seperti sedikit, beberapa, atau banyak, namun lama-kelamaan perlu juga bagi mereka memiliki sarana yang pasti untuk menentukan "berapa banyak". Nah, dari situlah, orang mulai belajar menghitung dan inilah awal dari **Matematika.**

(Sumber: Ilmu Pengetahuan Populer Jilid 2)

2.3 Menggambarkan Fungsi Kuadrat

2.3.1 Bentuk umum fungsi kuadrat

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah

$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$; a, b, c, bilangan real dan $a \neq 0$.

Grafik dari fungsi kuadrat membentuk suatu lengkungan teratur yang disebut *parabola*. Karena itu, fungsi kuadrat disebut juga persamaan parabola.

Parabola bisa terbuka ke atas ataupun terbuka ke bawah. Hal itu ditentukan oleh nilai a. Jika a positif ($a > 0$), maka parabola terbuka ke atas dan dikatakan mempunyai nilai minimum. Sebaliknya, jika a negatif ($a < 0$), maka parabola terbuka ke bawah dan dikatakan mempunyai nilai maksimum.

2.3.2 Menentukan titik potong grafik sumbu koordinat

a. Titik potong terhadap sumbu absis (sumbu *X*)

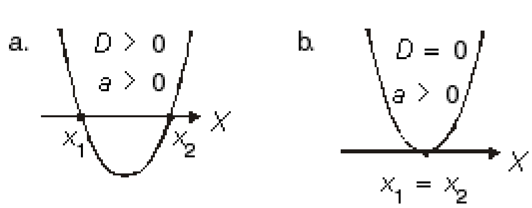
Titik potong grafik terhadap sumbu absis (sumbu X) diperoleh apabila $y = 0$, sehingga bentuk umumnya menjadi:

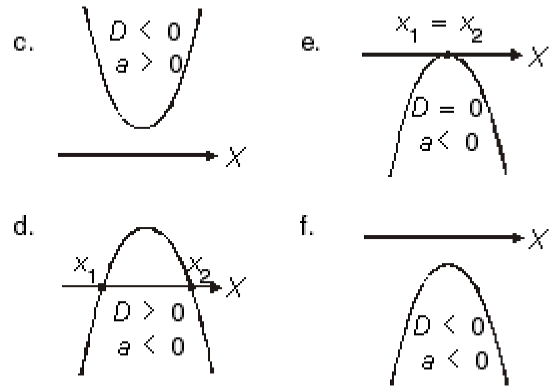
$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Nilai x dapat dihitung dengan cara memfaktorkan atau dengan rumus *abc*. Nilai x yang menyebabkan fungsi $y = f(x) = 0$ disebut pembuat nol fungsi.

Grafik fungsi kuadrat atau parabola memotong, menyinggung, atau melayang (tidak memotong ataupun tidak menyinggung sumbu X) ditentukan oleh nilai diskriminan, $D = b^2 - 4ac$.

1. Jika $D > 0$, maka parabola memotong sumbu X pada dua titik yang berbeda ($x_1 \neq x_2$).
2. Jika $D = 0$, maka parabola menyinggung sumbu X, artinya $x_1 = x_2$.
3. Jika $D < 0$, maka parabola melayang (tidak memotong maupun menyinggung sumbu X).





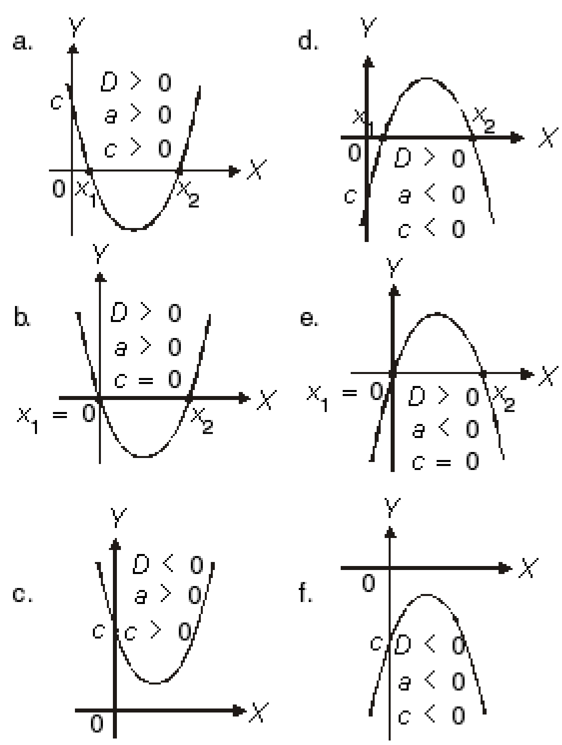
Gambar 2.5

Pada gambar 2.5 c, parabola melayang di atas sumbu X. Artinya, parabola bernilai positif untuk semua nilai x dan disebut *definite positif*. Pada gambar 2.5 f, parabola melayang di bawah sumbu X. Artinya, parabola bernilai negatif untuk semua nilai x dan disebut *definite negatif*.

b. Titik potong terhadap sumbu ordinat (sumbu *Y*)

Titik potong grafik terhadap sumbu ordinat (sumbu Y) diperoleh apabila $x = 0$, sehingga $y = c$. Dengan demikian, diperoleh hasil sebagai berikut.

1. Jika $c > 0$, maka parabola memotong sumbu Y positif (di atas sumbu X).
2. Jika $c = 0$, maka parabola memotong sumbu Y pada titik pangkal $O(0,0)$.
3. Jika $c < 0$, maka parabola memotong sumbu Y negatif (di bawah sumbu X).



Gambar 2.6

Contoh soal 19:

Tentukan titik potong grafik fungsi $y = x^2 - 5x - 6$ terhadap sumbu koordinat!

Jawab:

$y = x^2 - 5x - 6$

a. Titik potong terhadap sumbu $X \Rightarrow y = 0$:

$x^2 - 5x - 6 = 0$

(1) Memfaktorkan:

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x - 6)(x + 1) = 0$

$x - 6 = 0$ atau $x + 1 = 0$

$x_1 = 6 \qquad x_2 = -1$

(2) Menggunakan rumus *abc*:

$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow a = 1,\ b = -5$, dan $c = -6$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 7}{2} \Rightarrow x_1 = 6$$

$$x_2 = \frac{5 - 7}{2} \Rightarrow x_2 = -1$$

Jadi, titik potong grafik terhadap sumbu X adalah (6, 0) dan (–1, 0).

b. Titik potong grafik terhadap sumbu $Y \Rightarrow x = 0$:

$y = (0)2 - 5(0) - 6 = -6$.

Jadi, titik potong grafik terhadap sumbu Y adalah (0, – 6).

2.3.3 Menentukan nilai ekstrim, sumbu simetri, dan titik puncak (titik balik)

Nilai ekstrim adalah nilai tertinggi (maksimum) atau nilai terendah (minimum) yang dicapai oleh suatu fungsi. Nilai ekstrim maksimum terjadi, jika parabola terbuka ke bawah atau $a < 0$, sedangkan ekstrim minimum terjadi jika parabola terbuka ke atas atau $a > 0$. Nilai ekstrim dirumuskan:

$$\boxed{y_E = \frac{-D}{4a}}$$

Parabola merupakan grafik yang simetris. Garis yang membagi parabola secara simetris disebut sumbu simetri. Sumbu simetri dari grafik fungsi $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ dirumuskan:

$$\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$$

Titik puncak (titik balik) fungsi kuadrat adalah titik tempat terjadinya perubahan nilai fungsi, dari turun menjadi naik atau dari naik menjadi turun. Koordinat titik puncak fungsi $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ adalah:

$$\boxed{\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)}$$

Contoh soal 20:

Tentukan nilai ekstrim, sumbu simetri, dan titik puncak dari parabola $y = 2x^2 - 6x - 8$!

Jawab:

Dari fungsi $y = 2x^2 - 6x - 8$ diketahui $a = 2$, $b = -6$, $c = -8$

a. Nilai ekstrim

$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(2)(-8) = 100$

$$y_E = \frac{-D}{4a} = \frac{-100}{4(2)} = -12\frac{1}{2}$$

Karena $a > 0$, maka grafik terbuka ke atas. Jadi, $y_E = -12\frac{1}{2}$.

b. Sumbu simetri

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(2)} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$$

Nilai ekstrim adalah minimum sebab $a > 0$ $(a = 2)$.

c. Titik balik

Koordinat titik balik: $\left(1\frac{1}{2}, -12\frac{1}{2}\right)$

Karena nilai ekstrimnya minimum, maka titik baliknya adalah titik balik minimum.

2.3.4 Menggambar grafik fungsi kuadrat

Untuk melukis grafik fungsi kuadrat, lakukan langkah-langkah sebagai berikut!

1. Menentukan koordinat titik potong dengan sumbu X dan sumbu Y.
2. Menentukan koordinat titik balik serta sumbu simetrinya.
3. Jika diperlukan, membuat tabel untuk titik-titik lain yang akan dilalui.
4. Melukis kurva mulus malalui titik-titik yang telah ditentukan dari tahap 1, 2, 3.

Contoh soal 21:

Lukislah grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 3x - 4$!

Jawab:

a. Titik potong dengan sumbu X dan sumbu Y

(1) Titik potong dengan sumbu X:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$(x + 1)(x - 4) = 0$$
$$x + 1 = 0 \text{ atau } x - 4 = 0$$
$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 4$$

Jadi, titik potong dengan sumbu X adalah $(-1, 0)$ dan $(4, 0)$.

(2) Titik potong dengan sumbu Y:

$$x = 0 \Rightarrow y = (0)^2 - 3(0) - 4 = -4$$

Jadi, titik potong dengan sumbu Y adalah $(0, -4)$

b. Titik balik

(1) Nilai ekstrim

$$y_E = \frac{-D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
$$= -\frac{(-3)^2 - 4(1)(-4)}{4(1)}$$
$$= -\frac{9 + 16}{4}$$
$$= -\frac{25}{4} = -6\frac{1}{4}$$

(2) Sumbu simetri

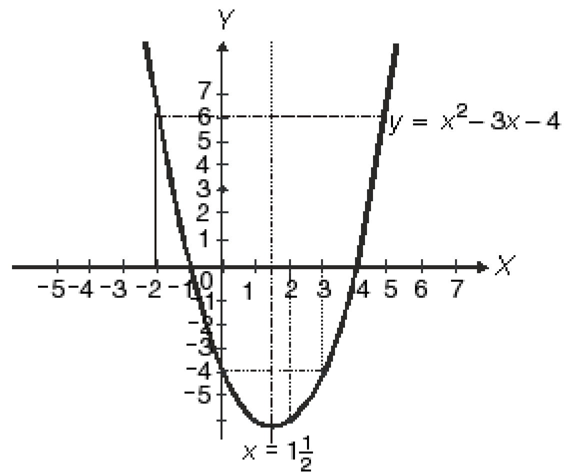
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(1)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Jadi, titik baliknya adalah $(1\frac{1}{2}, -6\frac{1}{4})$.

c. Titik-titik tambahan

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

d. Grafik



Contoh soal 22:

Lukislah grafik fungsi kuadrat $y = -x^2 + 4x - 4$!

Jawab:

a. Titik potong dengan sumbu X dan sumbu Y

(1) Titik potong dengan sumbu X:

$$y = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0$$
$$(-x + 2)(x - 2) = 0$$
$$-x + 2 = 0 \text{ atau } x - 2 = 0$$
$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2$$

Karena $x_1 = x_2$, maka grafik hanya menyinggung sumbu X di titik $(2, 0)$.

(2) Titik potong dengan sumbu Y:

$$x = 0 \Rightarrow y = -(0)^2 + 4(0) - 4 = -4$$

Jadi, titik potong dengan sumbu Y adalah $(0, -4)$

b. Titik balik

(1) Nilai ekstrim

$$y_E = \frac{-D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= -\frac{4^2 - 4(-1)(-4)}{4(-1)}$$

$$= -\frac{16-16}{-4} = \frac{0}{4} = 0$$

(2) Sumbu simetri

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

(3) Titik balik

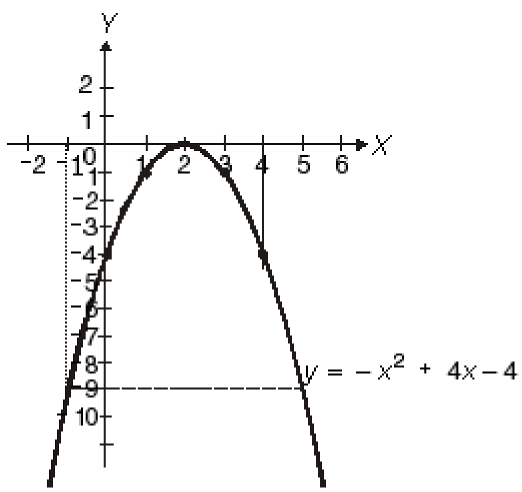
Koordinat titik baliknya adalah (2, 0).

Karena $a = -1 < 0$, maka titik baliknya maksimum dan grafiknya terbuka ke bawah.

c. Titik-titik tambahan

x	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5
$y = -x^2 + 4x - 4$	16	– 9	– 4	–1	0	–1	– 4	– 9

d. Grafik



2.3.5 Menentukan fungsi kuadrat

Kita dapat menentukan sebuah fungsi kuadrat melalui sketsa grafik fungsi tersebut atau keterangan-keterangan yang cukup. Ada beberapa cara menentukan fungsi kuadrat berdasarkan data-data atau grafik yang diketahui.

1. Jika grafik fungsi kuadrat memotong sumbu X di titik $A(x_1, 0)$ dan $B(x_2, 0)$ serta melalui titik tertentu yang diketahui, maka fungsi kuadrat dinyatakan:

$$\boxed{y = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Contoh soal 23:

Tentukan grafik fungsi kuadrat yang melalui titik (0, –5) dan memotong sumbu X di titik $A(-5, 0)$ dan $B(1, 0)$!

Jawab:

Diketahui: $x_1 = -5$ dan $x_2 = 1$

Fungsi kuadrat: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$y = a(x + 5)(x - 1)$

Grafik melalui titik (0, – 5), maka diperoleh:

$-5 = a(0 + 5)(0 - 1)$

$\Leftrightarrow -5 = -5a$

$\Leftrightarrow a = 1$

Jadi, fungsi kuadrat yang dimaksud adalah:

$y = (x + 5)(x - 1)$ atau $y = x^2 + 4x - 5$.

2. Jika grafik fungsi kuadrat menyinggung sumbu X di titik $A(x_1, 0)$ dan melalui suatu titik tertentu, maka fungsinya dinyatakan sebagai:

$$\boxed{y = a(x - x_1)^2}$$

Contoh soal 24:

Grafik fungsi kuadrat menyinggung sumbu X di titik (1, 0) dan melalui titik (0, – 4). Tentukan fungsinya!

Jawab:

Fungsi kuadrat $y = a(x - 1)^2$

Grafik melalui titik (0, – 4), maka diperoleh:

$-4 = a(0 - 1)^2$

$\Leftrightarrow -4 = a(1)$

$\Leftrightarrow a = -4$

Jadi, fungsi kuadrat yang dimaksud adalah

$y = -4(x - 1)^2$ atau $y = -4x^2 + 8x - 4$.

3. Jika grafik sebuah fungsi kuadrat mempunyai titik puncak $P(x_p, y_p)$ dan melalui titik tertentu, maka fungsinya dinyatakan sebagai:

$$\boxed{y = a(x - x_p)^2 + y_p}$$

Contoh soal 25:

Tentukan fungsi kuadrat yang mempunyai nilai ekstrim 6 untuk $x = -2$ dan bernilai 2 untuk $x = -4$!

Jawab:

Fungsi kuadrat $y = a(x + 2)^2 + 6$

Grafik melalui titik $(-4, 2)$, maka diperoleh:

$2 = a(-4 + 2)^2 + 6$

$\Leftrightarrow\ 2 = 4a + 6$

$\Leftrightarrow\ a = -1$

Jadi, fungsi kuadrat yang dimaksud adalah

$y = -1(x + 2)^2 + 6$ atau $y = -x^2 - 4x + 2$.

4. Jika grafik fungsi kuadrat melalui tiga titik tertentu, yaitu $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$, maka fungsinya dinyatakan sebagai:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

Nilai a, b, dan c ditentukan kemudian.

Contoh soal 26:

Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik $A(1, 0)$, $B(-1, -6)$, dan $C(2, 6)$!

Jawab:

Bentuk umum fungsi kuadrat: $y = ax^2 + bx + c$

Nilai a, b, dan c dapat dicari sebagai berikut.

$A(1, 0) \Rightarrow a + b + c = 0$ ....(1)

$B(-1, -6) \Rightarrow a - b + c = -6$ .... (2)

$C(2, 6) \Rightarrow 4a + 2b + c = 6$ .... (3)

Eliminasi a dan c dari persamaan (1) dan (2):

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ a - b + c &= -6 \\ \hline 2b &= 6 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

Nilai $b = 3$ disubstitusikan ke persamaan (2) dan (3), diperoleh:

$$\begin{aligned} a - 3 + c = -6 &\Rightarrow a + c = -3 \\ 4a + 6 + c = 6 &\Rightarrow 4a + c = 0 \\ \hline & \quad -3a = -3 \\ & \quad a = 1 \end{aligned}$$

Nilai dari $a = 1$ dan $b = 3$ disubstitusikan ke persamaan (1), diperoleh:

$1 + 3 + c = 0 \Rightarrow c = -4$

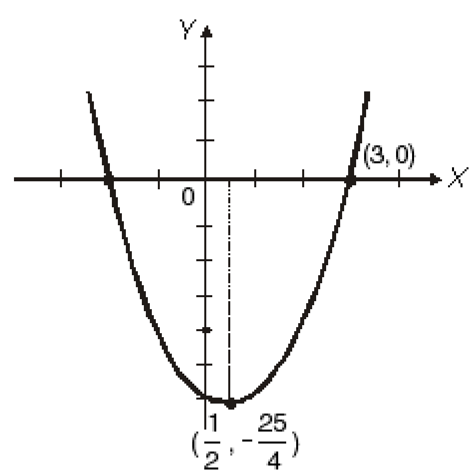
Jadi, fungsi kuadrat yang dimaksud adalah $y = x^2 + 3x - 4$.

Latihan 4

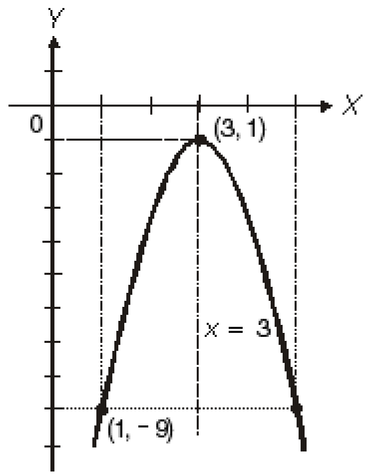
Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Diketahui fungsi kuadrat $y = x^2 - 2x + 6$. Tentukan:
   a. koordinat titik potong dengan sumbu X;
   b. koordinat titik potong dengan sumbu Y;
   c. koordinat titik puncak;
   d. grafiknya!
2. Diketahui fungsi kuadrat $y = -x^2 + 6x - 9$. Tentukan:
   a. nilai ekstrim;
   b. koordinat titik potong terhadap sumbu X;
   c. koordinat titik potong terhadap sumbu Y;
   d. grafiknya!
3. Gambarlah grafik fungsi $y = 2x^2 - 5x + 5$!
4. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik $A(0,3)$, $B(2,-5)$, dan $C(-1,13)$!
5. Tentukan persamaan parabola yang mempunyai titik puncak $(1,4)$ dan memotong sumbu X di titik $(-1,0)$!
6. Tentukan fungsi kuadrat yang mempunyai nilai maksimum 5 untuk $x = 2$ dan mempunyai nilai 4 untuk $x = 1$!
7. Perhatikan sketsa berikut!

   Tentukan fungsi dari grafik parabola tersebut!



8. Perhatikan sketsa grafik di bawah ini!



Tentukan fungsi dari grafik tersebut!

INFO MATEMATIKA 1

Rene Descartes dikenal sebagai ahli filsafat modern pertama. Dia juga menemukan biologi modern, ahli fisika dan matematikawan.

Rene Descartes dilahirkan di Touraine, Perancis, putra dari seorang ahli hukum. Ayahnya mengirimnya ke sekolah Jesuit pada umur 8 tahun. Karena alasan kesehatan yang kurang baik, Descartes diijinkan menghabiskan waktu paginya belajar di tempat tidur, suatu kebiasaan yang dipandangnya berguna sehingga dilanjutkan sepanjang hidupnya. Pada umur 20 tahun ia mendapat gelar sarjana hukum dan selanjutnya menjalani kehidupan seorang tuan yang terhormat, menjalani dinas militer beberapa tahun dan tinggal beberapa waktu di Paris dan kemudian di Belanda. Ia pergi ke Swedia diundang untuk mengajari Ratu Christina, di mana ia meninggal karena pneumonia pada tahun 1650.

Descartes menyelidiki suatu metode berpikir yang umum yang akan memberikan pertalian pada pengetahuan dan menuju kebenaran dalam ilmu-ilmu. Penyelidikan itu mengantarnya ke matematika, yang ia simpulkan sebagai sarana pengembangan kebenaran di segala bidang. Karya matematikanya yang paling berpengaruh adalah *La Geometrie*, yang diterbitkan tahun 1637. Di dalamnya ia mencoba suatu penggabungan dari geometri tua dan aljabar. Bersama dengan orang Perancis lainnya, Pierre Fermat (1601 - 1665), ia diberi pujian dengan gabungan tersebut yang saat ini kita sebut geometri analitik atau geometri koordinat. Penggembangan kalkulus tidak mungkin tercapai tanpa dia.

(Sumber: Kalkulus dan Geometri Analisis Jilid 1)

INFO MATEMATIKA

Agustin-Louis Cauchy lahir di Paris dan dididik di Ecole Polytechnique. Dia menjabat mahaguru di Ecole Polytechnique, Sorbonne, dan College de Frances. Sumbangan matematisnya cemerlang dan mengejutkan. Produktivitasnya sangat hebat sehingga Academy Paris memilih untuk membatasi ukuran makalahnya dalam majalah ilmiah untuk mengatasi keluaran dari Cauchy.

Walaupun kalkulus diciptakan pada akhir abad ke tujuh belas, dasar-dasarnya tetap kacau dan berantakan sampai Cauchy dan rekan sebayanya (Gauss, Abel, dan Bolzano) mengadakan ketelitian baku. Kepada Cauchy kita berhutang pemikiran pemberian dasar kalkulus pada definisi yang jelas dari konsep limit. Semua buku ajar modern mengikuti, paling sedikit dalam intinya, penjelasan kalkulus yang terinci oleh Cauchy.

(Sumber: Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1, Edwin J. Purcell dan Dale Varberg)

Lembar Tugas 3

1. Gambarlah sketsa grafik untuk setiap fungsi kuadrat berikut!
   a. $y = x^2 + 4x - 5$
   b. $y = x^2 - 4$
   c. $y = 2x^2 - 4x + 5$
2. Tentukan sifat, titik potong dengan sumbu X, titik potong dengan sumbu Y, titik ekstrim, persamaan sumbu simetri fungsi kuadrat berikut ini, dan gambarlah grafiknya!
   a. $y = 4x^2 + 12x + 5$
   b. $y = -(x + 2)^2$
   c. $y = -x^2 + 9x + 14$
   d. $y = x^2 - 2x - 3$

2.4 Menerapkan Konsep Fungsi

Sebagaimana diuraikan di atas, fungsi merupakan hubungan khusus dari dua peubah (*variabel*) yang saling mempengaruhi. Peubah yang satu bebas, sedangkan peubah yang lain tidak bebas. Keeratan hubungan tersebut dapat digambarkan dalam satu kurva, baik berbentuk linear atau garis lurus maupun berbentuk nonlinear atau garis lengkung.

Jadi, fungsi merupakan alat yang sangat berguna untuk menggambarkan masalah-masalah nyata, jika nilai dari suatu kuantitas dapat menentukan nilai yang lain. Penerapan atau aplikasi fungsi dalam ekonomi terutama dilakukan dalam analisis permintaan, analisis penawaran, titik keseimbangan pasar, serta pengaruh perpajakan dan subsidi terhadap keseimbangan pasar.

2.4.1 Fungsi permintaan (*demand*)

Fungsi permintaan merupakan hubungan antara peubah harga (p) dan peubah jumlah barang atau jasa (q) yang diminta.

Apabila harga suatu barang di pasaran turun, maka biasanya konsumen akan menyerbu barang tersebut. Dengan kata lain, permintaan terhadap barang tersebut meningkat. Sebaliknya, apabila harga barang naik, maka konsumen akan menjauhi barang tersebut. Dengan kata lain, permintaan terhadap barang tersebut menurun. Jadi, dalam hukum permintaan, kita melihat bahwa besar kecilnya jumlah barang yang diminta sangat bergantung pada tingkat harga barang tersebut, sedangkan keadaan lainnya tetap (*ceteris paribus*). Hubungan fungsinya adalah:

$$\boxed{q = f(p)}$$

dibaca q adalah fungsi dari p atau jumlah adalah fungsi dari harga.

a. Fungsi permintaan linear

Jika bentuk umum fungsi linear adalah $y = mx + c$, maka fungsi permintaan dapat dirumuskan sebagai $p = a - bq$. Dalam hal ini, $p = y$ dan $q = x$, sedangkan a = konstanta dan b = gradien.

Dari hasil uraian di atas, diketahui bahwa harga barang turun, permintaan naik dan harga barang naik, serta permintaan turun. Maka, hubungan jumlah barang (q) dan harga (p) dalam fungsi permintaan dapat dinyatakan bahwa jumlah barang (q) merupakan fungsi dari harga atau $q = f(p)$.

Bentuk umum fungsi permintaan:

$$\boxed{p = a - bq} \quad \text{atau} \quad \boxed{q = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}p}$$

Keterangan:

p = harga barang

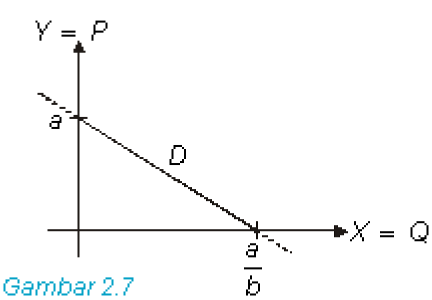
a = konstanta

q = jumlah barang

b = gradien (koefisien arah)

Satu hal penting yang perlu diperhatikan ialah baik harga maupun jumlah barang harus selalu positif. Artinya, kuadran yang berlaku hanya kuadran I. Hal itu disebabkan dalam dunia pasar (ekonomi) tidak berlaku ada harga tetapi tidak ada barang (negatif) atau sebaliknya, ada barang tetapi tidak ada harga (negatif).

Perhatikan kurva permintaan linear pada gambar 2.7



Gambar 2.7

Berdasarkan kurva pada gambar 2.7, jelas bahwa fungsi permintaan hanya terdefinisi pada kuadran I (positif). Harga tertinggi tercapai jika $q = 0$ (jumlah nol), sehingga $p = a$. Harga barang paling murah atau bebas tercapai jika $p = 0$ atau $q = \frac{a}{b}$.

Catatan

Dari salib sumbu (diagram Cartesius), sumbu X diganti dengan sumbu $Q(X = Q)$ dan sumbu Y diganti dengan $P(Y = P)$

Contoh soal 27:

Gambarkan kurva permintaan yang memenuhi fungsi $300q + 60p = 18.000$.

Jawab:

Fungsi permintaan : $300q + 60p = 18.000$

Titik potong terhadap sumbu $Q \Rightarrow p = 0$:

$300q + 60(0) = 18.000$

$300q = 18.000$

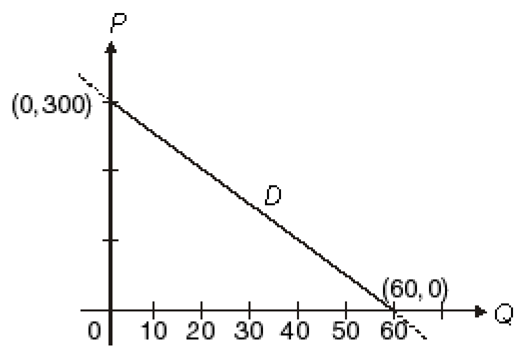
$q = 60 \Rightarrow$ koordinat titik potongnya (60, 0).

Titik potong terhadap sumbu $P \Rightarrow q = 0$:

$300(0) + 60p = 18.000$

$60p = 18.000$

$p = 300 \Rightarrow$ koordinat titik potongnya (0, 300).



Contoh soal 28:

Sebuah agen sandal mampu menjual sandal merek Trendy sebanyak 40 pasang per hari dengan harga Rp 30.000,00 per pasang. Jika ia menurunkan harga menjadi Rp 20.000,00 per pasang, agen tersebut mampu menjual 60 pasang per hari. Tentukan fungsi permintaan terhadap sandal merek Trendy!

Jawab:

q = jumlah barang

p = harga barang per unit

Dalam hal ini, ada dua jumlah barang (q) dan ada dua harga barang per unit (p).

$q_1 = 40$; $p_1 = 30.000$

$q_2 = 60$; $p_2 = 20.000$

Dengan menggunakan persamaan sebuah garis lurus yang melalui dua buah titik:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Setiap y diganti p, setiap x diganti q:

$$\frac{p - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{q - q_1}{q_2 - q_1}$$

$$\frac{p - 30.000}{20.000 - 30.000} = \frac{q - 40}{60 - 40}$$

$$\frac{p - 30.000}{-10.000} = \frac{q - 40}{20}$$

$20p - 600.000 = -10.000q + 400.000$

$20p = -10.000q + 400.000 + 600.000$

$20p = -10.000q + 1.000.000$

$p = -500q + 50.000$

Jadi, fungsi permintaan yang dimaksud adalah $p = -500q + 50.000$.

b. Fungsi permintaan kuadrat (parabola)

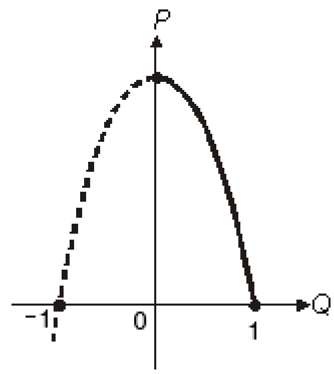
Bentuk umum fungsi permintaan kuadrat ialah:

(i) $p = -aq^2 + bq + c \Rightarrow p = f(q)$

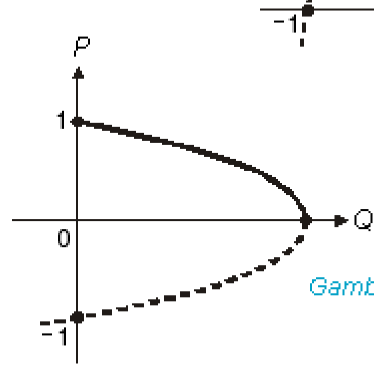
(ii) $q = -ap^2 + bp + c \Rightarrow q = f(p)$

Daerah yang memenuhi syarat hanya pada kuadran I (p dan q bernilai positif).

Perhatikan kurva pada gambar 2.8!



Gambar 2.8 (a)



Gambar 2.8 (b)

Contoh soal 29:

Gambarlah kurva fungsi permintaan $p = -q^2 - 5q + 150$!

Jawab:

$p = -q^2 - 5q + 150$

Titik potong pada sumbu $Q \Rightarrow p = 0$:

$-q^2 - 5q + 150 = 0$

$(q + 15)(-q + 10) = 0$

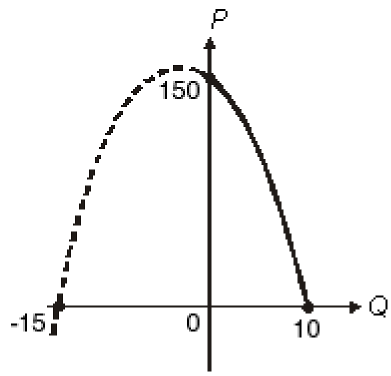
$q + 15 = 0$ atau $-q + 10 = 0$

$q_1 = -15$ $-q = -10$

(tidak memenuhi) $q_2 = 10$

Titik potong pada sumbu $P \Rightarrow q = 0$:

$p = -(0)^2 - 5(0) + 150 = 150$



Contoh soal 30:

Gambarlah grafik fungsi permintaan $q = -p^2 - 2p + 80$!

Jawab:

$q = -p^2 - 2p + 80$

Titik potong pada sumbu $P \Rightarrow q = 0$:

$-p^2 - 2q + 80 = 0$

$(p + 10)(-p + 8) = 0$

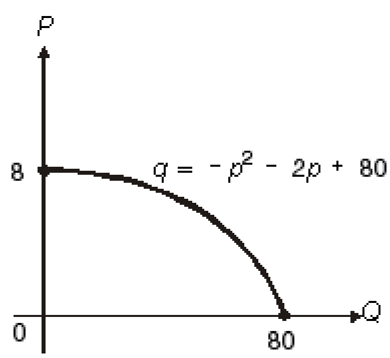
$p + 10 = 0$ atau $-p + 8 = 0$

$p_1 = -10$ $\quad -p = -8$

(tidak memenuhi) $\quad p_2 = 8$

Titik potong pada sumbu $Q \Rightarrow p = 0$:

$q = -(0)^2 - 2(0) + 80 = 80$



2.4.2 Fungsi penawaran (*supply*)

Fungsi penawaran merupakan hubungan antara peubah (variabel) harga (p) dan peubah (variabel) jumlah barang atau jasa (q) yang ditawarkan. Hubungan antara jumlah barang yang ditawarkan pada berbagai tingkat harga dapat digambarkan dalam suatu grafik yang disebut *kurva penawaran*.

Kurva penawaran mempunyai persyaratan, yaitu hanya berlaku untuk peubah jumlah (q) dan peubah harga (p) positif (di kuadran I). Dalam hukum penawaran, kita melihat bahwa besar kecilnya jumlah suatu barang yang ditawarkan sangat bergantung pada tingkat harga barang tersebut. Apabila keadaan lainnya tetap (*ceteris paribus*) dan harga suatu barang naik, maka jumlah yang ditawarkan untuk barang tersebut bertambah. Hal itu disebabkan, produsen berusaha untuk memperoleh keuntungan yang lebih besar. Sebaliknya, jika harga barang turun, jumlah yang ditawarkan akan berkurang. Hal itu disebabkan, produsen berusaha mengurangi kerugiannya. Dengan demikian, fungsi penawaran dapat kita sebut juga sebagai *fungsi perilaku produsen*.

Pada prinsipnya, fungsi penawaran terbagi menjadi dua, yaitu fungsi penawaran linear dan fungsi penawaran nonlinear.

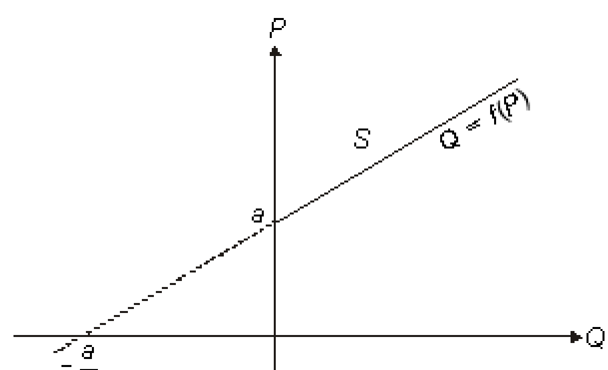
a. Fungsi penawaran linear

Bentuk umum dari fungsi penawaran linear ialah sebagai berikut.

$\boxed{p = a + bq}$ atau $\boxed{q = \frac{1}{b}p - \frac{a}{b}}$

Dari rumus tersebut, dapat diketahui bahwa apabila harga naik, maka jumlah yang ditawarkan bertambah dan apabila harga turun, maka jumlah yang ditawarkan berkurang. Oleh karena itu, grafik fungsi penawaran bergerak dari kiri bawah ke kanan atas (naik), sehingga gradiennya selalu positif.

Perhatikan kurva penawaran pada gambar 2.9!



Gambar 2.9

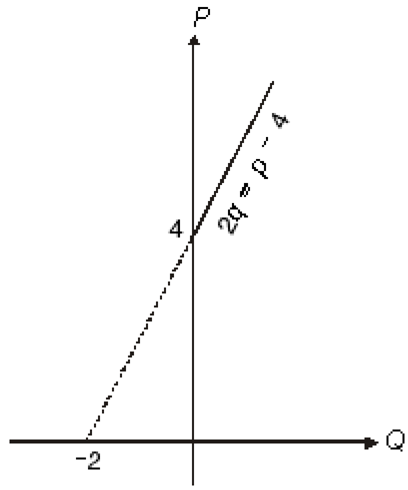
Contoh soal 31:

Gambarlah kurva fungsi penawaran $2q = p - 4$!

Jawab:

Jika $p = 0 \Rightarrow q = -2 \Rightarrow (-2, 0)$

Jika $q = 0 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow (0, 4)$



Contoh soal 32:

Sebuah perusahaan yang memproduksi alat-alat kantor memproduksi satu jenis pulpen merek "Jitu" dengan harga promosi Rp 18.000,00 per unit. Jumlah yang ditawarkan habis terjual 4.000 unit per hari. Pada saat harga Rp 24.000,00 per unit, jumlah yang ditawarkan habis terjual 6.000 unit per hari. Tentukan fungsi penawaran dari barang tersebut!

Jawab:

Dalam hal ini ada dua harga (p) dan ada dua jumlah (q):

p_1 = Rp 18.000,00; q_1 = 4.000 unit (4.000, 18.000)

p_2 = Rp 24.000,00; q_2 = 6.000 unit (6.000, 24.000)

$\frac{p - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{q - q_1}{q_2 - q_1}$ ⇒ persamaan garis melalui dua buah titik

$$\frac{p - 18.000}{24.000 - 18.000} = \frac{q - 4.000}{6.000 - 4.000}$$

$$\frac{p - 18.000}{6.000} = \frac{q - 4.000}{2.000}$$

$$p - 18.000 = \frac{6.000}{2.000}(q - 4.000)$$

$$p - 18.000 = 3q - 12.000$$

$$p = 3q - 12.000 + 18.000$$

$$p = 3q + 6.000$$

Jadi, fungsi penawaran yang dimaksud adalah $p = 3q + 6.000$.

Contoh soal 33:

Jika harga barang Rp 1.000,00, maka hanya terdapat 70 barang A di pasaran, sedangkan jika harga barang Rp 1.500,00, maka terdapat 120 barang A di pasaran. Tentukan persamaan fungsi penawaran barang tersebut!

Jawab:

Diketahui: q_1 = 70; p_1 = Rp 1.000,00

q_2 = 120; p_2 = Rp 1.500,00

Dapat juga ditulis dalam koordinat: (70, 1.000) dan (120, 1.500).

Gradien fungsi tersebut adalah:

$$b = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}$$

$$b = \frac{1.500 - 1.000}{120 - 70}$$

$$b = \frac{500}{50}$$

$$b = 10$$

$$p - p_1 = b(q - q_1)$$

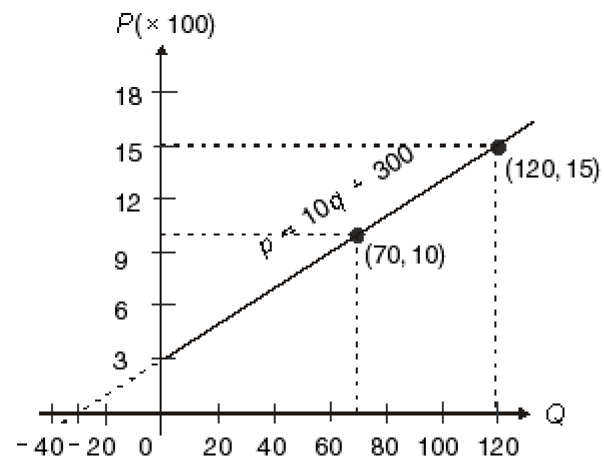
$$p - 1.000 = 10(q - 70)$$

$$p - 1.000 = 10q - 700$$

$$p = 10q - 700 + 1.000$$

$$p = 10q + 300$$

Jadi, fungsi penawarannya adalah $p = 10q + 300$.



b. Fungsi penawaran kuadrat (parabola)

Bentuk umum fungsi permintaan kuadrat ialah:

$$\boxed{p = aq^2 + bq + c \Rightarrow p = f(q)}$$

Sama dengan fungsi permintaan, daerah yang memenuhi hanya pada kuadran I (p dan q bernilai positif).

Contoh soal 34:

Gambarlah kurva fungsi penawaran kuadrat $p = q^2 + 2q + 2$!

Jawab:

Sumbu simetri parabola:

$$q = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$$

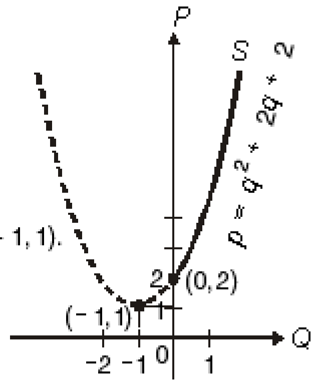
$p = 1 + 2(-1) + 2 = 1$

Koordinat titik baliknya $(-1, 1)$.

Titik potong pada sumbu $P \Rightarrow q = 0$:

$p = (0)^2 + 2(0) + 2 = 2$

Koordinatnya adalah $(0, 2)$.



2.4.3 Titik keseimbangan pasar

Titik keseimbangan pasar terjadi pada suatu harga, yaitu apabila jumlah permintaan sama dengan jumlah penawaran (persediaan). Dengan demikian, berlaku rumus berikut.

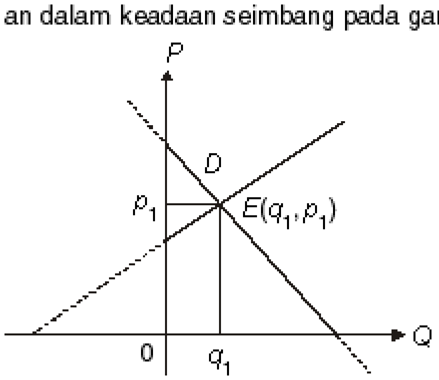
$$\boxed{q_D = q_S}$$

Keterangan:

q_D = kuantitas permintaan

q_S = kuantitas penawaran

Perhatikan kurva permintaan dan kurva penawaran dalam keadaan seimbang pada gambar 2.10!



Gambar 2.10

Pada gambar 2.10 titik $E(q_1, p_1)$ adalah titik keseimbangan pasar. Jadi, harga barang p_1 seimbang.

Contoh soal 35:

Tentukan titik keseimbangan pasar untuk fungsi permintaan (D) dan fungsi penawaran (S) berikut!

$D : p = 25 - 2q$

$S : p = 3q + 5$

Jawab:

Keseimbangan pasar bisa terjadi jika $q_D = q_S$.

$$q_D = q_S$$
$$25 - 2q = 3q + 5$$
$$-5q = -20$$
$$q = 4$$

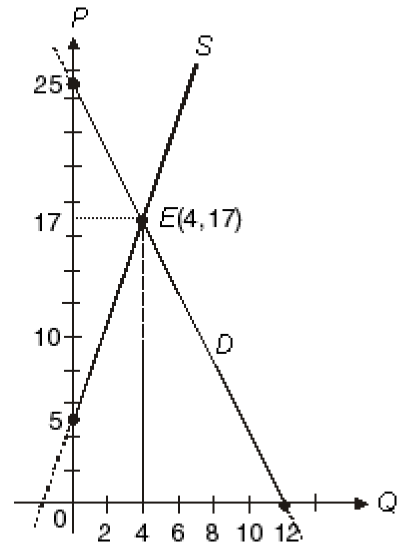
Nilai $q = 4$ dimasukkan ke salah satu fungsi:

$p = 25 - 2q$

$p = 25 - 2(4)$

$p = 25 - 8$

$p = 17$



Koordinat titik keseimbangan pasar $E(4, 17)$.

Jadi, dengan harga (p) 17 dan jumlah barang (q) 4 diperoleh keseimbangan pasar.

Contoh soal 36:

Fungsi permintaan terhadap komoditas ditentukan oleh fungsi $D : p = -q^2 - 2q + 48$.

Fungsi penawaran terhadap komoditas yang sama ditentukan oleh $S : p = q + 10$.

Tentukan koordinat titik keseimbangan pasar!

Jawab:

Titik keseimbangan pasar terjadi pada saat: $q_D = q_S$ atau $p_D = p_S$.

$$\begin{array}{rl} p_D = & -q_D^2 - 2q_D + 48 \\ p_S = & \qquad\qquad q_S + 10 \\ \hline 0 = & -q_D^2 - 3q + 38 \end{array} -$$

$$q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$q_{12} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-1)(38)}}{2(-1)}$$

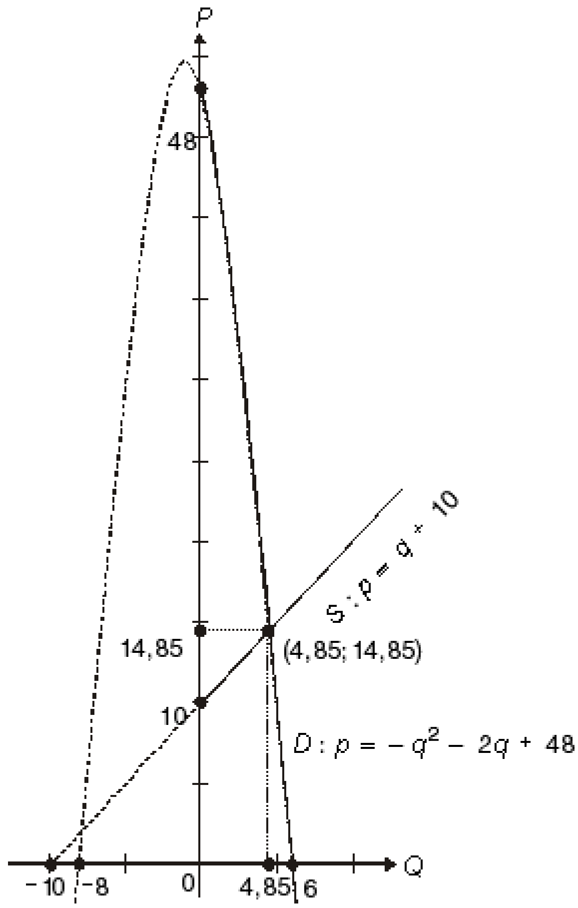
$$q_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 152}}{-2} = \frac{3 \pm \sqrt{161}}{-2}$$

$$q_1 = \frac{3 + 12{,}69}{-2} = -7{,}85 \qquad \text{(tidak memenuhi)}$$

$$q_2 = \frac{3 - 12{,}69}{-2} = 4{,}85 \qquad \text{(memenuhi)}$$

$p = q + 10 \Rightarrow p = 4{,}85 + 10 = 14{,}85$

Jadi, titik keseimbangan pasar ialah $(q, p) = (4{,}85; 14{,}85)$.



Contoh soal 37:

Diketahui fungsi permintaan $D : q = 12 - 1\frac{1}{2}p$ dan fungsi penawaran $S : q = p^2 - 16$. Tentukan titik keseimbangan pasar kedua fungsi tersebut!

Jawab:

Titik keseimbangan pasar tercapai apabila: $q_D = q_S$.

$$q_D = 12 - 1\frac{1}{2}p$$

$$q_S = p^2 - 16 \Leftrightarrow 12 - 1\frac{1}{2}p = p^2 - 16$$

$$\Leftrightarrow p^2 + 1\frac{1}{2}p - 16 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 + 1\frac{1}{2}p - 28 = 0$$

Dengan menggunakan rumus *abc*:

$$p_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{(1\frac{1}{2})^2 - 4(1)(-28)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{2{,}25 + 112}}{2}$$

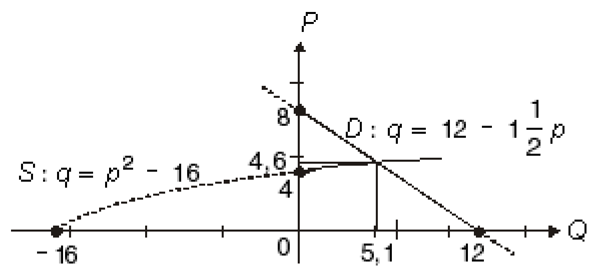
$$= \frac{-1\frac{1}{2} \pm \sqrt{114{,}25}}{2} = \frac{-1\frac{1}{2} \pm 10{,}69}{2}$$

$$p_1 = \frac{-1\frac{1}{2} + 10{,}69}{2} = 4{,}595 = 4{,}6 \quad \text{(memenuhi)}$$

$$p_2 = \frac{-1\frac{1}{2} - 10{,}69}{2} = -6{,}095 = -6{,}1 \quad \text{(tidak memenuhi)}$$

$$q = 12 - 1\frac{1}{2}p \quad \Rightarrow q = 12 - 1\frac{1}{2}(4{,}6) = 5{,}1$$

Jadi, titik keseimbangan pasar adalah $(5{,}1; 4{,}6)$.



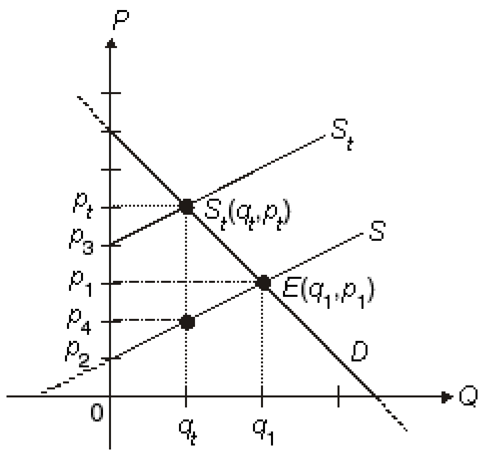
2.4.4 Pengaruh perpajakan dalam fungsi permintaan dan fungsi penawaran

Apabila pemerintah mengenakan pajak terhadap barang tertentu, maka permintaan barang tersebut menjadi menurun. Penyebabnya adalah harga menjadi mahal. Hal itu sesuai dengan hukum permintaan. Ada beberapa hal penting yang harus diperhatikan setelah suatu barang terkena pajak, yaitu:

1. fungsi permintaan tetap, karena permintaan bergantung pada harga barang;
2. produsen akan menyesuaikan harga setelah terkena pajak;
3. fungsi penawaran berubah.

Jika fungsi penawaran sebelum terkena pajak $S : p = f(q)$, maka setelah terkena pajak sebesar t, fungsi penawaran berubah menjadi $S_t : p = f(q) + t$. Sedangkan, fungsi permintaan sebelum dan sesudah terkena pajak adalah tetap, yaitu $P : p = f(q)$. Titik keseimbangan pasar sebelum terkena pajak adalah $E(D, q_2)$ dan setelah terkena pajak menjadi $E_t(q_t, p_t)$.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan kurva kedua fungsi pada gambar 2.11!



Gambar 2.11

D = kurva permintaan

S = kurva penawaran sebelum terkena pajak

S_t = kurva penawaran setelah terkena pajak sebesar t per unit

Pada gambar 2.11, dapat diketahui:

besar total pajak $= q_1(p_3 - p_2)$;

pajak yang ditanggung konsumen per unit $= p_t - p_1$;

jumlah pajak yang ditanggung konsumen $= (p_t - p_1)q_t$;

jumlah pajak yang ditanggung produsen $= (p_1 - p_4)q_t$.

Contoh soal 38:

Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran, masing-masing adalah $D : 5p + 2q = 200$ dan $S : p = \frac{4}{5}q + 10$. Tentukan:

a. keseimbangan harga dan kuantitas;

b. keseimbangan harga dan kuantitas apabila dikenakan pajak sebesar 6 per unit;

c. besar pajak yang ditanggung konsumen;

d. besar pajak yang ditanggung produsen!

Jawab:

Fungsi permintaan $D : 5p + 2q = 200$ dapat diubah menjadi $D : p = 40 - \frac{2}{5}q$. Fungsi penawaran $S : p = \frac{4}{5}q + 10$.

a. Syarat keseimbangan pasar adalah $q_D = q_S$.

$$q_D = q_S$$

$$40 - \frac{2}{5}q = \frac{4}{5}q + 10$$

$$-\frac{2}{5}q - \frac{4}{5}q = 10 - 40$$

$$-\frac{6}{5}q = -30$$

$$q = 25$$

Kemudian, $q = 25$ disubstitusikan ke persamaan fungsi penawaran, diperoleh:

$$p = \frac{4}{5}(25) + 10 = 20 + 10 = 30$$

Jadi, keseimbangan pasar sebelum terkena pajak adalah $q_1 = 25$ dan $p_1 = 30$.

b. Fungsi permintaan $D : p = 40 - \frac{2}{5}q$

Fungsi penawaran $S : p = \frac{4}{5}q + 10$

Setelah terkena pajak sebesar 6 per unit, fungsi penawaran menjadi

$S_t : p = \frac{4}{5}q + 10 + 6$ atau $S_t : p = \frac{4}{5}q + 16$

Syarat terjadinya keseimbangan pasar adalah $q_D = q_S$.

$$q_D = q_S$$

$$40 - \frac{2}{5}q = \frac{4}{5}q + 16$$

$$-\frac{2}{5}q - \frac{4}{5}q = 16 - 40$$

$$-\frac{6}{5}q = -24$$

$$q = 20$$

Kemudian, $q = 20$ disubstitusikan ke persamaan fungsi permintaan, diperoleh:

$$p = 40 - \frac{2}{5}(20) = 40 - 8 = 32$$

Jadi, keseimbangan pasar setelah terkena pajak sebesar 6 per unit terjadi pada $q_t = 20$ dan $p_t = 32$.

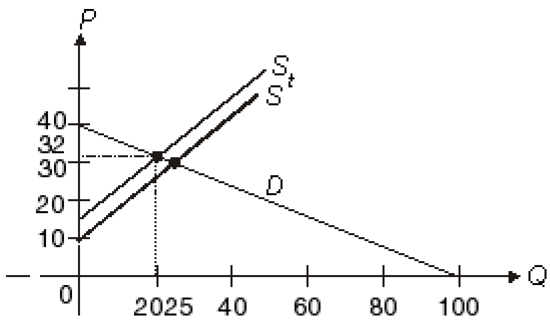
Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar kedua fungsi berikut!

$D : p = 40 - \frac{2}{5}q$

q	0	100
p	40	0

$S : p = \frac{4}{5}q + 10$

q	0	–12,5
p	10	0



c. Besar pajak per unit yang ditanggung konsumen:

$p_t - p_1 = 32 - 30 = 2$

Besar pajak yang ditanggung konsumen:

$(p_t - p_1)q_t = 2(20) = 40$

d. Besar pajak per unit yang ditanggung produsen:

$$p_1 - p_4 = 30 - (\frac{4}{5}(20) + 10) = 30 - (16 + 10)$$
$$= 30 - 26 = 4$$

Besar pajak yang ditanggung produsen:

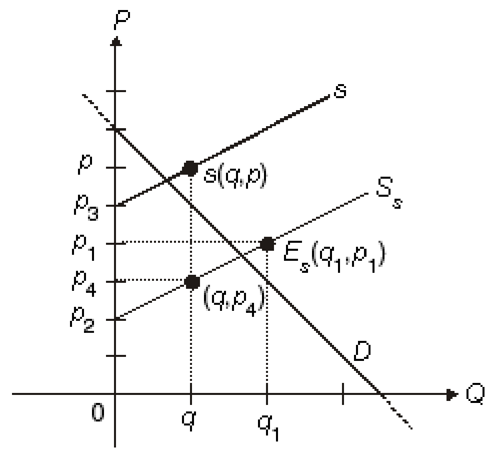
$(p_1 - p_4)q_t = 4(20) = 80$

2.4.5 Pengaruh subsidi dalam fungsi permintaan dan fungsi penawaran

Subsidi merupakan bantuan pemerintah terhadap produsen, sehingga produsen tersebut dapat meningkatkan jumlah produksi barangnya dan harga barang tersebut menurun. Hal itu berpengaruh terhadap kurva penawaran, yaitu kurva penawaran akan bergeser ke bawah. Akibatnya, permintaan terhadap barang tersebut akan bertambah. Fungsi permintaan tetap, sedangkan fungsi penawaran berubah, yaitu bergeser ke bawah. Jika fungsi penawaran $S : p = f(q)$, maka setelah subsidi fungsi penawaran menjadi:

$$\boxed{S_s : p = f(q) - s}$$

Setelah mendapat subsidi dari pemerintah, besar total subsidi: $(S) = s \cdot x_s$ atau $q_s(p_2 - p_3)$; penurunan harga $= (p_1 - p_s)$.



Gambar 2.12

Contoh soal 39:

Dari contoh soal nomor 38, tentukan keseimbangan pasar, apabila pemerintah mensubsidi sebesar 8 per unit! Tentukan besar subsidinya!

Jawab:

Fungsi permintaan $D : p = 40 - \frac{2}{5}q$

Fungsi penawaran $S : p = \frac{4}{5}q + 10$

Setelah mendapat subsidi sebesar 8 per unit, fungsi penawaran menjadi:

$S_s : p = \frac{4}{5}q + 10 - 8$ atau $S_s : p = \frac{4}{5}q + 2$

Titik keseimbangan pasar sebelum diberikan subsidi adalah $E_1(25, 30)$. Titik keseimbangan setelah subsidi:

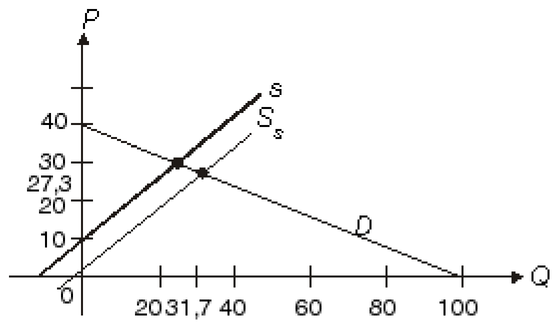
$$q_D = q_S$$
$$40 - \frac{2}{5}q = \frac{4}{5}q + 2$$
$$-\frac{2}{5}q - \frac{4}{5}q = 2 - 40$$
$$-\frac{6}{5}q = -38$$
$$q = 31,7$$

Kemudian, $q = 31,7$ disubstitusikan ke persamaan fungsi permintaan, diperoleh:

$$p = 40 - \frac{2}{5}(31,7) = 40 - 12,68 = 27,32 = 27,3$$

Jadi, titik keseimbangan setelah subsidi adalah $E_S(31,7; 27,3)$.

Besar subsidi: $s \cdot x_s = 8(31,7) = 235,6$



Latihan 5

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Sebuah pabrik televisi dapat menjual 3.000 unit televisi per bulan dengan harga Rp600.000,00 per unit. Apabila harganya diturunkan menjadi Rp400.000,00 penjualan meningkat menjadi 4.000 unit. Tentukan persamaan fungsi permintaannya!
2. Pada harga Rp3.000,00 per pasang, sebuah perusahaan sandal akan dapat menyediakan 10.000 pasang per bulan. Pada harga Rp5.000,00 per pasang, perusahaan akan dapat menyediakan 20.000 pasang per bulan. Tentukan persamaan penawarannya!
3. Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran berturut-turut $D: 3p + 4q = 12$ dan $S: p = q + 5$. Tentukan titik keseimbangan kedua fungsi tersebut!

Untuk soal nomor 4 sampai dengan nomor 7, tentukan keseimbangan harga dan kuantitas untuk fungsi permintaan dan penawaran!

4. $D: 2p + 3q = 100$
   $S: p = \frac{1}{10}q + 2$
5. $D: 3p + 5q = 200$
   $S: 7p - 3q = 56$
6. $D: 4p = 50 - q$
   $S: 6p = 5q - 10$
7. $D: 5p = 80 - 8q$
   $S: 3p = 2q - 1$

2.4.6 Model biaya linear (Pengayaan)

Dalam memproduksi suatu barang, suatu perusahaan akan menanggung dua jenis biaya, yaitu biaya variabel dan biaya tetap. *Biaya variabel* adalah biaya yang bergantung pada tingkat produksi. Jadi, biaya variabel bergantung pada jumlah barang yang diproduksi. Contohnya, biaya upah dan biaya bahan.

Biaya tetap adalah biaya yang harus ada atau dikenakan, tidak bergantung pada besar atau kecilnya jumlah barang yang diproduksi. Contohnya, gaji pegawai, pemeliharaan gedung, dan bunga pinjaman. Biaya total dalam memproduksi suatu barang dirumuskan:

$$\boxed{\text{biaya total} = \text{biaya tetap} + \text{biaya variabel}}$$

Misalkan, biaya total = y_c, biaya tetap = b, dan biaya variabel = m, maka rumus di atas menjadi:

$$\boxed{y_c = mx + b}$$

Rumus tersebut merupakan model linear, sehingga grafiknya berupa garis lurus.

Contoh soal 40:

Biaya variabel untuk memproses 1 kg biji coklat adalah Rp1.000,00 dan diketahui biaya tetap per hari adalah Rp500.000,00.

a. Tentukan biaya dalam bentuk persamaan linear!
b. Tentukan biaya untuk memproses 1.500 kg coklat per hari!

Jawab:

a. Model biaya dalam persamaan linear adalah

$$y_c = mx + b$$
$$= 1.000x + 500.000$$

Jika dinyatakan dalam ribuan, persamaannya dapat ditulis menjadi

$$y_c = x + 500$$

b. Biaya untuk memproses 1.500 kg coklat per hari:

$$y_c = x + 500$$
$$= 1.500 + 500 = 2.000$$

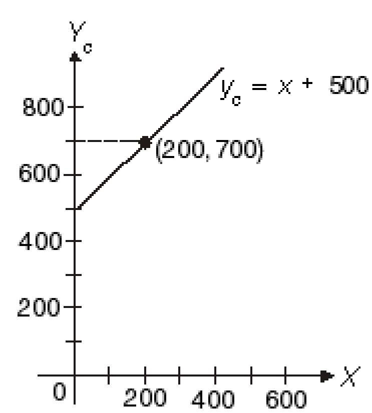
Jadi, biaya total untuk memproduksi 1.500 kg coklat per hari adalah:

Rp2.000,00 × Rp1.000,00 = Rp2.000.000,00

Untuk menggambar kurva biaya, diambil titik:

$x = 0 \Rightarrow y_c = 0 + 500 = 500$

$x = 200 \Rightarrow y_c = 200 + 500 = 700$

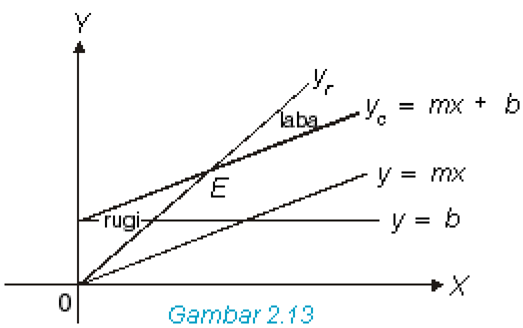


2.4.7 Titik pulang pokok

Jika biaya produksi y_c lebih tinggi daripada pendapatan total y_r, maka suatu usaha dikatakan rugi. Sebaliknya, jika biaya produksi y_c lebih rendah daripada pendapatan y_r, maka suatu usaha dikatakan untung.

Jika biaya produksi y_c sama dengan pendapatan y_r, maka suatu usaha tidak untung dan tidak rugi. Hal seperti itu dikatakan biaya produksi dan penjualan berada pada titik pulang pokok (*break even point*).

Perhatikan kurva titik pulang pokok pada gambar 2.13!



Gambar 2.13

Keterangan:

$y = b$: biaya tetap (*fixed cost*)

$y = mx$: biaya variabel (*variabel cost*)

$y_c = mx + b$: biaya total (*total cost*)

y_r = pendapatan total (*total revenue*)

E = titik pulang pokok

Titik pulang pokok terjadi, jika $y_c = y_r$.

Perusahaan menderita rugi, jika $y_c > y_r$.

Perusahaan mendapatkan untung, jika $y_c < y_r$.

Contoh soal 41:

Biaya tetap sebuah perusahaan *furniture* untuk pembuatan kursi ditentukan oleh $y_c = 300.000x + 40.000.000$.

a. Pada penjualan berapa unit titik pulang pokok terjadi, jika kursi dijual dengan harga Rp800.000,00 per unit?

b. Pada penjualan berapa unit titik pulang pokok terjadi, jika harga kursi dinaikkan menjadi Rp1.000.000,00 per unit?

c. Jika terjual paling sedikit 100 kursi, berapa harga jual agar tidak rugi?

Jawab:

a. Jika tiap kursi dijual dengan harga Rp 800.000,00, maka pendapatan yang diperoleh dari penjualan kursi adalah $y_r = 800.000x$.

Titik pulang pokok diperoleh jika:

$$y_r = y_c$$
$$800.000x = 300.000x + 40.000.000$$
$$500.000x = 40.000.000$$
$$x = 80$$

Jadi, titik pulang pokok terjadi pada penjualan 80 kursi.

b. Jika harga dari tiap kursi dinaikkan menjadi Rp1.000.000,00, pendapatan yang diperoleh dari penjualan kursi menjadi $y_r = 1.000.000x$.

Titik pulang pokok diperoleh, jika:

$$y_r = y_c$$
$$1.000.000x = 300.000x + 40.000.000$$
$$700.000x = 40.000.000$$
$$x = 57$$

Jadi, titik pulang pokok terjadi pada penjualan 57 kursi.

c. Misal harga jual tiap kursi p rupiah, maka penerimaan yang diperoleh dari penjualan 100 kursi adalah $y_r = 100p$ dan biaya untuk memproduksi 100 buah kursi sama dengan:

$$y_c = 300.000x + 40.000.000$$
$$= 300.000(100) + 40.000.000$$
$$= 70.000.000$$

Titik pulang pokok diperoleh jika:

$$y_r = y_c$$
$$100p = 70.000.000$$
$$p = \frac{70.000.000}{100}$$
$$= 700.000$$

Jadi, kursi harus dijual dengan harga Rp700.000,00 per buah agar perusahaan tidak rugi.

Latihan 6

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Biaya variabel untuk pembuatan sebuah lemari sebesar Rp 9.000,00 dan biaya tetapnya adalah Rp 250.000,00 per hari. Tentukan biaya total y_C untuk pembuatan 150 buah lemari!

2. Biaya total selama satu minggu untuk pembuatan 200 unit televisi adalah Rp 20.000.000,00 dan untuk pembuatan 250 unit televisi adalah Rp 25.000.000,00.
   a. Tentukan persamaan biayanya!
   b. Berapa biaya tetap dan biaya variabel per unit?
3. Sebuah pabrik memproduksi satu jenis barang dengan biaya variabel Rp 950,00 per buah dan biaya tetap Rp 300.000,00 per hari. Jika tiap barang dapat dijual dengan harga Rp 1.400,00, tentukan titik pulang pokoknya!
4. Sebuah pabrik yang bekerja 24 jam per hari mempunyai biaya tetap bulanan sebesar Rp 5.000.000,00 dan biaya variabel Rp 900,00 untuk setiap barang yang dikerjakan. Barang itu terjual seharga Rp 1.800,00 per buah.
   a. Lukislah kurva biayanya!
   b. Tentukan titik pulang pokok!
   c. Lukislah garis laba!
   d. Pada titik mana grafik laba memotong sumbu X? Jelaskan!
5. Sebuah perusahaan memproduksi televisi dengan biaya variabel Rp900.000,00 per buah dan biaya tetap tiap bulan Rp120.000.000,00. Jika televisi tersebut dijual seharga Rp1.000.000,00 per buah.
   a. Tentukan titik pulang pokok!
   b. Apakah yang akan dialami perusahaan tersebut jika hanya 1.000 unit per bulan yang dapat diproduksi dan terjual semua?
   c. Berapa banyak unit yang harus diproduksi oleh pabrik tersebut agar terealisasi laba Rp9.000.000,00 per bulan?

Lembar Tugas 4

1. Diketahui fungsi permintaan dan penawaran masing-masing adalah:

   $D: 3y + 6x = 9$ dan $S: 2y - 3x = 8$, di mana x adalah variabel kuantitas dan y variabel harga. Jika barang tersebut diberikan subsidi sebesar $s = 2$, maka:

   a. tentukan keseimbangan pasar sebelum diberikan subsidi;
   b. tentukan keseimbangan pasar setelah diberikan subsidi;
   c. tentukan besarnya subsidi yang diberikan pemerintah terhadap barang tersebut;
   d. gambarlah kurvanya!
2. Biaya tetap untuk memproduksi sejenis barang adalah Rp 6.000.000,00 per bulan dan biaya variabel Rp 4.500,00 per unit. Jika produk itu dijual seharga Rp 7.000,00 per unit.
   a. Tentukan titik pulang pokok!
   b. Tentukan banyak unit yang harus diproduksi dan terjual tiap bulan untuk memperoleh laba Rp 1.000.000,00!
3. Biaya variabel dalam mengerjakan 1 kg kopi adalah Rp500,00 dan biaya tetap per hari Rp300.000,00. Jumlah kopi yang dikerjakan rata-rata 1.000 kg per hari. Tentukan:
   a. persamaan fungsi linear biaya dan grafiknya;
   b. biaya untuk mengerjakan 1.000 kg biji kopi dalam sehari!

Tugas Kelompok

Lakukan observasi ke pasar/swalayan terdekat, selanjutnya catatlah pembelian barang dari beberapa konsumen (minimal 2 konsumen) yang memuat jumlah barang dengan jumlah harga.

1. Buatlah persamaan linear dengan bantuan rumus: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, kemudian gantilah x dengan q (jumlah barang) dan gantilah y dengan p (*price*/harga) sehingga diperoleh persamaan dengan variabel p dan q!
2. Gambarlah dalam diagram kartesius dengan sumbu $y = p$ dan sumbu $x = q$!
3. Tentukan apakah persamaan tersebut merupakan fungsi permintaan ataukah fungsi penawaran. Jelaskan!

Rangkuman

1. Penggunaan kata *relasi* dalam kehidupan sehari-hari berarti hubungan. Hubungan itu bisa berarti hubungan keluarga, teman atau kerabat, ataupun hubungan bisnis dan kerja.

   Kata *relasi* dalam matematika berarti hubungan atau pasangan tertentu antara dua buah himpunan yang bisa dinyatakan dalam suatu diagram, baik diagram panah maupun diagram Cartesius.

2. *Fungsi f* atau *pemetaan f* dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi khusus yang memasangkan setiap anggota atau elemen A dengan tepat satu anggota B.

   Fungsi linear dapat diperoleh dengan menggunakan hubungan berikut :

   $y = mx + c$ atau $y = ax + b$ di mana $m = a$ = gradien/koefisien arah dan $c = b$ = konstanta.

3. Arah dari grafik fungsi linear atau garis lurus ditentukan oleh gradien atau koefisien arah, yaitu a dan m.
   a. Jika a atau m lebih besar dari nol, arah garis lurus adalah dari kiri bawah ke kanan atas.
   b. Jika a atau m lebih kecil dari nol, arah garis lurus adalah dari kiri atas ke kanan bawah.
   c. Jika a atau m sama dengan nol, arah garis lurus adalah sejajar sumbu X.
   d. Jika a atau m sama dengan tak terhingga, arah garis lurus adalah sejajar sumbu Y.

4. Dua buah garis dikatakan saling sejajar, jika gradien kedua garis tersebut sama ($m_1 = m_2$).

5. Dua buah garis dikatakan saling tegak lurus, apabila gradien kedua garis tersebut saling berkebalikan dan berlawanan arah. Dapat juga dituliskan dengan $m_1 = \frac{-1}{m_2}$ atau $m_1 \cdot m_2 = -1$

6. Grafik dari fungsi kuadrat membentuk suatu leng-kungan teratur yang disebut *parabola*. Karena itu, fungsi kuadrat disebut juga persamaan parabola.

7. *Nilai ekstrim* adalah nilai tertinggi (maksimum) atau nilai terendah (minimum) yang dicapai oleh suatu fungsi.

8. Parabola merupakan grafik yang simetris. Garis yang membagi parabola secara simetris disebut sumbu simetri.

9. *Titik puncak (titik balik) fungsi kuadrat* adalah ti-tik tempat terjadinya perubahan nilai fungsi, dari turun menjadi naik atau dari naik menjadi turun.

10. *Fungsi permintaan* merupakan hubungan antara peubah harga (p) dan peubah jumlah barang atau jasa (q) yang diminta.

    Apabila harga suatu barang di pasaran turun, maka biasanya konsumen akan menyerbu barang tersebut. Dengan kata lain, permintaan terhadap barang tersebut meningkat. Sebaliknya, apabila harga barang naik, maka konsumen akan menjauhi barang tersebut. Dengan kata lain, permintaan terhadap barang tersebut menurun. Jadi, dalam hukum permintaan, kita melihat bahwa besar kecilnya jumlah barang yang diminta sangat bergantung pada tingkat harga barang tersebut, sedangkan keadaan lainnya tetap (*ceteris paribus*). Hubungan fungsinya adalah:

11. *Fungsi penawaran* merupakan hubungan antara peubah (variabel) harga (p) dan peubah (variabel) jumlah barang atau jasa (q) yang ditawarkan. Hubungan antara jumlah barang yang ditawarkan pada berbagai tingkat harga dapat digambarkan dalam suatu grafik yang disebut *kurva penawaran*.

12. Kurva penawaran mempunyai persyaratan, yaitu hanya berlaku untuk peubah jumlah (q) dan peubah harga (p) positif (di kuadran I). Dalam hukum penawaran, kita melihat bahwa besar kecilnya jumlah suatu barang yang ditawarkan sangat bergantung pada tingkat harga barang tersebut. Apabila keadaan lainnya tetap (*ceteris paribus*) dan harga suatu barang naik, maka jumlah yang ditawarkan untuk barang tersebut bertambah. Hal itu disebabkan, produsen berusaha untuk memperoleh keuntungan yang lebih besar.

    Sebaliknya, jika harga barang turun, jumlah yang ditawarkan akan berkurang. Hal itu disebabkan, produsen berusaha mengurangi kerugiannya.

Dengan demikian, fungsi penawaran dapat kita sebut juga sebagai *fungsi perilaku produsen.*

Pada prinsipnya, fungsi penawaran terbagi menjadi dua, yaitu fungsi penawaran linear dan fungsi penawaran nonlinear.

13. Titik keseimbangan pasar terjadi pada suatu harga, yaitu apabila jumlah permintaan sama dengan jumlah penawaran (persediaan). Dengan demikian, berlaku rumus berikut.

14. Ada beberapa hal penting yang harus diperhatikan setelah suatu barang terkena pajak, yaitu:
    a. fungsi permintaan tetap, karena permintaan bergantung pada harga barang;
    b. produsen akan menyesuaikan harga setelah terkena pajak;
    c. fungsi penawaran berubah.

15. *Subsidi* merupakan bantuan pemerintah terhadap produsen, sehingga produsen tersebut dapat meningkatkan jumlah produksi barangnya dan harga barang tersebut menurun. Hal itu berpengaruh terhadap kurva penawaran, yaitu kurva penawaran akan bergeser ke bawah. Akibatnya, permintaan terhadap barang tersebut akan bertambah. Fungsi permintaan tetap, sedangkan fungsi penawaran berubah, yaitu bergeser ke bawah.

16. Dalam memproduksi suatu barang, suatu perusahaan akan menanggung dua jenis biaya, yaitu biaya variabel dan biaya tetap. *Biaya variabel* adalah biaya yang bergantung pada tingkat produksi. Jadi, biaya variabel bergantung pada jumlah barang yang diproduksi. Contohnya, biaya upah dan biaya bahan. *Biaya tetap* adalah biaya yang harus ada atau dikenakan, tidak bergantung pada besar atau kecilnya jumlah barang yang diproduksi. Contohnya, gaji pegawai.

Evaluasi

A. Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Koordinat titik balik maksimum dari $f(x) = -6 - (x-4)^2$ adalah ... .
   a. $(4, -6)$
   b. $(4, 6)$
   c. $(2, -6)$
   d. $(2, 6)$
   e. $(-4, -6)$

2. Persamaan garis lurus yang menyinggung $y = x^2 - 5x + 7$ di titik $(1, 3)$ adalah ... .
   a. $y = 6x - 3$
   b. $y = 6x + 3$
   c. $y = -3x + 6$
   d. $y = 3x + 6$
   e. $y = 3x - 6$

3. Persamaan garis lurus yang melalui $A(2, 3)$ dan sejajar dengan garis lurus yang melalui $(-2, -4)$ dan $(1, 5)$ adalah ... .
   a. $x - 3y - 3 = 0$
   b. $3x - y - 3 = 0$
   c. $3x - 3y - 1 = 0$
   d. $3x - y + 10 = 0$
   e. $x - 3y + 3 = 0$

4. Nilai sumbu simetri parabola $y = x^2 + 4x - 30$ adalah ... .
   a. -4
   b. -2
   c. -1
   d. 2
   e. $7\frac{1}{2}$

5. Garis $ax + by + c = 0$ tegak lurus terhadap garis $px + qy + r = 0$, maka ... .
   a. $ap - bq = 0$
   b. $ap + bq = 0$
   c. $aq + bp = 0$
   d. $aq - bp = 0$
   e. $ab - pq = 0$

6. Fungsi permintaan terhadap suatu komoditas ditentukan oleh $p + 2q - 100 = 0$ dengan p = harga dan q = jumlah. Jika pada suatu saat terdapat permintaan sebanyak 25 unit, maka harga per unit komoditas tersebut adalah ... satuan harga.
   a. 10
   b. 25
   c. 50
   d. 75
   e. 100

7. Fungsi penawaran dari suatu barang ditentukan oleh S: $2p = q + 12$ dengan p menyatakan harga dan q menyatakan jumlah unit barang. Jumlah unit barang yang ditawarkan, apabila harganya Rp 60,00 per unit adalah ... unit.
   a. 160
   b. 162
   c. 170
   d. 172
   e. 178
8. Biaya yang diperlukan sebuah perusahaan untuk memproduksi suatu barang ditentukan oleh $C = 100x + 1.000.000$, di mana x menyatakan banyaknya unit barang. Biaya total untuk memproduksi 5.000 unit barang adalah ... .
   a. Rp 1.250.000,00
   b. Rp 1.400.000,00
   c. Rp 1.500.000,00
   d. Rp 1.750.000,00
   e. Rp 2.000.000,00
9. Biaya total sebuah perusahaan ditentukan dengan $TC = 100x + 500.000$ dan menggunakan satuan harga dalam rupiah. Jika diproduksi sebanyak 1.000 unit, biaya rata-rata per unit adalah ... .
   a. Rp 100,00
   b. Rp 500,00
   c. Rp 600,00
   d. Rp 1.000,00
   e. Rp 1.100,00
10. Ditentukan harga barang p rupiah per kilogram dan permintaan terhadap barang tersebut q unit per hari. Jika permintaan ditentukan oleh fungsi $q = 150 - 2p$, maka untuk permintaan 100 unit, harga per unitnya adalah ... .
   a. Rp 75,00
   b. Rp 65,00
   c. Rp 50,00
   d. Rp 25,00
   e. Rp 20,00
11. Baik permintaan (D) maupun penawaran (S) sangat bergantung pada harga. Secara aljabar, permintaan dan penawaran dirumuskan dengan:

   $D : q_D = 150 - 2p$ dan $S : q_S = 15 + 3p$

   Pada keadaan keseimbangan pasar, harga barang tersebut adalah ... .
   a. 15
   b. 17
   c. 18
   d. 27
   e. 34
12. Terhadap suatu jenis produk yang dikeluarkan oleh perusahaan A dengan harga Rp 2.500,00 per unit, jumlah yang ditawarkan dan terjual sebanyak 1.230 unit. Pada saat harga dinaikkan menjadi Rp 4.000,00, jumlah yang ditawarkan sebanyak 1.980 unit dan habis terjual. Fungsi penawaran barang tersebut adalah ... .
   a. $20p + 40q = 800$
   b. $20p - 40q = 800$
   c. $20p - 80q = 800$
   d. $40p + 20q = 800$
   e. $40p - 20q = 800$
13. PT Tugas Kita Bersama memproduksi barang jenis A. Biaya tetap perusahaan per bulan Rp 4.800.000,00 dan biaya produksi per unit Rp 300,00. Barang A dijual dengan harga Rp 42.000,00 per unit. Jumlah unit minimum barang A yang harus diproduksi dan habis terjual agar diperoleh untung adalah ... unit.
   a. 420
   b. 405
   c. 401
   d. 400
   e. 380
14. Biaya total sebuah perusahaan untuk memproduksi satu jenis barang ditentukan oleh persamaan: $C = 10x^2 - 1.500x + 350.000$. Jika suatu saat dana yang tersedia hanya Rp 360.000,00, jumlah unit barang yang sanggup diproduksi adalah ... unit. (x = jumlah produksi)
   a. 50
   b. 100
   c. 150
   d. 200
   e. 500
15. Sebuah biro travel membuat program paket wisata Jawa - Bali selama 8 hari. Dengan program tersebut, travel mengharapkan pendapatan yang akan ditentukan oleh fungsi: $R = x^2 + 10x + 500$, R = pendapatan (dalam puluhan ribu rupiah) dan x = jumlah wisatawan yang mengikuti program. Pada rombongan pertama, pemasukan yang diperoleh sebesar $R = 3.500 \times$ Rp 10.000,00, maka jumlah peserta wisata yang ikut adalah ... orang.
   a. 25
   b. 30
   c. 40
   d. 50
   e. 60
16. Permintaan terhadap suatu jenis barang ditentukan jika harga 10, maka jumlah barang yang diminta 200 unit dan jika harga 15, maka jumlah barang yang diminta 10 unit. Fungsi permintaan terhadap barang tersebut adalah ... .
   a. $p = -20q + 400$
   b. $p = 20q + 400$
   c. $q = -20p + 400$
   d. $q = 20p + 400$
   e. $q = -p + 20$
17. Penawaran terhadap suatu jenis barang ditentukan jika harga 10 per unit, maka jumlah barang yang terjual 150 unit dan jika harga dinaikkan menjadi 15 per unit, maka jumlah barang yang terjual 200 unit. Fungsi penawaran barang tersebut adalah ...

a. $q = 10p + 50$
b. $q = -10p + 50$
c. $p = 10q + 50$
d. $p = -10q + 50$
e. $q = -p + 5$

18. Fungsi permintaan dan penawaran terhadap satu jenis komoditas ditentukan oleh:

$D : q_D = -5p_D + 90$ dan $S : q_S = 3p_S + 10$

Titik keseimbangan pasar terjadi jika harga barang atau komoditas tersebut ... unit.

a. 5
b. 6
c. 8
d. 10
e. 40

19. Fungsi penawaran dan permintaan terhadap satu jenis barang adalah:

$S : p_S = q_S + 14$ dan $D : p_D = -5q_D + 74$

Titik keseimbangan barang tersebut adalah ... .

a. (42, 5)
b. (5,42)
c. (24, 10)
d. (10,24)
e. (8,32)

20. Harga terendah dari fungsi penawaran $2y = 20 - 3x$ adalah ... .

a. 5
b. 10
c. 20
d. 25
e. 30

B. Kerjakanlah soal-soal berikut ini!

1. Tentukan persamaan sebuah garis yang melalui titik $Q(0,4)$ dengan koefisien arah 2!
2. Diketahui titik $A(0,3)$ dan titik $B(4,0)$. Tentukan:
   a. persamaan garis AB;
   b. panjang garis AB!
3. Tentukan nilai m, agar grafik garis $y + 3x = \frac{1}{2}mx + 2$ sejajar dengan grafik garis yang mempunyai persamaan $3y + 3x = 2mx - 6$! Hitunglah jarak kedua garis tersebut!
4. Diketahui fungsi kuadrat $y = x^2 + ax + b$ mempunyai nilai minimum 4 untuk $x = -2$. Tentukan nilai a dan b!
5. Tentukan nilai a, jika grafik fungsi $y = ax^2 - 12x + 3$ menyinggung sumbu X di titik (2, 0)!
6. Diketahui fungsi permintaan $D : q_D = 100 - 4p_D$ dan fungsi penawaran $S : q_S = -50 + 6p_S$. Berapa harga dan jumlah permintaan atau penawaran pada harga pasar? Gambarkan juga grafiknya!
7. Tabel permintaan dan penawaran akan sepeda motor merek AB di Surabaya adalah sebagai berikut.

Harga	Permintaan (unit)	Penawaran (unit)
Rp 7.000.000,00	110	60
Rp 8.500.000,00	100	70
Rp 9.000.000,00	80	80
Rp 10.000.000,00	50	90
Rp 12.000.000,00	20	100

   a. Gambarkan kurva permintaan dan penawaran dalam satu grafik!
   b. Tentukan harga keseimbangan pasarnya dalam bentuk grafik dan angka!

Bab 3

Barisan dan Deret

Kelas XI

Sumber: www.flipmysite.net/imagesbookstore

Gambar di samping menunjukkan aktivitas di sebuah toko. Setiap hari, omset penjualan di toko tersebut dapat dicatat dan hasil pencatatan tersebut dapat membentuk barisan dan deret. Dari data tersebut dapat dilakukan analisis untuk mengetahui perkembangan omset harian, sehingga dengan mudah dapat diketahui fluktuasinya (naik/turunnya). Dalam hal ini, ilmu matematika digunakan untuk mendapatkan data analisis pasar yang akurat.

Untuk lebih memahami materi dan aplikasi dalam kehidupan sehari-hari, maka marilah kita pelajari materi ini dengan saksama!

Peta Konsep

Menerapkan konsep barisan dan deret dalam pemecahan masalah

→

- Pola, barisan, dan deret bilangan
- Notasi sigma
- Barisan dan deret aritmetika
- Suku ke-n suatu barisan aritmetika
- Jumlah n suku suatu deret aritmetika
- Barisan dan deret geometri
- Suku ke-n suatu barisan geometri
- Jumlah n suku suatu deret geometri
- Deret geometri takhingga

→

Menggunakan barisan dan deret dalam menyelesaikan masalah

3.1 Mengidentifikasi Pola, Barisan, dan Deret Bilangan

3.1.1 Pola bilangan, barisan, dan deret

A. Pola bilangan

Sejak duduk di Sekolah Dasar, Anda telah mengenal dan menyebutkan bilangan 1, 2, 3, 4, 5, ... Urutan bilangan-bilangan itu kemudian dikenal dengan *bilangan asli*. Urutan-urutan bilangan lain yang Anda kenal misalnya, bilangan ganjil, bilangan genap, bilangan kelipatan, bilangan kuadrat, dan sebagainya. Sebenarnya, urutan-urutan bilangan tersebut memiliki aturan dan ketentuan-ketentuan tersendiri, sehingga dapat membuat suatu urutan bilangan yang bermakna atau dikenal sebagai *barisan bilangan*. Sedangkan cara menetapkan aturan atau ketentuan-ketentuan tertentu, sehingga dapat membentuk sebuah barisan bilangan dinamakan dengan *pola bilangan*.

Contoh soal 1:

1. 1, 3, 5, 7, ... adalah barisan bilangan yang terbentuk berdasarkan aturan atau pola "setiap bilangan berikut dari barisan itu diperoleh dengan menambahkan 2". Barisan bilangan tersebut dinamakan barisan bilangan asli ganjil.
2. 2, 4, 6, 8, ... adalah barisan bilangan yang terbentuk berdasarkan aturan atau pola "setiap bilangan berikut dari barisan itu diperoleh dengan mengalikan 2". Barisan bilangan tersebut dinamakan barisan bilangan genap.
3. 1, 2, 4, 7, 11, ... adalah barisan bilangan yang terbentuk berdasarkan aturan atau pola "setiap bilangan berikut dari barisan itu diperoleh dengan menambahkan bilangan asli berurutan 1, 2, 3, 4, ...".

Contoh soal 2:

Tentukan dua suku terakhir dari urutan bilangan berikut!

a. 1, 2, 3, 5, 7, ..., ...

b. 15, 14, 12, 9, ..., ...

Jawab:

Untuk mengetahui dua suku terakhir dari urutan bilangan tersebut, maka kita harus menentukan pola atau aturannya terlebih dahulu.

a. $1, \underbrace{\ }_{+1} 2, \underbrace{\ }_{+1} 3, \underbrace{\ }_{+2} 5, \underbrace{\ }_{+2} 7, \underbrace{\ }_{+3} \ldots, \underbrace{\ }_{+3} \ldots$

Jadi, Anda dapat menentukan dua suku terakhir dari urutan bilangan itu mengikuti pola "+3 ", sehingga diperoleh dua suku terakhirnya adalah 17 dan 21.

b. $15, \underbrace{\ }_{-1} 14, \underbrace{\ }_{-2} 12, \underbrace{\ }_{-3} 9, \underbrace{\ }_{-4} \ldots, \underbrace{\ }_{-5} \ldots$

Dari pola di atas, Anda dapat menentukan dua suku terakhir dari urutan bilangan tersebut, yaitu 5 dan 0.

B. Barisan

Barisan bilangan atau disebut *barisan* saja, seperti telah dikemukakan di atas adalah urutan bilangan yang memiliki aturan atau pola bilangan. Setiap bilangan dari suatu barisan disebut suku yang disimbolkan dengan *U*. Bentuk umum sebuah barisan dapat ditulis:

U_1 , U_2, U_3, U_4, ..., U_n $\qquad$ U_n = suku ke-*n*

Berdasarkan ciri dari pola bilangan yang terdapat pada barisan, maka barisan terbagi atas: *barisan aritmetika* dan *barisan geometri*.

Contoh soal 3:

Manakah dari contoh berikut yang merupakan barisan aritmetika atau barisan geometri?

a. 2, 4, 6, ... $\qquad$ b. 3, 6, 12, ...

Jawab:

a. 2, 4, 6, ... merupakan barisan aritmetika dengan 2 suku yang berurutan dan memiliki beda atau selisih yang sama (tetap), yakni setiap bilangan berikut dari barisan itu diperoleh dengan menambahkan 2. *b* = beda/selisih atau suku berikut dikurang suku sebelumnya dan dapat ditulis $b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = \ldots = U_n - U_{n-1}$ = tetap, $U_1 = a$ = suku pertama, U_2 = suku kedua, U_n = suku ke-*n*.

b. 3, 6, 12, ... merupakan barisan geometri, karena 2 suku yang berurutan memiliki rasio atau pembanding yang sama (tetap), yakni setiap bilangan berikut dari barisan itu diperoleh dengan mengalikan 2 atau suku berikut dibagi suku sebelumnya dan dapat ditulis

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \ldots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = \text{tetap}$$

Keterangan:

r = rasio/pembanding

U_1 = *a* = suku pertama

U_2 = suku kedua

U_n = suku ke-*n*

C. Deret

Perhatikan kembali barisan U_1, U_2, U_3, U_4, ..., U_n. Himpunan suku-suku itu sendiri disebut suatu *sekuens terhingga*, sedangkan n adalah panjangnya. Jika suku-suku sekuens itu dijumlahkan dalam bentuk $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n$ dinamakan *deret terhingga yang panjangnya n*. Jumlah suku-suku pada barisan hingga n suku pertama dinyatakan dengan S_n. Misalnya, jumlah 5 suku pertama ditulis $S_5 = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5$.

Ternyata, deret adalah menjumlahkan suatu barisan, sehingga deret juga terbagi atas deret aritmetika dan deret geometri.

Sebagai latihan, cobalah Anda tunjukkan manakah dari deret berikut yang merupakan deret aritmetika atau deret geometri.

a. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$

b. $2 + 6 + 18 + \ldots$

c. $8 + 6 + 4 + 2 + \ldots$

d. $2 - 4 + 8 - 16 + \ldots$

Silakan Anda mencoba!

3.1.2 Notasi sigma (Pengayaan)

Untuk menyingkat penulisan jumlah suku ke-n digunakan notasi sigma (Σ). Misalnya, suatu deret diketahui $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n$, maka dengan dinyatakan notasi sigma jumlah suku ke-n deret itu dapat ditulis dengan notasi sigma:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$$

dibaca: jumlah U_k untuk $k = 1$ sampai $k = n$

Huruf k dinamakan indeks dari suku U_k

Jika U_k dinyatakan dalam rumus suku ke-n misalnya, $U_k = 2k + 1$, maka jumlah suku ke-n deret itu ditulis dengan notasi sigma:

$\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$ dibaca: jumlah $(2k + 1)$ untuk $k = 1$ sampai $k = n$

Contoh soal 4:

Tulislah deret yang dinyatakan oleh notasi sigma berikut ini!

a. $\sum_{k=1}^{5} k$ b. $\sum_{k=1}^{3} (2k+1)$ c. $\sum_{k=1}^{3} 2$

Jawab:

a. $\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

b. $\sum_{k=1}^{3} (2k+1) = (2 \times 1 + 1) + (2 \times 2 + 1) + (2 \times 3 + 1)$

$= 3 + 5 + 7 = 15$

c. $\sum_{k=1}^{3} 2 = 2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$

Beberapa deret terhingga dan jumlahnya

1. $A_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + [(n - 1) + n]$, jika suku-suku pada deret ini ditulis $n = k$ dan A_n adalah jumlah deret n suku. Dalam bentuk notasi sigma dapat ditulis:

   $A_n = \sum_{k=1}^{n} \left[(k-1)+k\right]$ disebut *jumlah n suku dari deret bilangan asli pertama.*

2. $G_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$, jika suku-suku pada deret ini ditulis $n = k$ dan G_n adalah jumlah deret n suku. Dalam bentuk notasi sigma dapat ditulis:

   $G_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$ disebut *jumlah n suku dari deret bilangan asli ganjil pertama.*

3. $Q_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + [(n - 1)^2 + n^2]$, jika suku-suku pada deret ini ditulis $n = k$ dan Q_n adalah jumlah deret n suku. Dalam bentuk notasi sigma dapat ditulis:

   $Q_n = \sum_{k=1}^{n} \left[(k-1)^2 + k^2\right]$ disebut *jumlah n suku dari deret kuadrat bilangan asli pertama.*

Contoh soal 5:

Nyatakanlah dengan notasi sigma, dan tentukan:

a. jumlah lima suku pertama bilangan asli;

b. jumlah sepuluh suku pertama bilangan asli ganjil!

Jawab:

a. Deret lima suku pertama bilangan asli dengan notasi sigma dapat ditulis:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

b. Deret sepuluh suku pertama bilangan asli ganjil dengan notasi sigma dapat ditulis:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{10} (2k - 1)$$

$$= (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + ... + (2 \cdot 10 - 1)$$

$$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

$$= 100$$

Latihan 1

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Tentukan dua suku terakhir dari urutan bilangan berikut!
   a. 3, 4, 6, 9, 13, 18, ..., ...
   b. 2, 5, 7, 10, 8, 11, ..., ...
   c. 16, 14, 13, 11, 10, 8, ..., ...
2. Tentukan rumus suku ke-n barisan berikut ini, kemudian tentukan pula bilangan pada suku yang diminta!
   a. $-2, 3, 8, ..., U_5$
   c. $-10, -15, -20, U_8$
   b. $0{,}4; 1; \frac{8}{5}; ...; U_6$
   d. $\frac{3}{5}; 0{,}8; 1; ...; U_{100}$
3. Suatu barisan dengan suku pertama 8 dan suku berikutnya menambahkan 2 lebihnya dari suku sebelumnya.
   a. Tuliskan 5 suku barisan tersebut!
   b. Tuliskan suku yang kesepuluh!
   c. Hitunglah jumlah dari 4 suku pertama!
4. Tulislah deret yang dimaksud dengan notasi sigma berikut ini!
   a. $\sum_{k=1}^{5} k(2k-1)$
   c. $\sum_{k=0}^{3} 10y^{k-1}$
   b. $\sum_{k=0}^{6} (k-1)^2$
   d. $\sum_{k=1}^{4} \left(\frac{1}{2k}\right)^k$
5. Tulislah deret berikut ini dalam bentuk notasi sigma, kemudian tentukanlah jumlahnya!
   a. $-2 + 0 + 2 + ... + U_{10}$
   b. $1 + 3 + 9 + ... + U_8$
   c. $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + ... + U_5$
   d. $50 + 12{,}5 + 3{,}125 + ... + U_6$

Lembar Tugas 1

1. Tuliskan aturan atau pola dari barisan bilangan berikut?
   a. 1, 5, 9, 13, ...
   b. $-10, -5, 0, 5, ...$
   c. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$
   d. 1, 1, 2, 9, 45, ...
2. Carilah beda, kemudian tentukan rumus suku ke-n dari barisan berikut ini!
   a. 2, 10, 18, ...
   b. $-7, -4, -1, ...$
   c. $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, ...$
   d. $3, 3\frac{1}{4}, 3\frac{1}{2}, ...$
3. Tulislah dalam bentuk deret, kemudian hitunglah!
   a. $\sum_{k=0}^{3} k(k-1)^2$
   c. $\sum_{n=1}^{7} \frac{n}{(2n+1)}$
   b. $\sum_{k=0}^{4} (2k-1)^2$
   d. $\sum_{n=1}^{5} n(n-1)(n-2)$
4. Tulislah tiap deret berikut dengan menggunakan notasi sigma!
   a. n bilangan asli pertama
   c. n bilangan asli genap pertama
   b. n bilangan asli kelipatan empat pertama
   d. n bilangan asli ganjil kuadrat pertama

3.2 Menerapkan Konsep Barisan dan Deret Aritmetika

3.2.1 Barisan aritmetika

Barisan aritmetika memiliki ciri bahwa pada dua suku yang berurutan selalu memiliki beda atau selisih yang sama (tetap). Misalnya, barisan 1, 3, 5, 7, ... memiliki beda antara dua suku berurutan yang tetap 2. Jika $U_1 = a$, dan beda antara dua suku berurutan $= b$, maka suku ke-n dari barisan aritmetika dapat dirumuskan dengan:

$U_1 = a$

$U_2 = a + b$

$U_3 = (a + b) + b = a + 2b$

$U_4 = (a + 2b) + b = a + 3b$ dan seterusnya

sehingga, rumus suku ke-n barisan aritmetika adalah:

$$\boxed{U_n = a + (n - 1)b}$$

Keterangan:

U_n = suku ke-n

a = suku pertama

n = banyaknya suku

b = beda/selisih

Contoh soal 6:

Dari barisan berikut ini, tentukan rumus suku ke-n dan tentukan pula suku ke-5 dari barisan itu!

a. 2, 6, 10, ... b. $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, \ldots$

Jawab:

a. Diketahui: $a = 2$; $b = 6 - 2 = 4$

Ditanyakan: $U_n = ?$

Penyelesaian:

$U_n = a + (n - 1)\, b$

$U_n = 2 + (n - 1)\, 4$

$U_n = 2 + 4n - 4$

$U_n = 4n - 2$

Jadi, suku kelima = $U_5 = (4 \times 5) - 2 = 18$.

b. Diketahui: $a = -\frac{1}{4}$;

$b = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$

Ditanyakan: $U_n = ?$

Penyelesaian:

$U_n = a + (n - 1)\, b$

$U_n = -\frac{1}{4} + (n - 1)\, \frac{3}{4}$

$U_n = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}n - \frac{3}{4}$

$U_n = \frac{3}{4}n - 1$

Jadi, suku kelima = $U_5 = (\frac{3}{4} \times 5) - 1 = 2\frac{3}{4}$.

Jika $U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots$ adalah suku suatu barisan aritmetika, maka U_2 adalah suku tengah dari U_1 dan U_3. Demikian juga dengan U_3 adalah suku tengah dari U_2 dan U_4. Setiap suku tengah dari barisan aritmetika diperoleh dari hasil membagi dua jumlah suku di belakang dan di depannya.

Jadi, $U_2 = \dfrac{(U_1 + U_3)}{2}$, demikian pula

$$U_3 = \frac{(U_2 + U_4)}{2}$$

$$\boxed{U_t = \frac{(U_1 + U_{2t-1})}{2},} \quad U_t = \text{suku tengah}$$

Contoh soal 7:

Suatu barisan aritmetika diketahui $U_2 = 6$ dan $U_5 = 18$. Tentukan U_7 !

Jawab:

Diketahui:

$U_2 = 6$ maka $a + b = 6$

$U_5 = 18$ maka $a + 4b = 18$ −

$-3b = -12$

$b = 4$

$a + b = 6$

$a + 4 = 6$

$a = 2$

$U_7 = a + 6b$

$= 2 + 6 \cdot 4 = 2 + 24 = 26.$

Jadi, $U_7 = 26$.

Contoh soal 8:

Suku tengah barisan aritmetika sama dengan 41. Jika beda adalah 5 dan suku ke-7 adalah 36, tentukan suku terakhir!

Jawab:

Diketahui: $U_7 = 36$ maka
$$\begin{aligned} a + 6b &= 36 \\ a + 6 \cdot 5 &= 36 \\ a &= 36 - 30 \\ &= 6 = U_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{U_1 + U_n}{2} \\ &= \frac{6 + U_n}{2} \\ U_t \cdot 2 &= 6 + U_n \\ 41 \cdot 2 &= 6 + U_n \\ 82 - 6 &= U_n \\ 76 &= U_n \end{aligned}$$

Jadi, suku terakhir dari barisan aritmetika tersebut adalah 76.

3.2.2 Deret aritmetika

Deret aritmetika adalah penjumlahan suku-suku pada barisan aritmetika

$\sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$. Jumlah n suku pertama dari deret aritmetika dilambangkan dengan S_n. Misalkan n suku barisan aritmetika adalah $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$, di mana $U_1 = a$, $U_2 = a + b$, $U_3 = a + 2b$, dan $U_n = a + (n - 1)b$, maka diperoleh persamaan:

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + a + (n - 1)b \quad \ldots\ldots (1)$$

atau dapat juga ditulis bahwa:

$$S_n = \{a + (n - 1)b\} + \{a + (n - 2)b\} + \{a + (n - 3)b\} + \ldots + (a + 2b) + (a + b) + a \quad \ldots\ldots (2)$$

Jumlahkan persamaan (1) dan (2), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} S_n &= a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + a + (n - 1)b \\ S_n &= \{a + (n - 1)b\} + \{a + (n - 2)b\} + \{a + (n - 3)b\} + \ldots + a \quad + \\ \hline 2S_n &= \{2a + (n - 1)b\} + \{2a + (n - 1)b\} + \ldots + \{2a + (n - 1)b\} \\ 2S_n &= n\,\{2a + (n - 1)b\} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \tfrac{1}{2} n\,\{2a + (n - 1)b\}}$$

dinamakan rumus jumlah n suku deret aritmetika.

Oleh karena $a + (n - 1)b = U_n$, maka rumus jumlah n suku deret aritmetika dapat juga ditulis:

$$\boxed{S_n = \tfrac{1}{2} n\,(a + U_n)}$$

Contoh soal 9:

Diketahui deret $1 + 3 + 5 + \ldots$. Hitunglah jumlah 100 suku pertama deret itu!

Jawab:

Dari deret di atas diketahui $a = 1$ dan $b = 3 - 1 = 2$,

maka $S_{100} = \frac{1}{2} 100\,\{2(1) + (100 - 1)2\} = 10.000$.

Dapat juga dicari terlebih dahulu suku ke-100 atau U_{100} deret tersebut, yaitu:

$U_{100} = 1 + (100 - 1)2 = 199$, maka

$S_{100} = \frac{1}{2} 100\,(1 + 199) = 10.000$

Contoh soal 10:

Dari deret diketahui jumlah 5 suku pertamanya 25 dan jumlah 8 suku pertamanya 64, carilah suku pertama dan beda tiap suku berurutannya!

Jawab:

Diketahui:

$$\begin{aligned} S_5 = 25 \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \cdot 5\,\{2a + (5 - 1)b\} = 25 \\ &\quad\ 2{,}5\,(2a + 4b) = 25 \\ &\quad\ 5a + 10b = 25 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ S_8 = 64 \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \cdot 8\,\{2a + (8 - 1)b\} = 64 \\ &\quad\ 4\,(2a + 7b) = 64 \\ &\quad\ 8a + 28b = 64 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{aligned}$$

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh:

$$\begin{array}{l|l|l} 8a + 28b = 64 & \times 5 & \Leftrightarrow \ 40a + 140b = 320 \\ 5a + 10b = 25 & \times 8 & \Leftrightarrow \ 40a + 80b = 200 \quad - \\ \hline & & \qquad\qquad 60b = 120 \\ & & \qquad\qquad\ \ b = 2 \end{array}$$

Kemudian, substitusikan $b = 2$ ke persamaan (1), didapat:

$$\begin{aligned} 5a + 10b = 25 \ \Leftrightarrow \ 5a + 10(2) &= 25 \\ 5a + 20 &= 25 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian, suku pertama deret adalah 1 dan beda antarsuku berurutan adalah 2.

Perhatikan bahwa:

$S_n \quad = a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + a + (n - 1)b$, dan

$S_{n-1} = a + a + b + \ldots + a + (n - 2)b$

Maka $S_n - S_{n-1} = a + (n - 1)b = U_n$. Jadi, dapat dinyatakan bahwa:

$$\boxed{U_n = S_n - S_{n-1}}$$

Contoh soal 11:

Diketahui suatu deret 1 + 3 + 5 + ... Buktikan bahwa $S_9 = S_{10} - U_{10}$!

Jawab:

$S_9 = \frac{1}{2} \cdot 9 \{2(1) + (9 - 1)2\} = 4,5(2 + 16) = 4,5(18) = 81$

$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot 10 \{2(1) + (10 - 1)2\} = 5(2 + 18) = 5(20) = 100$

$U_{10} = 1 + (10 - 1)\ 2 = 19$

$S_9 = S_{10} - U_{10} \Leftrightarrow 81 = 100 - 19$ (terbukti)

Contoh soal 12:

Vega menabung di bank dengan selisih kenaikan tabungan antar bulan tetap. Pada bulan pertama Rp50.000,00, bulan kedua Rp60.000,00, bulan ketiga Rp 70.000,00 dan seterusnya. Berapa besar tabungan Vega selama 1 tahun?

Jawab:

$a = 50.000$, $b = 10.000$

n = 1 tahun = 12 bulan.

$U_n \quad = a + (n - 1)b$

$\quad = a + 11b$

$\quad = 50.000 + 11 \cdot 10.000$

$\quad = 50.000 + 110.000$

$\quad = 160.000$

$S_n \quad = \frac{1}{2} n\ (a + U_n)$

$S_{12} = \frac{1}{2} \cdot 12\ (50.000 + 160.000)$

$\quad = 6 \cdot 210.000$

$\quad = 1.260.000$

Jadi, tabungan Vega selama 1 tahun adalah Rp1.260.000,00.

Contoh soal 13:

Tiga bilangan merupakan deret aritmetika, jika jumlah ketiga bilangan tersebut 15 dan hasil baginya 80. Tentukan bilangan terkecil!

Jawab:

Misal ketiga bilangan tersebut adalah $a - b$, a, $a + b$.

$a - b + a + a + b \quad = 15$

$3a = 15$ maka $a = 5$

Ketiga bilangan itu adalah: $5 - b$, 5, $5 + b$.

$5(5 - b)(5 + b) = 80$

$(25 - b^2) = \frac{80}{5}$

$(25 - b^2) = 16$

$25 - 16 = b^2$

$b^2 = 9$

$b = \sqrt{9} = \pm 3$

Untuk $b = 3$ maka $5 - 3, 5, 5 + 3 = 2, 5, 8$

Untuk $b = -3$ maka $5 - (-3), 5, 5 + (-3)$

$= 5 + 3, 5, 5 - 3 = 8, 5, 2$

Jadi, bilangan terkecil adalah 2.

Latihan 2

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Diketahui suatu barisan sebagai berikut 1, 4, 7, ... Carilah nilai suku ke-10!
2. Dengan terlebih dahulu menentukan persamaan bagi masing-masing rumus suku ke-n nya, carilah suku pertama (a) dan beda (b) dari suku-suku barisan aritmetika tersebut!
   a. Jika diketahui $U_2 = 5$ dan $U_6 = 17$.
   b. Jika diketahui $U_3 = 3\frac{1}{2}$ dan $U_7 = 9\frac{1}{2}$.
3. Suatu barisan diketahui suku ketiganya 6 dan suku kelima 22. Tentukanlah:
   a. suku keempat barisan itu;
   b. rumus suku ke-n barisan itu, kemudian tentukan suku kesepuluh barisan itu!
4. Dengan menggunakan rumus $S_n = \frac{1}{2} n\ \{2a + (n - 1)b\}$, hitunglah jumlah n suku pertama setiap deret aritmetika berikut!
   a. 10 suku pertama, jika diketahui $a = 1$, $b = 2$.
   b. 50 suku pertama, jika diketahui $a = 100$, $b = -5$.
   c. 100 suku pertama, jika diketahui $a = -100$, $b = 10$.

5. Carilah suku pertama (a) dan beda (b) dari deret aritmetika, jika diketahui:
   a. jumlah 4 suku pertamanya = 17, jumlah 8 suku pertamanya = 58.
   b. jumlah 5 suku pertamanya = 35, jumlah 10 suku pertamanya = 120.
   c. jumlah 3 suku pertamanya = 300, jumlah 4 suku pertamanya = 500.
6. Diketahui deret 2 + 5 + 8 + … . Carilah nilai S_5!
7. Diketahui deret 40 + 38 + 36 + … . Carilah nilai S_7!
8. Tentukan barisan aritmetika yang membentuk deret dengan rumus $S_n = 2n^2 - n$!
9. Ibu membeli seutas pita yang akan dibagikan kepada 5 anak dengan panjang membentuk deret aritmetika. Jika pita terpendek 50 cm dan pita terpanjang 150 cm, tentukan pnjang pita yang dibeli Ibu tersebut!
10. Ibu Dina setuju untuk membayar utangnya sebesar Rp580.000,00 kepada Ibu Rita dengan cara angsuran, di mana jumlah pembayaran setiap bulan akan lebih besar Rp2.000,00 dari pembayaran bulan sebelumnya. Jika pembayaran pertama sebesar Rp10.000,00, berapa lama utang Ibu Dina akan lunas?

Lembar Tugas 2

1. Tentukan barisan aritmetika, jika diketahui:
   a. jumlah suku ke-1 dan suku ke-3 adalah 10 serta suku keduanya kurang dari dua kali suku ketiga.
   b. suku ke-8 adalah 15 dan jumlah suku ke-2 dan ke-16 sama dengan 26!
2. Jumlah deret aritmetika 3 + 6 + 9 + 12 + … sama dengan 165.
   a. Hitunglah banyaknya suku deret aritmetika tersebut!
   b. Carilah suku terakhir dari deret aritmetika tersebut!
3. Hitunglah jumlah semua bilangan bulat antara 10 dan 50 yang habis dibagi 3!
4. Diketahui barisan aritmetika 2, 5, 8, …, 44. Banyaknya suku pada barisan itu adalah ganjil.
   a. Carilah suku tengahnya!
   b. Suku ke berapakah suku tengahnya?
   c. Berapakah banyaknya suku barisan itu?
5. Pada sebuah kursus yang baru dibuka, murid baru yang mendaftar setiap bulan betmbah den bertambah dengan jumlah yang sama. Jika murid baru yang mendaftar pada bulan ke-2 dan murid baru yang mendaftar pada bulan ke-3 berjumlah 25 orang, sedangkan yang mendaftar pada bulan ke-6 dan bulan ke-7 adalah 60 orang, maka berapakah jumlah semua murid kursus tersebut dalam 1 tahun pertama?

3.3 Menerapkan Konsep Barisan dan Deret Geometri

3.3.1 Barisan geometri

Barisan geometri memiliki ciri bahwa pada dua suku yang berurutan selalu memiliki rasio atau perbandingan yang sama (tetap). Misalnya, barisan 2, 4, 8, 16, … memiliki rasio antara dua suku berurutan yang tetap, yaitu 2. Jika $U_1 = a$ dan rasio antara dua suku berurutan = r, maka suku ke-n dari barisan geometri dapat dirumuskan dengan:

$U_2 = a\,r$

$U_3 = a\,r\,r = a\,r^2$

$U_4 = a\,r^2\,r = a\,r^3$, dan seterusnya.

Sehingga, rumus suku ke-n barisan geometri dapat dituliskan menjadi:

$$\boxed{U_n = a\,r^{n-1}}$$

Keterangan:

U_n = suku ke-n

a = suku pertama

n = banyaknya suku

r = rasio

Contoh soal 14:

Tentukan suku ke-5 dari barisan 8, 4, 2, 1, …

Jawab:

Diketahui: $a = 8$, $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$$U_5 = ar^{5-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

Contoh soal 15:

Tentukan suku ke-3 dan ke-5 barisan geometri, jika diketahui suku pertama adalah $\frac{1}{4}$ dan suku keduanya adalah $\frac{1}{2}$!

Jawab:

$a = U_1 = \frac{1}{4}$; $U_2 = \frac{1}{2}$; $r = \frac{U_2}{U_1} = 2$

Suku ketiga = $U_3 = ar^{3-1} = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$

Suku kelima = $U_5 = ar^{5-1} = \frac{1}{4} \cdot 2^4 = 4$

Jika U_1, U_2, U_3, U_4, ... adalah suku barisan geometri, maka U_2 adalah suku tengah dari U_1 dan U_3. Demikian juga dengan U_3 adalah suku tengah dari U_2 dan U_4. Setiap suku tengah dari barisan geometri itu diperoleh dari hasil kuadrat perkalian suku di belakang dan di depannya.

Jadi, $U_2 = \sqrt{U_1 \cdot U_3}$, $U_4 = \sqrt{U_3 \cdot U_5}$, dan seterusnya sehingga $U_t = \sqrt{U_1 \cdot U_{2t-1}}$.

Contoh soal 16:

Suku tengah barisan geometri diketahui sama dengan 4. Jika rasio sama dengan $\frac{1}{2}$ dan suku ke-5 juga sama dengan $\frac{1}{2}$, tentukan suku terakhir!

Jawab:

$$U_5 = ar^4 = \frac{1}{2}$$

$$a\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{16}a = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2} : \frac{1}{16} = 8 = U_1$$

$$U_t = \sqrt{U_1 \cdot U_n}$$

$$4 = \sqrt{8 \cdot U_n}$$

$$16 = 8 \cdot U_n$$

$$U_n = \frac{16}{8} = 2$$

Jadi, suku terakhir sama dengan 2.

3.3.2 Deret geometri

Deret geometri adalah penjumlahan suku-suku dari barisan geometri. Misalkan, diketahui deret geometri $U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ atau $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$, maka jumlah suku ke-$n$ dari deret tersebut dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} \\ r\,S_n &= ar + ar^2 + ... + ar^n \quad - \\ \hline S_n - r\,S_n &= a(1 - r^n) \\ (1 - r)S_n &= a(1 - r^n) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}}$$

Rumus tersebut hanya berlaku untuk $-1 < r < 1$.

Untuk harga $r < -1$ atau $r > 1$, rumus yang digunakan ialah:

$$\boxed{S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}}$$

Coba Anda buktikan rumus tersebut seperti contoh pembuktian rumus di atas!

Contoh soal 17:

1. Diketahui deret geometri $2 + 6 + 18 + ...$, hitunglah jumlah 5 suku pertama deret itu!
2. Diketahui deret geometri $100 + 25 + 6\frac{1}{4} + ...$, hitunglah jumlah 5 suku pertama deret itu!

Jawab:

1. Dari deret geometri $2 + 6 + 18 + ...$, diperoleh $a = 2$; $r = \frac{6}{2} = 3 > 1$. Jadi $r > 1$, maka rumus yang digunakan:

   $$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

   $$S_5 = \frac{2(3^5 - 1)}{3 - 1} = 242$$

2. Dari deret geometri $100 + 25 + 6\frac{1}{4} + ...$, diperoleh $a = 100$; $r = \frac{1}{4}$. Karena $r < 1$, maka rumus yang digunakan:

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

$$S_5 = \frac{100\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{4}} = 133{,}2$$

Contoh soal 18:

Suku ke-2 dan suku ke-4 suatu barisan geometri berturut-turut adalah 6 dan 54. Jika rasio barisan geometri ditetapkan positif, carilah:

a. suku pertama dan rasio;

b. suku ke-5!

Jawab:

a. $U_2 = ar = 6$

$U_4 = ar^3 = 54$

$$\frac{U_4}{U_2} = \frac{ar^3}{ar} = \frac{54}{6}$$

$r^2 = 9$

$r = \sqrt{9} = \pm 3$

Karena ditetapkan rasio positif, maka diambil r = 3.

$ar = 6$

$a \cdot 3 = 6$

$a = \frac{6}{3} = 2$

Jadi, suku pertama sama dengan 2 dan rasio sama dengan 3.

b. $U_5 = ar^{n-1}$

$= 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$

Contoh soal 19:

Rentia membeli bahan untuk membuat 5 buah baju. Jika baju paling kecil membutuhkan 1 m dan baju yang paling besar membutuhkan 16 m, tentukan bahan yang dibutuhkan Rentia untuk membuat 5 buah baju tersebut!

Jawab:

$a = 1$ dan $U_5 = 16$

$U_n = ar^{n-1}$

$U_5 = ar^4 = 16$

$1 \cdot r^4 = 16$

$r^4 = 16 = 2^4$

$r = 2$

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1}$$

$$S_5 = \frac{1\left(2^5-1\right)}{2-1} = \frac{32-1}{1} = 31$$

Jadi, bahan yang harus dibeli oleh Rentia adalah 32 m.

3.3.3 Deret geometri takhingga

Misalkan $a + ar + ar^2 + \ldots$ merupakan deret geometri takhingga, maka jumlah n suku deret takhingga dapat dirumuskan sebagai berikut.

a. Untuk $-1 < r < 1$

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{1-r}$$

$$\boxed{S_\infty = \frac{a}{1-r}}$$

b. Untuk $r < -1$ atau $r > 1$

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$$

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{r-1} - \lim_{n\to\infty} \frac{a}{r-1}$$

$$S_\infty = \infty - \frac{a}{r-1}$$

$S_\infty = \infty$ (takhingga)

Contoh soal 20:

1. Hitunglah jumlah takhingga dari $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1.000} + \ldots$!

2. Tentukan n, jika $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n = 363$!

Jawab:

1. $a = \frac{9}{10}$ dan $r = \frac{1}{10} < 1$

Maka: $S_\infty = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$

2. $a = 3$ dan $r = 3$ ($r > 1$)

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1}$$

$$363 = \frac{3\left(3^n - 1\right)}{3-1}$$

$$363 = \frac{3\left(3^n - 1\right)}{2}$$

$$363 \times \tfrac{2}{3} = 3^n - 1$$

$$3^n = 242 + 1$$

$$3^n = 243$$

$$3^n = 3^5$$

$$n = 5$$

Latihan 3

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Carilah rasio antara dua suku berurutan dari barisan berikut ini!
   a. $-5, 10, -20, \ldots$
   b. $4, 1, \frac{1}{4}, \ldots$
   c. $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \ldots$
   d. $-0{,}125; 0{,}625; -3{,}25; \ldots$
2. Tulislah 5 suku pertama dari barisan geometri, jika diketahui:
   a. $U_1 = \frac{1}{3}, r = -2;$
   b. $U_2 = -1, r = 2;$
   c. $U_2 = \sqrt{3}, U_3 = \sqrt{6};$
   d. $U_3 = \frac{1}{8}, U_4 = \frac{1}{2}$!
3. Tentukan suku ke-5 dari barisan geometri yang suku ke-2 sama dengan 4 dan suku ke-4 sama dengan 1!
4. Carilah rasio barisan berikut ini, kemudian tulislah suku yang diminta!
   a. $-\frac{2}{3}, 2, -6, \ldots, U_6$
   b. $0{,}25; \frac{3}{4}; 2{,}25; \ldots, U_8$
   c. $2, \sqrt{2}, 1, \ldots, U_5$
   d. $x, \sqrt{x}, x^{-1}, \ldots, U_n$
5. Suku kedua dan kelima suatu barisan geometri diketahui $1\frac{1}{2}$ dan 12. Dengan terlebih dahulu menentukan rumus suku ke-n, carilah:
   a. suku pertama barisan itu;
   b. suku ketiga dan keempat!
6. Hitunglah jumlah n suku dari deret berikut!
   a. $1 + 2 + 4 + \ldots + S_{10}$
   b. $-\frac{1}{2} + 1 - 2 + \ldots + S_5$
   c. $16 + 8 + 4 + \ldots + S_5$
   d. $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \ldots + S_5$
7. Hitunglah jumlah n suku yang diminta, jika diketahui sebagai berikut!
   a. $a = U_1 = 3$, dan $r = \frac{1}{4}$, $S_5 = \ldots$
   b. $a = \frac{1}{4}$, dan $r = -2$, $S_6 = \ldots$
   c. $U_3 = -\frac{1}{2}$, dan $U_5 = -\frac{1}{8}$, $S_5 = \ldots$
   d. $U_1 = -\frac{1}{2}$, dan $U_5 = -8$, $S_5 = \ldots$
8. Diketahui suku kedua dan keempat deret geometri masing-masing 3 dan 27. Tentukan:
   a. suku pertama dan rasio;
   b. jumlah 5 suku pertama!
9. Rasio sebuah deret geometri adalah $-\frac{2}{5}$ dan jumlah takhingganya adalah 15. Hitunglah suku pertamanya!
10. Fenti menabung di bank sebesar Rp1.000.000,00 dengan suku bunga majemuk 5% per tahun. Hitunglah tabungan Fenti pada akhir tahun ketiga!

Lembar Tugas 3

1. Jika x, y, dan z tiga suku pertama dari barisan geometri, tentukan:
   a. y, jika $x = \frac{1}{4}$, dan $z = 4$;
   b. y, jika $x = -5$, dan $z = -\frac{1}{5}$;
   c. y, jika $x = -2$, dan $z = -18$;
   d. y, jika $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dan $z = \sqrt{8}$!

2. Suku ke-n sebuah deret geometri adalah $\frac{1}{5^n}$.
   Carilah:
   a. suku pertama;
   b. jumlah takhingga!

3. Sebuah bola tenis dijatuhkan ke lantai dari tempat yang tingginya 1 m. Setiap kali setelah bola itu memantul, ia mencapai ketinggian $\frac{2}{3}$ dari tinggi sebelumnya. Tentukan panjang lintasan bola itu sampai berhenti!

Rangkuman

1. Pola bilangan adalah cara menetapkan aturan atau ketentuan-ketentuan tertentu, sehingga dapat membentuk sebuah barisan bilangan.
2. *Barisan bilangan* atau disebut *barisan* saja adalah urutan bilangan yang memiliki aturan atau pola bilangan. Setiap bilangan dari suatu barisan disebut suku yang disimbolkan dengan U. Bentuk umum sebuah barisan dapat ditulis:

   $U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots, U_n$

   dengan U_n = suku ke-n

   Berdasarkan ciri dari pola bilangan yang terdapat pada barisan, maka barisan terbagi atas: *barisan aritmetika* dan *barisan geometri*.
3. Barisan aritmetika

   Barisan aritmetika memiliki ciri bahwa pada dua suku yang berurutan selalu memiliki beda atau selisih yang sama (tetap).

   Misalnya, barisan 1, 3, 5, 7, ... memiliki beda antara dua suku berurutan yang tetap 2.

   Jika $U_1 = a$, dan beda antara dua suku berurutan $= b$, maka suku ke-n dari barisan aritmetika dapat dirumuskan dengan:

   $$U_n = a + (n - 1)\, b$$
4. *Deret aritmetika* adalah penjumlahan suku-suku pada barisan aritmetika.
5. Barisan geometri memiliki ciri bahwa pada dua suku yang berurutan selalu memiliki rasio atau perbandingan yang sama (tetap). Misalnya, barisan 2, 4, 8, 16, ... memiliki rasio antara dua suku berurutan yang tetap, yaitu 2.

   Jika $U_1 = a$ dan rasio $= r$ maka suku ke-n barisan geometri dapat dirumuskan dengan:

   $$U_n = ar^{n-1}$$
6. *Deret geometri* adalah penjumlahan suku-suku dari barisan geometri.

   $$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r} \text{ untuk } -1 < r < 1$$

   $$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1} \text{ untuk } r < -1 \text{ atau } r > 1$$

Evaluasi

A. Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Tiga suku berikutnya dari barisan 5, 6, 9, 14, ... adalah... .
   a. 21, 26, 31
   b. 15, 18, 23
   c. 19, 22, 23
   d. 17, 22, 29
   e. 21, 30, 41

2. Barisan 2, 5, 10, 17, ... mempunyai rumus suku ke-n ... .
   a. $U_n = 3n + \frac{1}{2}$
   b. $U_n = 1 + n^2$
   c. $U_n = n^2 + 1$
   d. $U_n = 5 - 3n$
   e. $U_n = 3 - n$

3. Suku tengah dari deret 3 + 8 + 13 + ... + 103 adalah ... .
   a. 53
   b. 52
   c. 10
   d. 11
   e. 20

4. Diketahui deret aritmetika dengan suku ketiga yakni −1 dan suku kelima yakni 3. Jumlah sepuluh suku yang pertama adalah ... .
   a. 15
   b. 30
   c. 35
   d. 65
   e. 40

5. Suku ketiga dari deret geometri adalah 2, sedangkan suku ketujuhnya adalah $\frac{1}{8}$. Suku pertamanya adalah ...
   a. −8
   b. 8
   c. 4
   d. −4
   e. 2

6. Suku kesepuluh deret 5 + 15 + 45 + ... adalah ... .
   a. 1.350
   b. 6.250
   c. 108.415
   d. 147.620
   e. 220.467

7. Jumlah dari $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots = \ldots$
   a. $\frac{1}{3}$
   b. $\frac{2}{3}$
   c. 1
   d. $\frac{5}{6}$
   e. $\frac{4}{3}$

8. Sebuah sel membelah menjadi 5 buah sel setiap 10 detik. Dalam waktu satu menit sebuah sel tersebut akan menjadi ... .
   a. 3.906
   b. 6.250
   c. 1.562
   d. 15.625
   e. 19.501

9. Suku pertama dan suku kedua suatu deret geometri berturut-turut a^{-4} dan a^x. Jika suku kedelapan adalah a^{52} maka $x = \ldots$.
   a. 32
   b. 16
   c. 12
   d. 8
   e. 4

10. $\sum_{k=1}^{4}(2k+1)^2$ mempunyai nilai sama dengan ... .
    a. $2\sum_{k=1}^{n} k^2 + n$
    b. $\sum_{k=1}^{n}\left(4k^2 + 4k + 1\right)$

c. $4\sum_{k=1}^{4} k^2 + 4\sum_{k=1}^{4} (k+1)$

d. $4\sum_{k=1}^{4} k^2 + n$

e. $2\sum_{k=1}^{4} k^2 + 1$

B. Kerjakanlah soal-soal berikut ini!

1. Diketahui deret geometri $18 + 12 + 8 + \ldots + \frac{512}{729}$. Suku keberapakah $\frac{512}{729}$ itu?
2. Carilah suku ke-n dari $\sqrt{3}$, 3, $3\sqrt{3}$, 9, ... !
3. Dalam sebuah deret geometri diketahui $S_n = 150$, $S_{n+1} = 160$, dan $S_{n+2} = 180$. Tentukan r!
4. Suku keenam barisan aritmetika adalah 22 dan suku kesepuluh adalah 34. Tentukan:
   a. suku pertama dan bedanya;
   b. jumlah 10 suku pertama deret tersebut!
5. Jumlah semua suku deret geometri takhingga adalah 6, sedangkan jumlah suku-suku bernomor genap adalah 2. Hitunglah suku pertama dari deret tersebut!
6. Diketahui:

   $U_1 = 3,\ U_2 = 5,\ U_3 = 7,\ U_4 = 9,\ U_5 = 11$

   $V_1 = 2,\ V_2 = 4,\ V_3 = 6,\ V_4 = 8,\ V_5 = 10$

   Hitunglah:

   a. $\sum_{m=1}^{5} U_m$;

   b. $\sum_{n=1}^{5} V_n$;

   c. $\sum_{i=3}^{5} (U_i + V_i)$;

   d. $\sum_{j=2}^{5} U_j \cdot \sum_{i=3}^{5} V_i$!

Bab 4

Geometri Dimensi Dua

Kelas XI

Sumber: www.mberproject.com

Benda-benda di sekitar kita, seperti meja, kursi, papan tulis, dan sebagainya merupakan contoh benda-benda berdimensi dua. Masih banyak lagi contoh benda-benda berdimensi dua lainnya yang dapat Anda jumpai dalam kehidupan sehari-hari. Dapatkah Anda menyebutkan contoh benda-benda berdimensi dua di sekitar Anda?

Untuk lebih memahami materi dalam bab ini dan dapat mengaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, maka marilah kita pelajari materi ini dengan saksama!

Peta Konsep

Menerapkan kedudukan, jarak, dan besar sudut yang melibatkan titik, garis, dan bidang dalam ruang dimensi dua

→

- Penjelasan macam-macam satuan sudut
- Pengonversian satuan sudut
- Perhitungan keliling segitiga, segi empat, dan lingkaran
- Perhitungan luas segitiga, segi empat, dan lingkaran
- Perhitungan luas bangun datar tidak beraturan dengan menggunakan metode koordinat trapesium
- Penyelesaian masalah kejuruan
- Refleksi (pencerminan)
- Translasi (pergeseran)
- Rotasi (perputaran)
- Dilatasi

→

Menyelesaikan masalah dimensi dua

4.1 Mengidentifikasi Sudut

4.1.1 Unsur-unsur dalam bangun datar

A. Titik

Titik adalah bangun yang tidak mempunyai dimensi. Titik diwujudkan dengan noktah (.) atau dengan silang(x).

B. Garis lurus

Garis lurus adalah bangun yang berdimensi satu, artinya suatu bangun yang mempunyai panjang saja. Bagian-bagian garis lurus ialah sebagai berikut.

1. Garis

Garis tidak memiliki batas, baik ke kiri maupun ke kanan. Panjang garis tak berhingga, karena itu yang dapat digambar hanya wakilnya saja. Perhatikan gambar 4.1.

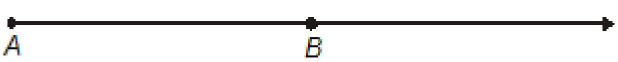
Gambar 4.1

2. Sinar

Jika pada sebuah garis diletakkan sembarang titik, misalnya *A*, maka garis itu terbagi menjadi dua bagian, masing-masing disebut *sinar*. Perhatikan gambar 4.2!

Gambar 4.2

Pada gambar 4.2 titik *A* disebut *pangkal*. Jadi, sinar mempunyai pangkal, tetapi tidak mempunyai ujung, sehingga panjang sinar juga tak berhingga.



Gambar 4.3

Pada gambar 4.3, *AB* dinamakan sinar garis *AB* atau $\overrightarrow{AB}$.

3. Ruas garis

Jika pada suatu garis diletakkan dua titik, yaitu *A* dan *B* maka garis itu terbagi menjadi tiga bagian. Tiga bagian tersebut ialah sinar yang berpangkal di *A*, sinar yang berpangkal di *B*, dan ruas garis *AB*. Perhatikan gambar 4.4!

Gambar 4.4

Ruas garis AB adalah bagian garis yang mempunyai batas *A* dan *B* yang masing-masing disebut pangkal dan ujung atau ujung-ujung ruas garis *AB*. Karena dibatasi maka suatu ruas garis panjangnya tertentu.

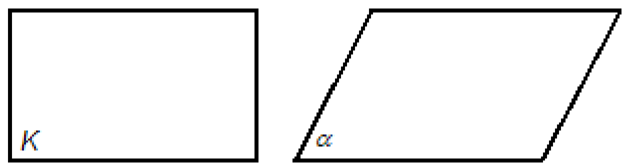
Gambar 4.5

Pada gambar 4.5, *ruas garis AB* disebut ruas garis *AB* atau $\overline{AB}$.

C. Bidang datar

Bidang datar adalah suatu bangun yang mempunyai dua dimensi. Artinya suatu bangun yang mempunyai panjang dan lebar atau merupakan daerah yang mempunyai luas.

Bidang datar (disebut bidang) tidak terbatas luasnya, karena itu yang dapat digambar adalah wakilnya saja. Wakil untuk bidang biasanya dipilih gambar persegi panjang atau jajargenjang.



Bidang *K* Bidang α

Gambar 4.6

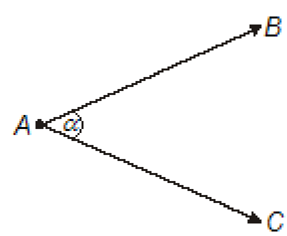
Nama bidang biasanya menggunakan huruf kapital latin, yaitu *K*, *L*, *M*, *N*, ... yang dituliskan pada salah satu pojoknya.

4.1.2 Pengukuran Sudut

A. Pengertian sudut

Sudut adalah bagian bidang yang dibatasi oleh dua sinar garis yang berpotongan di satu titik.

Perhatikan gambar 4.7! Dua garis *AB* dan *AC* berpotongan di titik *A*, maka bagian bidang yang dibatasi oleh sinar garis *AB* dan *AC*, yaitu α disebut sudut.



Gambar 4.7

B. Jenis-jenis sudut

Berdasarkan besarnya, sudut-sudut dikelompokkan sebagai berikut.

1. Sudut lancip, besarnya antara $0°$ dan $90°$.
2. Sudut siku-siku, besarnya tepat sama dengan $90°$.
3. Sudut tumpul, besarnya antara $90°$ dan $180°$.
4. Sudut lurus, besarnya sama dengan $180°$.

C. Satuan derajat

Satu derajat ditulis "$1°$", adalah ukuran sudut yang besarnya sama dengan $\frac{1}{360}$ bagian sudut pusat lingkaran.

Jadi: $1° = \frac{1}{360}$ putaran

$1° = 60$ menit $(1° = 60')$

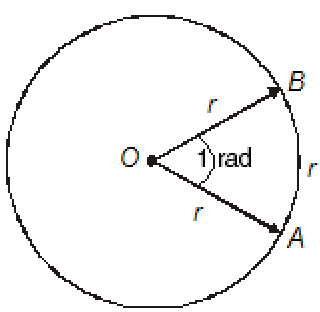
$1' = 60$ detik $(1' = 60'')$

sehingga, $1° = 60' = 3.600''$

Sistem ukuran derajat dikenal sebagai sistem *sexadesimal*.

D. Satuan radian

Satu radian (1 *rad*) adalah besar sudut pusat lingkaran yang menghadap busur lingkaran di hadapannya, sepanjang jari-jarinya. Perhatikan gambar 4.8!



Gambar 4.8

Satu radian terbentuk jika sudut yang dibatasi oleh $OA = OB = \frown AB = r$.

$$1 \text{ putaran} = 360°$$

$$2\pi \text{ radian} = 360°$$

$$1 \text{ radian} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{360°}{2(3,14)} = 57,3°$$

E. Hubungan antara derajat dan radian

Hubungan antara derajat dan radian ialah sebagai berikut.

$$360° = 2\pi \text{ radian}$$

$$180° = \pi \text{ radian}$$

$$90° = \frac{1}{2}\pi \text{ radian, dan seterusnya.}$$

Contoh soal 1:

a. Nyatakan $\frac{4}{5}\pi$ radian dalam ukuran derajat!

b. Nyatakan $25°$ dalam ukuran radian!

Jawab:

a. $\frac{4}{5}\pi \text{ radian} = \frac{4}{5} \times 180° = 144°$

b. $25° = 25° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{5}{36}\pi$ radian

$= \frac{5}{36}(3,14)$ radian

$= 0,436$ radian

Contoh soal 2:

a. Nyatakan $135°$ dalam ukuran radian!

b. Nyatakan $\frac{2}{3}\pi$ radian dalam ukuran derajat!

Jawab:

a. $135° = 135° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{3}{4}\pi$ radian

$= \frac{3}{4}(3,14)$ radian

$= 2,355$ radian

b. $\frac{2}{3}\pi \text{ radian} = \frac{2}{3} \times 180° = 120°$

Latihan 1

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Sebutkan unsur-unsur yang ada di dalam bangun datar dan apa arti dari masing-masing unsur tersebut!
2. Apa yang dimaksud dengan sudut dalam derajat?
3. Apa yang dimaksud dengan 1 radian?
4. Nyatakan sudut-sudut di bawah ini dalam satuan radian!

   a. $35°$ c. $125°$

   b. $72°$ d. $225°$
5. Nyatakan sudut-sudut di bawah ini dalam satuan derajat!

   a. $\frac{2}{5}\pi$ c. $\frac{12}{15}\pi$

   b. $\frac{6}{9}\pi$ d. $\frac{6}{30}\pi$

Lembar Tugas 1

1. Tentukan besar sudut berikut dalam satuan derajat!

   a. $\frac{1}{3}\pi$ radian　　c. $\frac{7}{8}\pi$ radian

   b. $\frac{4}{5}\pi$ radian

2. Tentukan besar sudut berikut ini dalam satuan radian!

   a. $45°$　　b. $135°$　　c. $270°$

4.2 Menentukan Keliling Bangun Datar dan Luas Daerah Bangun Datar

4.2.1 Jenis-jenis bangun dimensi dua

A. Segitiga

1. Pengertian segitiga

Pengertian segitiga ialah sebagai berikut.

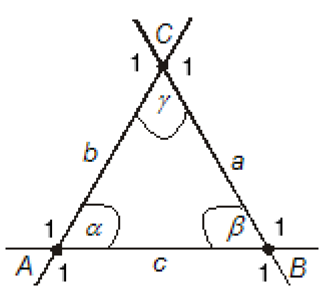
a. *Segitiga* adalah suatu bentuk bidang yang terjadi jika tiga titik yang tidak segaris dihubungkan satu sama lainnya.

b. Garis-garis penghubung itu disebut *sisi-sisi segitiga*.

c. Titik potong dua sisi disebut *titik sudut*.

d. Jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah $180°$.

Perhatikan gambar 4.9!



Gambar 4.9

A, B,dan C disebut titik-titik sudut segitiga ABC.

a, b, dan c disebut sisi-sisi segitiga ABC.

c. α , β , γ disebut sudut-sudut dalam segitiga.

d. Sudut A, sudut B, dan sudut C adalah sudut-sudut luar segitiga ABC.

e. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

f. $\angle A_1 = \beta + \gamma$, $\angle B_1 = \alpha + \gamma$, $\angle C_1 = \alpha + \beta$

g. Keliling $\Delta ABC = a + b + c$

h. Luas $\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ dengan $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

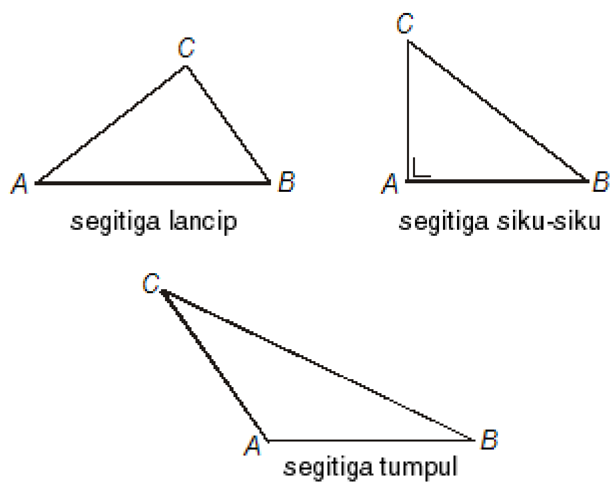
2. Jenis-jenis segitiga menurut sudutnya

Menurut sudutnya, segitiga dibedakan menjadi:

a. *segitiga lancip* yaitu segitiga yang ketiga sudutnya lancip;

b. *segitiga siku-siku* yaitu segitiga yang besar salah satu sudutnya $90°$;

c. *segitiga tumpul* yaitu segitiga yang salah satu sudutnya tumpul.



Gambar 4.10

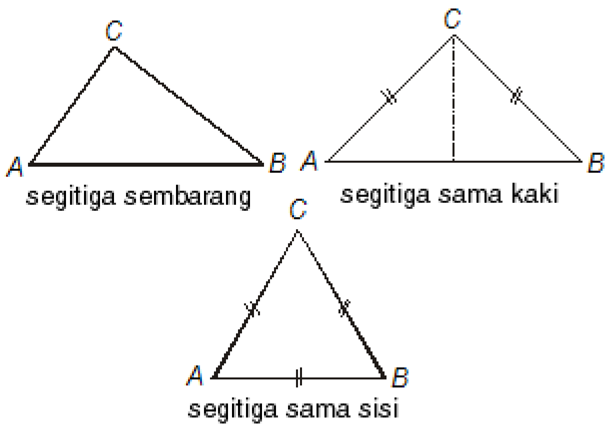
3. Jenis-jenis segitiga menurut sisinya

Menurut sisinya, segitiga dibedakan menjadi:

a. *segitiga sembarang* yaitu segitiga yang ketiga sisinya tidak sama panjang;

b. *segitiga sama kaki* yaitu segitiga yang kedua sisinya sama panjang;

c. *segitiga sama sisi* yaitu segitiga yang ketiga sisinya sama panjang.



Gambar 4.11

Perhatikan $\triangle ABC$ sama kaki pada gambar 4.11! Terlihat bahwa:

a. $\angle A = \angle B$ dan $AC = BC$;

b. mempunyai satu sumbu simetri dan satu simetri putar.

Perhatikan $\triangle ABC$ sama sisi pada gambar 4.11! Terlihat bahwa:

a. $\angle A = \angle B = \angle C$ dan $AC = BC = AC$;

b. mempunyai tiga buah sumbu simetri dan tiga simetri putar.

Perhatikan $\triangle ABC$ siku-siku pada gambar 4.10! Terlihat bahwa:

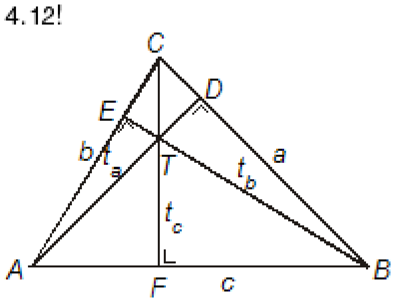
a. $\angle A = 90°$ dan BC disebut sisi miring;

b. berlaku dalil Pythagoras, yaitu: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

4. Garis-garis istimewa pada segitiga

(i) Garis tinggi

Garis tinggi adalah garis yang ditarik dari titik-titik sudut segitiga, tegak lurus pada sisi di hadapan titik sudutnya. Perhatikan gambar 4.12!



Gambar 4.12

Terlihat bahwa $AD \perp BC$, sehingga AD merupakan garis tinggi dari titik sudut A, ditulis dengan t_a.

$$t_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

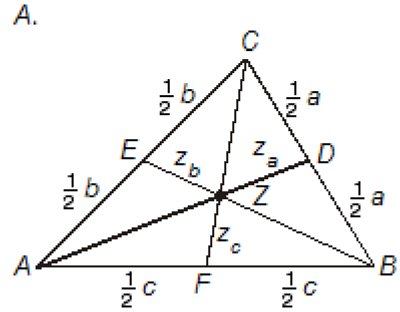
$$t_b = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$t_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

T disebut titik tinggi $\triangle ABC$.

(ii) Garis berat

Garis berat adalah garis yang ditarik dari titik sudut segitiga ke pertengahan sisi di hadapannya. Perhatikan gambar 4.13! Terlihat bahwa $CD = BD$, z_a yaitu garis dari titik A ke pertengahan BC disebut garis berat dari titik A.



Gambar 4.13

$$z_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$$

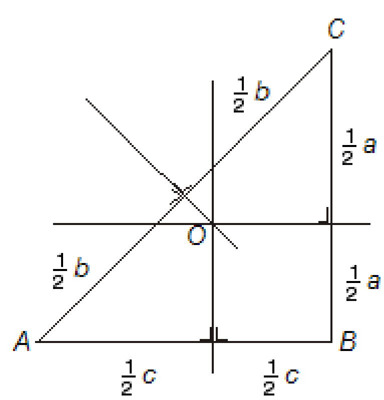
$$z_b^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}b^2$$

$$z_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$$

Z disebut titik berat $\triangle ABC$.

(iii) Garis sumbu

Garis sumbu adalah garis yang melalui titik tengah suatu sisi serta tegak lurus terhadap sisi itu. Perhatikan gambar 4.14!



Gambar 4.14

Terlihat bahwa titik O merupakan titik potong ketiga garis sumbu pada $\triangle ABC$, sehingga disebut titik sumbu $\triangle ABC$.

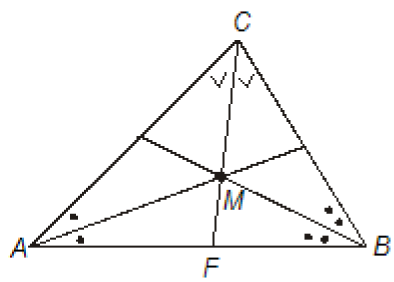
Titik O juga merupakan pusat lingkaran luar $\triangle ABC$, yaitu lingkaran yang berpusat di O dan melalui titik A, B, dan C. Jari-jari OA = OB = OC = R.

Dengan demikian, dapat dirumuskan:

$$\boxed{R = \frac{a \times b \times c}{4L}} \quad \text{atau} \quad \boxed{R = \frac{a \times b \times c}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}}$$

(iv) Garis bagi

Garis bagi adalah garis yang membagi suatu sudut menjadi dua bagian sama besar. Perhatikan gambar 4.15 (a)!



Gambar 4.15 (a)

Terlihat bahwa titik M merupakan perpotongan ketiga garis bagi sudut dalam $\triangle ABC$, sehingga disebut titik bagi $\triangle ABC$.

Titik bagi $\triangle ABC$ merupakan pusat lingkaran dalam $\triangle ABC$ dengan jari-jari lingkaran dalam = r.

$$\boxed{r = \frac{L}{s} \quad \text{dengan} \quad L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Keterangan:

r = jari-jari lingkaran dalam

L = luas lingkaran

$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

Contoh soal 3:

Diketahui $\triangle ABC$ dengan sisi-sisi 8 cm, 10 cm, dan 12 cm.

a. Tentukan keliling $\triangle ABC$!

b. Tentukan luas $\triangle ABC$!

Jawab:

a. Keliling $\triangle ABC$ = 8 cm + 10 cm + 12 cm = 30 cm

b. $s = \frac{1}{2}(8 + 10 + 12)$ cm = 15 cm

Maka luas $\triangle ABC = \sqrt{15(15-8)(15-10)(15-12)}$

$= \sqrt{15 \times 7 \times 5 \times 3}$

$= \sqrt{5 \times 3 \times 7 \times 5 \times 3}$

$= 5 \times 3\sqrt{7}$

$= 15\sqrt{7}$

Contoh soal 4:

Diketahui $\triangle ABC$ dengan AB = 32 cm, BC = 21 cm, dan AC = 17 cm. Carilah panjang garis tinggi pada sisi AB!

Jawab:

$s = \frac{1}{2}(32 + 21 + 17)$ cm = 35 cm

Panjang garis tinggi pada sisi AB adalah

$= \frac{2}{32}\sqrt{35 \times 3 \times 14 \times 18}$

$= \frac{1}{16}\sqrt{7 \times 5 \times 3 \times 7 \times 2 \times 3^2 \times 2}$

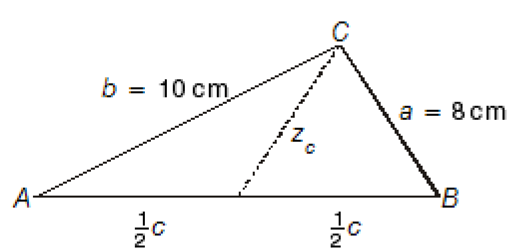
$= \frac{1 \times 7 \times 2 \times 3}{16}\sqrt{15}$

$= \frac{21}{8}\sqrt{15}$

Contoh soal 5:

Diketahui $\triangle ABC$ dengan BC = 8 cm dan AC = 10 cm. Panjang garis berat dari titik $C = \sqrt{46}$ cm. Tentukan luas $\triangle ABC$!

Jawab:



$$z_c{}^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$$

$$(\sqrt{46}\,)^2 = \frac{1}{2}(8)^2 + \frac{1}{2}(10)^2 - \frac{1}{4}c^2$$

$$46 = 32 + 50 - \frac{1}{4}c^2$$

$$\frac{1}{4}c^2 = 82 - 46$$

$$c^2 = 144 \Rightarrow c = 12 \text{ cm} = AB$$

$$s = \frac{1}{2}(8 + 10 + 12) \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

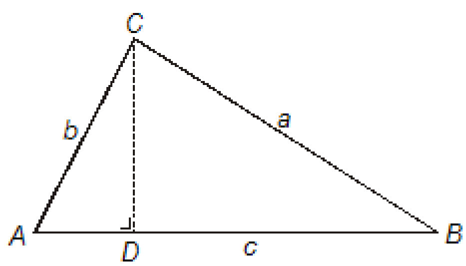
Maka luas $\Delta ABC = \sqrt{15 \times 7 \times 5 \times 3}$

$= \sqrt{5 \times 3 \times 7 \times 5 \times 3}$

$= 5 \times 3 \times \sqrt{7}$

$= 15\sqrt{7}$

5. Rumus umum keliling dan luas segitiga



Gambar 4.15 (b)

Keliling $\Delta ABC = AB + BC + CA = c + a + b$ atau

$$\boxed{\text{Keliling } \Delta ABC = a + b + c}$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{AB \times DC}{2}$$

$$= \frac{c \times t}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\text{alas} \times \text{tinggi}$$

$$\boxed{\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2}a \times t}$$

Keterangan:

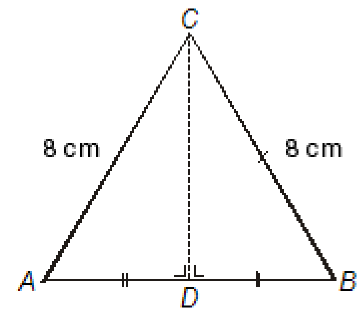
a = sisi alas

t = tinggi

Contoh soal 6:

Diketahui ΔABC sama sisi dengan panjang sisi adalah 8 cm. Tentukan keliling dan luas ΔABC!

Jawab:



Keliling $\Delta ABC = 8 + 8 + 8 = 24$

Jadi, keliling ΔABC adalah 24 cm.

$$AD = \frac{1}{2} \times AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \text{ cm}$$

$$= 4 \text{ cm}$$

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2}$$

$$= \sqrt{8^2 - 4^2}$$

$$= \sqrt{64 - 16}$$

$$= \sqrt{48}$$

$$= 4\sqrt{3}$$

Jadi, panjang CD adalah $4\sqrt{3}$ cm.

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2}a \times t$$

$$= \frac{1}{2}8 \times 4\sqrt{3}$$

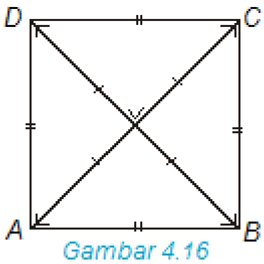
$$= 16\sqrt{3}$$

Jadi, luas ΔABC adalah $16\sqrt{3}$ cm^2.

B. Persegi atau bujursangkar

Persegi adalah bangun datar yang mempunyai empat buah sisi sama panjang dan empat buah sudut sama besar, yaitu $90°$.

Perhatikan persegi pada gambar 4.16!



Gambar 4.16

$$\text{Keliling } \square ABCD = 4s$$

$$\text{Luas } \square ABCD = s^2$$

Keterangan:

s = sisi persegi

Sifat-sifat persegi *ABCD* ialah:

a) keempat sisinya sama panjang ($AB = BC = CD = DA$);

b) keempat sudutnya siku-siku ($\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$);

c) kedua diagonalnya sama panjang dan saling berpotongan tegak lurus di tengah-tengahnya;

d) sisi-sisi yang saling berhadapan sejajar;

e) mempunyai empat buah sumbu simetri dan empat sumbu putar.

Contoh soal 7:

Sebuah persegi luasnya 64 cm^2. Tentukan keliling persegi tersebut!

Jawab:

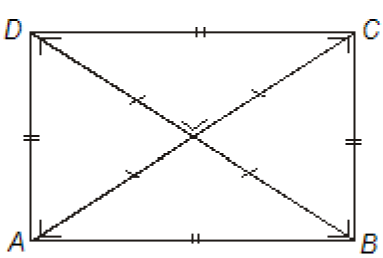
Luas persegi $= s^2$

$s^2 = 64$ maka $s = \sqrt{64} = 8$ cm.

Keliling persegi $= 4s = 4 \times 8 = 32$ cm.

C. Persegi panjang

Persegi panjang adalah bangun datar yang mempunyai empat buah sisi dan empat buah sudut sama besar, yaitu $90°$. Perhatikan persegi pada gambar 4.17!



Gambar 4.17

$$\text{Keliling } \square ABCD = 2(p + l)$$

$$\text{Luas } \square ABCD = p \times l$$

Keterangan:

p = panjang

l = lebar

Sifat-sifat persegi panjang *ABCD* ialah:

a) sisi-sisi yang saling berhadapan sejajar dan sama panjang (AB # CD dan AD # BC);

b) keempat sudutnya siku-siku ($\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$);

c) kedua diagonalnya sama panjang ($AC = BD$) dan berpotongan di tengah-tengahnya;

d) sisi-sisi yang saling berhadapan sejajar;

e) mempunyai dua buah sumbu simetri dan dua sumbu putar.

Contoh soal 8:

Sebuah persegi panjang dengan panjang $1\frac{1}{2}$ kali lebar. Keliling sama dengan 40 cm. Tentukan:

a. panjang; c. luas!

b. lebar;

Jawab:

Misalkan lebar $= x$ maka panjang $= \frac{3}{2}x$.

Keliling $= 2(p + l) = 2(\frac{3}{2}x + x) = 40$ cm

$2(\frac{5}{2}x) = 40$

$\frac{5}{2}x = 20$

$x = 8$

a. panjang $= \frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$ cm.

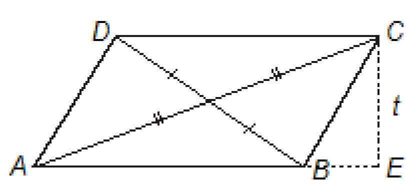
b. Lebar $= x = 8$ cm.

c. Luas $= p \times l = 12 \times 8 = 96$ cm^2.

D. Jajargenjang

Jajargenjang adalah bangun datar yang mempunyai empat buah sisi dengan sepasang-sepasang sisi berhadapan yang sejajar.

Perhatikan jajargenjang pada gambar 4.18!



Gambar 4.18

$$\text{Keliling } \square ABCD = 2(AB + BC)$$

$$\text{Luas } \square ABCD = AB \times t$$

Sifat-sifat jajargenjang *ABCD* ialah:

a) sisi-sisi yang berhadapan sama dan sejajar (*AB* # *CD* dan *AD* # *BC*);

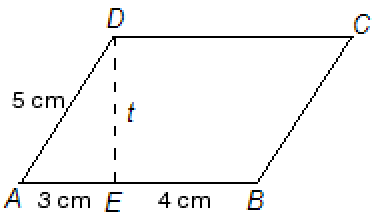
b) sudut-sudut yang berhadapan sama besar ($\angle A = \angle C$ dan $\angle B = \angle D$);

c) mempunyai dua diagonal yang saling membagi dua sama panjang;

d) mempunyai dua simetri putar.

Contoh soal 9:

Perhatikan jajargenjang berikut!



Hitunglah:

a. Keliling jajargenjang;

b. Luas jajargenjang!

Jawab:

Perhatikan ΔAED siku-siku di E.

ED = tinggi = t

$t^2 = AD^2 - AE^2$

$\quad = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

$t = \sqrt{16} = 4$ cm

a. Keliling ▱$ABCD$ $= 2(AB + BC)$

$\qquad = 2(7 + 5) = 24$ cm.

b. Luas ▱$ABCD$ $= AB \times t$

$\qquad = 7 \times 4 = 28 \text{ cm}^2$

E. Belah ketupat

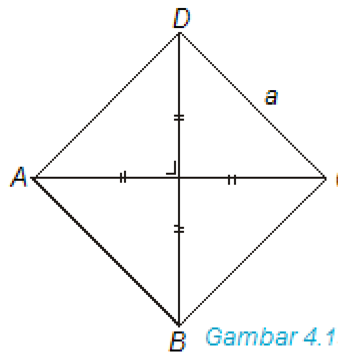
Belah ketupat adalah bangun datar yang mempunyai empat buah sisi sama panjang dan sisi-sisi berhadapan yang sejajar.

Perhatikan belah ketupat pada gambar 4.19!

Sifat-sifat belah ketupat *ABCD* ialah:

a) sisi-sisi yang berhadapan sejajar ($AB \parallel CD$ dan $AD \parallel BC$);

b) keempat sisinya sama panjang ($AB = BC = CD = AD$);



Keliling $= 4a$

Luas $= \frac{1}{2} AC \times BD$

Gambar 4.19

c) sudut-sudut yang berhadapan sama besar ($\angle A = \angle C$ dan $\angle B = \angle D$);

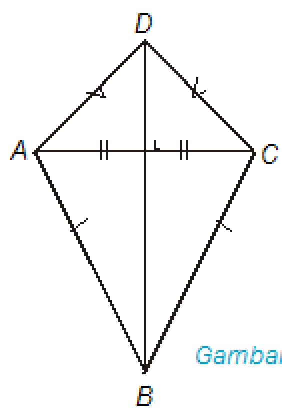
d) mempunyai dua diagonal yang saling berpotongan tegak lurus dan membagi dua sama panjang;

e) mempunyai dua simetri putar.

F. Layang-layang

Layang-layang adalah bangun datar yang mempunyai empat buah sisi dengan empat sisi yang berdekatan sama panjang.

Perhatikan layang-layang pada gambar 4.20!



Keliling $= 2(AB + AD)$

Luas $= \frac{1}{2} AC \times BD$

Gambar 4.20

Sifat-sifat layang-layang *ABCD* ialah:

a) sisi-sisi yang berdekatan sama panjang ($AB = BC$ dan $AD = CD$);

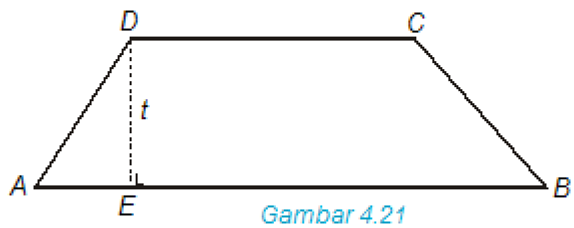
b) mempunyai dua diagonal yang saling berpotongan tegak lurus;

c) mempunyai sebuah simetri.

G. Trapesium

Trapesium adalah bangun datar yang dibatasi oleh dua garis sejajar dengan keempat sisi tidak sama panjang.

Perhatikan gambar 4.21!



Gambar 4.21

$$\boxed{\text{Keliling} = AB + BC + CD + DA}$$

$$\boxed{\text{Luas} = \frac{1}{2}(AB + CD) \times t}$$

Sifat-sifat trapesium *ABCD* ialah:

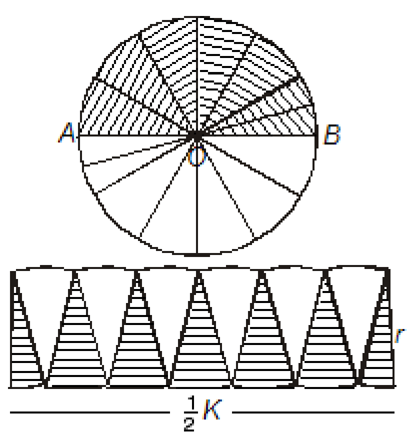
a) mempunyai dua sisi sejajar ($CD \parallel AB$);

b) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$, besar masing-masing sudut adalah sembarang.

H. Lingkaran

Lingkaran adalah bangun datar yang dibatasi oleh garis lengkung. Garis lengkung tersebut merupakan himpunan semua titik berjarak sama panjang terhadap titik tertentu.

Perhatikan lingkaran pada gambar 4.22!



Gambar 4.22

$$\text{Keliling lingkaran} = \pi d$$
$$= 2\pi r$$

$$\boxed{\text{Keliling} = 2\pi r}$$

Untuk mencari luas lingkaran, lihat gambar 4.22 di atas. Lingkaran dibagi 12 bagian yang sama besar yang satu bagian dibagi lagi menjadi 2 bagian yang sama.

$$\text{Luas lingkaran} = p \times l$$
$$= \frac{1}{2}K \times r$$
$$= \frac{1}{2}2\pi r \times r \quad \pi = \frac{22}{7} \text{ atau } \pi = 3{,}14$$
$$= \pi r^2$$

$$\boxed{\text{Luas} = \pi r^2}$$

Contoh soal 10:

Sebuah lingkaran dengan jari-jari 5 cm. Tentukan keliling dan luas lingkaran!

Jawab:

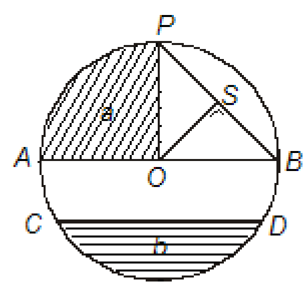
Keliling $= 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$

Luas $= \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 5^2 = 3{,}14 \cdot 25 = 78{,}5$

Jadi, keliling lingkaran adalah 31,4 cm dan luasnya adalah 78,5 cm^2.

1. Unsur-unsur lingkaran

Perhatikan lingkaran pada gambar 4.23!



Gambar 4.23

Titik *O* pada gambar tersebut dinamakan pusat lingkaran. Perhatikan bahwa *OA*, *OP*, dan *OB* sama panjang. Jarak yang sama panjang terhadap pusat lingkaran dinamakan *jari-jari lingkaran*.

Pada gambar 4.23, $OA = OP = OB = r$.

Berikut ini unsur-unsur lingkaran yang penting untuk diketahui:

(i) Tali busur

Tali busur adalah garis yang menghubungkan dua titik pada suatu lingkaran. Pada gambar 4.23, *CD*, *AB*, dan *BP* adalah tali busur.

Tali busur yang melalui pusat lingkaran disebut *garis tengah* atau *diameter*. Garis tengah atau diameter pada gambar 4.23 adalah garis *AB* yang panjangnya dua kali jari-jari lingkaran. Titik *A* dan *B* disebut *titik berhadapan diameteral*.

(ii) Busur

Busur adalah garis lengkung yang membentuk lingkaran. Pada gambar 4.23, garis lengkung *CD* merupakan busur, ditulis $\frown CD$, maksudnya adalah busur pendek CD, sedangkan busur panjang CD melalui A, P, dan B.

Dalam praktiknya, penamaan busur jika tidak disebutkan busur panjang, berarti yang dimaksud adalah busur pendeknya.

(iii) Juring

Juring atau *sektor* adalah daerah yang dibatasi oleh dua jari-jari dan satu busur. Pada gambar 4.23, juring a maksudnya juring kecil a, sedangkan juring besarnya adalah daerah lingkaran seluruhnya dikurangi daerah a.

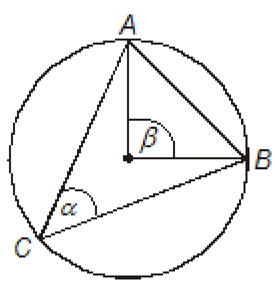
(iv) Tembereng

Tembereng atau *segmen* adalah daerah yang dibatasi oleh tali busur dan busur lingkaran. Pada gambar 4.23, daerah b yang diarsir adalah tembereng.

(v) Apotema

Pada gambar 4.23, OS adalah garis yang ditarik dari titik pusat lingkaran O, tegak lurus pada tali busur BP. Garis itu disebut *apotema*.

2. Sifat unsur dalam lingkaran



Gambar 4.24

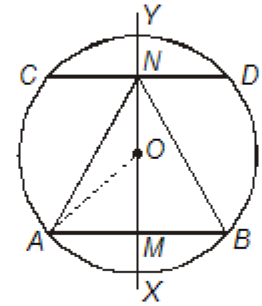
Perhatikan gambar 4.24!

1) $\angle\beta$ adalah sudut pusat lingkaran menghadap busur AB, sedangkan $\angle\alpha$ adalah sudut keliling lingkaran menghadap busur AB, maka $\beta = 2\alpha$.
2) Jika dua buah busur sama, maka:
   a. sudut-sudut pusatnya sama besar;
   b. tali busur-tali busurnya sama panjang;
   c. tali busur-tali busur berjarak sama dari titik pusat lingkaran.
3) Banyaknya simetri putar pada lingkaran tak berhingga.
4) Banyaknya sumbu simetri suatu lingkaran tak berhingga.

Contoh soal 11:

Sebuah lingkaran berpusat di titik O dan berjari-jari 10 cm. Panjang tali busur AB sama dengan panjang tali busur CD, yaitu 16 cm dan tegak lurus pada garis tengah XY. Hitunglah:

a. panjang MN;
b. panjang MY;
c. luas $\triangle ANB$!



Jawab:

a. XY sumbu simetri, maka

$AM = MB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\times 16 = 8$ cm

$CN = ND = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\times 16 = 8$ cm

$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2}$
$= \sqrt{10^2 - 8^2}$
$= 6$ cm

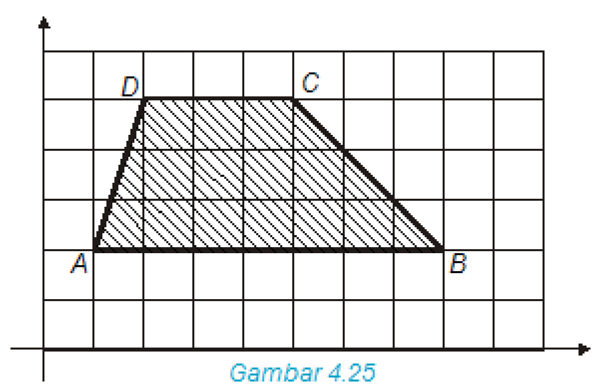
$OM = ON = 6$ cm

Jadi, $MN = MO + ON = 6 + 6 = 12$ cm.

b. $MY = MO + OY = 6 + 10 = 16$ cm

c. luas $\triangle ANB = \frac{1}{2}AB \times MN$
$= \frac{1}{2}16 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$
$= 8 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$
$= 96 \text{ cm}^2$

4.2.2 Luas bangun datar dengan sistem koordinat



Gambar 4.25

Untuk menghitung luas daerah trapesium *ABCD* digunakan sistem koordinat. Sistem ini dilakukan dengan cara menghitung banyaknya persegi yang utuh dan persegi yang tidak utuh. Untuk persegi yang tidak utuh, jika lebih besar dari $\frac{1}{2}$, maka dianggap 1 dan jika kurang dari $\frac{1}{2}$, maka dihilangkan.

Pada gambar di atas, luas daerah trapesium $ABCD = 12 + 3 = 15$ satuan persegi.

Jika digunakan rumus trapesium:

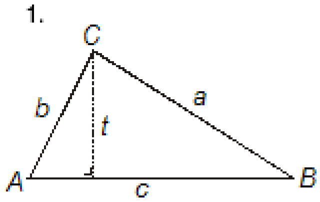
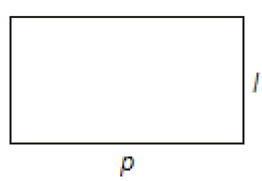
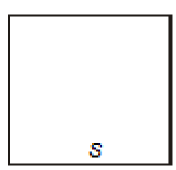
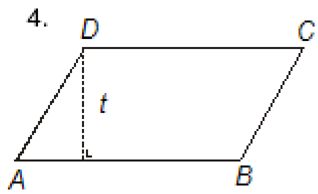
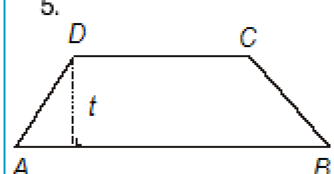
$$L\ ABCD = \left(\frac{AB + CD}{2}\right) \times t$$

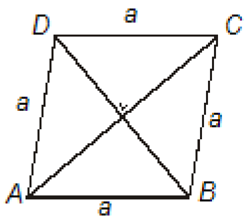
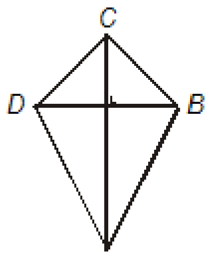
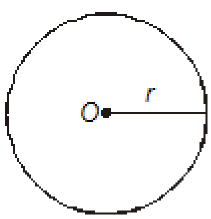
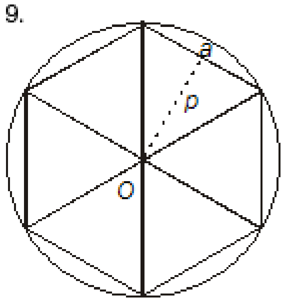
$$= \left(\frac{7 + 3}{2}\right) \times 3 = \frac{10}{2} \times 3 = 5 \times 3$$

$$= 15 \text{ satuan persegi}$$

Untuk bangun yang lain khususnya bangun datar tak beraturan bisa digunakan dengan metode ini.

4.2.3 Rumus-rumus keliling dan luas bangun dimensi dua

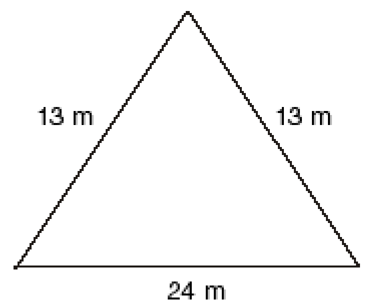
Gambar Bangun	Nama Bangun	Keliling (*K*)	Luas (*L*)
1. 	segitiga	$K = AB + BC + AC$ $= c + a + b$	$L = \frac{1}{2}(\text{alas} \times t)$ $= \frac{1}{2}(AB \times t)$ atau $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
2. 	persegi panjang	$K = 2(p + l)$	$L = p \times l$
3. 	persegi	$K = 4s$	$L = s^2$
4. 	jajargenjang	$K = 2(AB + BC)$	$L = AB \times t$
5. 	trapesium	$K = AB + BC + CD + AD$	$L = \frac{1}{2}(AB + CD) \times t$

Gambar Bangun	Nama Bangun	Keliling (K)	Luas (L)
6. 	belah ketupat	$K = 4a$	$L = \frac{1}{2} AC \times BD$
7. 	layang-layang	$K = 2(AB + BC)$	$L = \frac{1}{2} AC \times BD$
8. 	lingkaran	$K = 2\pi r$	$L = \pi r^2$
9. 	segi-6 beraturan segi-8 beraturan ⋮ segi-n beraturan	$K = 6 \times a$ $K = 8 \times a$ ⋮ $K = n \times a$	$L = \frac{1}{2} \cdot 6 \times p \times a$ $L = \frac{1}{2} \cdot 8 \times p \times a$ ⋮ $L = \frac{1}{2} n \times p \times a$ n = banyak segi p = apotema a = panjang sisi segi-n beraturan

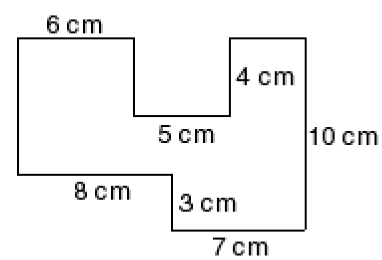
Latihan 2

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Perbandingan ukuran panjang dan lebar suatu kertas gambar adalah 8 : 5. Jika keliling kertas itu 78 cm. Hitunglah luas kertas tersebut!
2. Suatu bagian atap rumah berbentuk segitiga dengan ukuran seperti pada gambar di bawah ini. Jika tiap 1 m^2 atap diperlukan 20 genteng. Berapa jumlah genteng yang diperlukan?

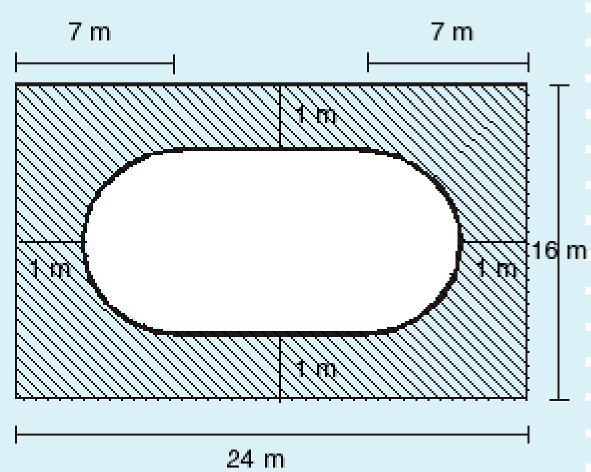


3. Panjang sebuah persegi panjang adalah dua kali lebarnya. Jika lebarnya 4 cm, hitunglah:
   a. panjang persegi panjang;
   b. keliling persegi panjang;
   c. luas persegi panjang!
4. Lantai ruang tamu Anita berukuran 3 m × 4 m. Akan dipasang ubin berbentuk persegi dengan ukuran sisi ubin 20 cm.
   a. Berapa banyaknya ubin yang dapat dipasang sepanjang sisi lebarnya?
   b. Berapa banyaknya ubin yang dapat dipasang sepanjang sisi panjangnya?
   c. Berapa banyaknya ubin seluruhnya yang diperlukan untuk ruang tamu?
5. Dalam sebuah belah ketupat diketahui perbandingan diagonalnya 3 : 4. Jika panjang sebuah sisinya 12,5 cm, hitunglah luas belah ketupat itu!
6. Gambarlah pada kertas berpetak titik-titik $A(1, 2)$, $B(10, 2)$, $C(5, 4)$, dan $D(3, 4)$. Berbentuk apakah bangun $ABCD$? Hitunglah luasnya!
7. Dalam trapesium $ABCD$ diketahui sisi-sisi sejajarnya ruas garis AB dan ruas garis DC, sudut $DAB = 90°$. Jika ruas garis $AB = 12$ cm, ruas garis $DC = 8$ cm, dan ruas garis $AD = 6$ cm, hitunglah luas $ABCD$!
8. Buktikan bahwa jumlah sudut suatu segitiga adalah 180°!
9. Pak Amir mempunyai sebidang tanah yang berbentuk persegi dengan luas 15.625 m^2. Jika tanah tersebut akan dipagari dengan kawat berduri dengan biaya pemagaran Rp 10.000 per meter, berapa biaya pemagaran yang diperlukan oleh Pak Amir untuk pemagaran sekeliling tanah tersebut!
10. Sebuah karpet berbentuk lingkaran dengan jari-jari 2 meter. Tentukan:
    a. luas lingkaran karpet tersebut;
    b. biaya yang dikeluarkan untuk membuat 100 buah karpet, jika biaya pembuatan 1 m^2 karpet adalah Rp 16.000,00!
11. Berapa luas daerah trapesium yang tingginya 10 m dan sisi sejajar masing-masing 8 m dan 12 m?
12. Berapa biaya yang dikeluarkan untuk pagar keliling lapangan sepak bola yang berbentuk persegi panjang, dengan luas 4.500 m^2 dan panjangnya 75 m, jika biaya per meter Rp 5.000,00?
13. Hitunglah luas dan keliling bangun datar berikut ini!

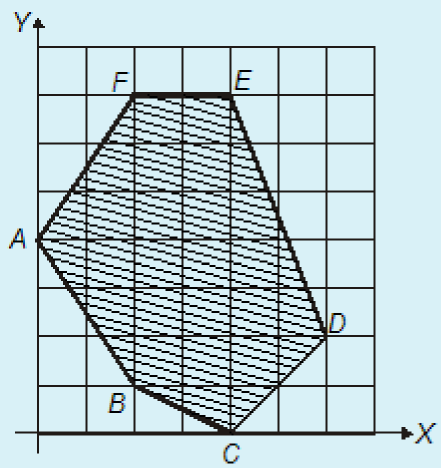


Lembar Tugas 2

1. Gambar di samping ini merupakan sebuah halaman yang di tengah-tengahnya terdapat sebuah kolam. Tentukan keliling kolam dan luas daerah yang diarsir!



2. Lihat gambar di bawah ini! Gambar *ABCDEF* merupakan segi enam tak beraturan. Tentukan keliling dan luas segi enam *ABCDEF*!



4.3 Menerapkan Transformasi Bangun Datar

Suatu bangun pada sebuah bidang dapat dipindahkan dari tempat semula ke tempat lain dalam bidang tersebut dengan menggunakan transformasi.

Jenis transformasi ada 4 (empat) macam, yaitu:

1. Refleksi (pencerminan)
2. Translasi (pergeseran)
3. Rotasi (perputaran)
4. Dilatasi (perkalian)

4.3.1 Refleksi (pencerminan)

Refleksi (pencerminan) adalah memindahkan sebuah objek materi pada bidang dengan cara dan rumus serta teori cermin datar. Hasil dari pencerminan tersebut memperoleh bayangan.

1. Jarak benda semula sama dengan jarak bayangannya
2. Tinggi benda semula sama dengan tinggi bayangannya
3. Bangun benda semula sama dengan bangun bayangannya (kongruen)

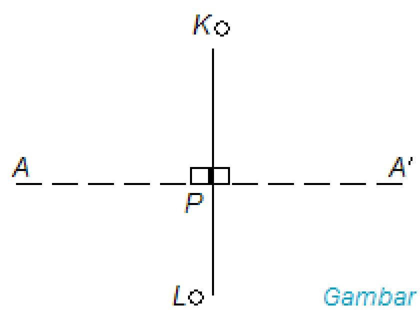
A. Sifat refleksi terhadap garis

Ada 3 (tiga) sifat refleksi (pencerminan) terhadap garis, yaitu:

1. Jarak bangun semula sama dengan jarak bayangannya
2. Tinggi benda semula sama dengan tinggi bayangannya
3. Bangun semula dengan bayangannya sama dan sebangun (kongruen)

B. Menggambar bayangan

a. Menggambar bayangan suatu titik oleh refleksi terhadap suatu garis.



Gambar 4.26

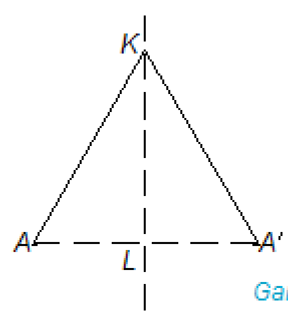
Garis *KL* adalah garis sumbu simetri.

Dari titik *A* tarik garis tegak lurus *KL* dan sama panjang dengan *AP* di A'.

Titik A' adalah titik bayangan dari titik *A*.

$AP = A'P$; $A \leftrightarrow A'$

b. Menggambar bayangan suatu garis oleh refleksi terhadap suatu garis.



Gambar 4.27

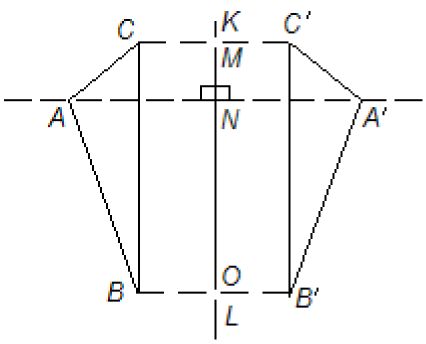
Bayangan ruas garis *AB* terhadap *KL* adalah ruas garis $A'B$.

$AB = A'B$; $A'B$ adalah bayangan dari *AB*

$A \leftrightarrow A'$

$B \leftrightarrow B$

c. Menggambar bayangan suatu bangun datar oleh refleksi terhadap suatu garis.



Gambar 4.28

Bayangan segitiga ABC adalah $A'B'C'$.

$$AN = A'N$$
$$BO = B'O$$
$$CM = C'M$$
$$AB = A'B'$$
$$AC = A'C'$$
$$BC = B'C'$$

C. Menentukan koordinat bayangan suatu titik pada bidang Cartesius oleh suatu refleksi

1. Refleksi terhadap sumbu X

$P(a, b) \leftrightarrow P'(a, -b)$

Contoh soal 12:

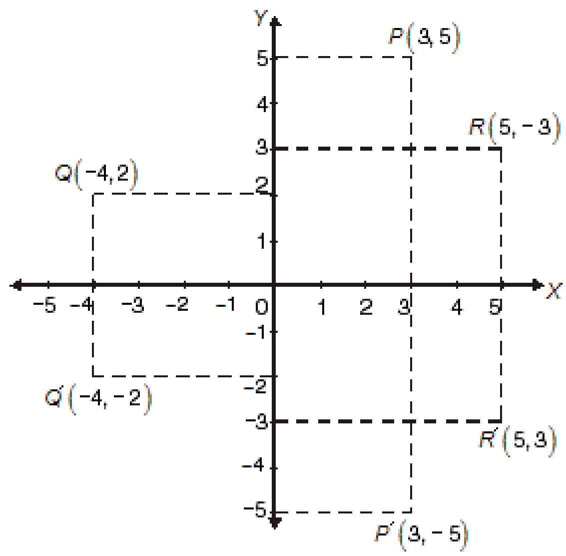
Tentukan bayangan titik-titik $P(3, 5)$, $Q(-4, 2)$, dan $R(5, -3)$ yang direfleksikan terhadap sumbu X, kemudian gambarkan pada bidang koordinat!

Jawab:

a. $P(3, 5) \leftrightarrow P'(3, -5)$

b. $Q(-4, 2) \leftrightarrow Q'(-4, -2)$

c. $R(5, -3) \leftrightarrow R'(5, 3)$



2. Refleksi terhadap sumbu Y

$P(a, b) \leftrightarrow P'(-a, b)$

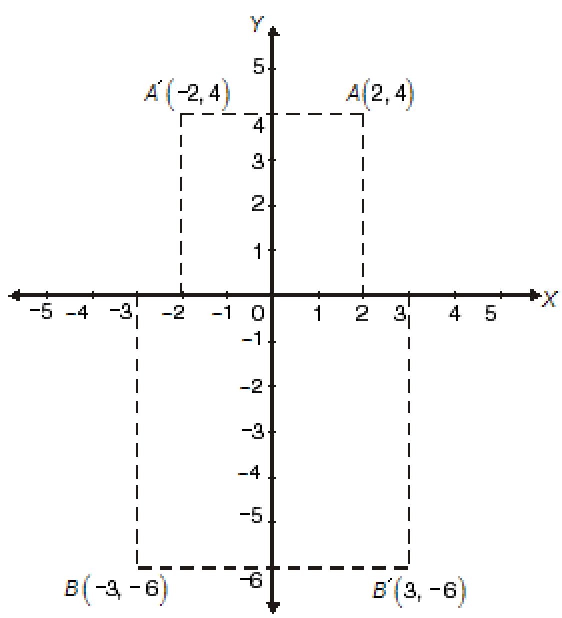
Contoh soal 13:

Tentukan bayangan dari titik-titik $A(2, 4)$ dan $B(-3, -6)$, kemudian gambarkan pada bidang koordinat!

Jawab:

a. $A(2, 4) \leftrightarrow A'(-2, 4)$

b. $B(-3, -6) \leftrightarrow B'(3, -6)$



3. Refleksi terhadap garis $x = k$

$$P(a, b) \leftrightarrow P'(2k - a, b)$$

Contoh soal 14:

Tentukan bayangan titik-titik $P(1, 4)$ dan $Q(-1, 1)$ direfleksikan terhadap garis $x = 3$!

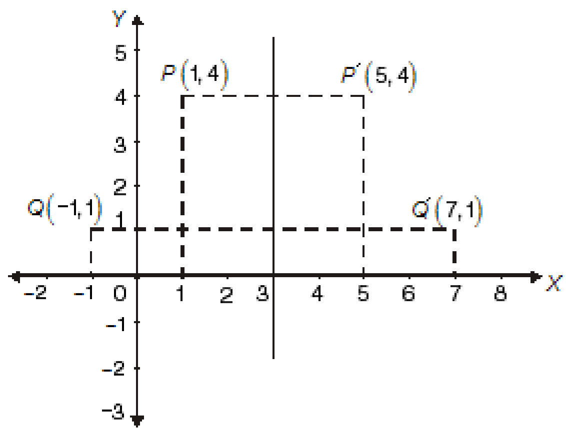
Jawab:

$P(1, 4) \leftrightarrow P'(2 \cdot 3 - 1, 4)$

$P'(6 - 1, 4) \rightarrow P'(5, 4)$

$Q(-1, 1) \leftrightarrow Q'(2 \cdot 3 + 1, 1)$

$Q'(6 + 1, 1) \rightarrow Q'(7, 1)$



4. Refleksi terhadap garis $y = h$

$$P(a, b) \leftrightarrow P'(a, 2h - b)$$

Contoh soal 15:

Tentukan bayangan titik-titik $P(4, 1)$ dan titik $Q(-1, -2)$ direfleksikan terhadap garis $y = -3$!

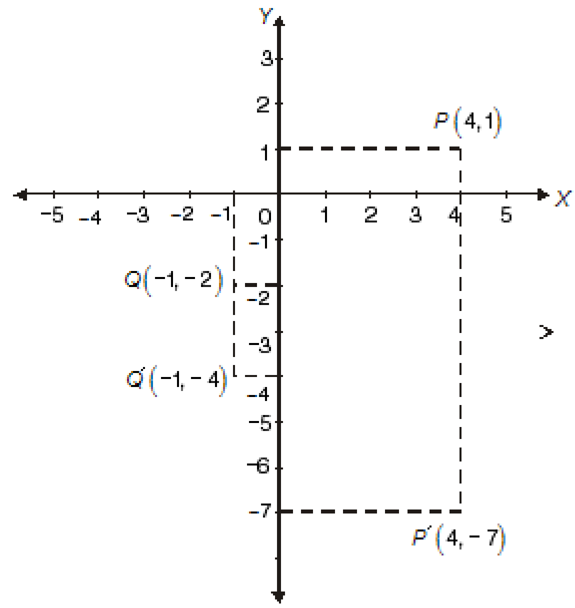
Jawab:

$P(4, 1) \leftrightarrow P'(4, 2(-3) - 1)$

$P'(4, -6 - 1) \rightarrow P'(4, -7)$

$Q(-1, -2) \leftrightarrow Q'(-1, 2(-3) + 2)$

$Q'(-1, -6 + 2) \rightarrow Q'(-1, -4)$



5. Refleksi terhadap garis $x = y$

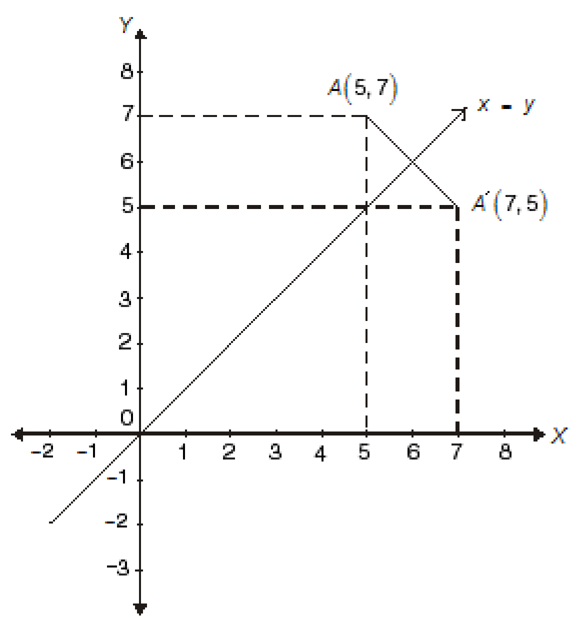
$$P(a, b) \leftrightarrow P'(b, a)$$

Contoh soal 16:

Tentukan bayangan dari titik $A(5, 7)$ direfleksikan terhadap garis $x = y$!

Jawab:

$A(5, 7) \leftrightarrow A'(7, 5)$



6. Refleksi terhadap garis $x = -y$

$P(a, b) \leftrightarrow P'(-b, -a)$

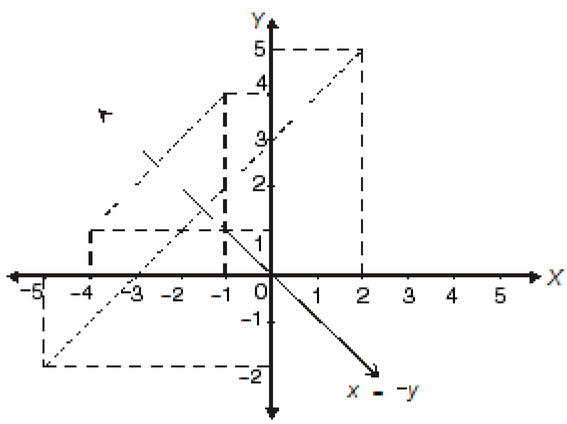
Contoh soal 17:

Tentukan bayangan dari titik $P(2, 5)$ dan $Q(-1, 4)$ yang direfleksikan terhadap garis $x = -y$!

Jawab:

$P(2, 5) \leftrightarrow P'(-5, -2)$

$Q(-1, 4) \leftrightarrow Q'(-4, 1)$



Latihan 3

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

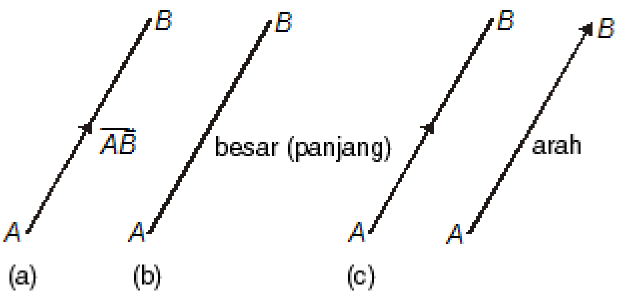
1. Tentukan bayangan titik $P(2, 4)$, jika dicerminkan terhadap:
   a. sumbu X b. sumbu Y
   c. garis $y = x$ e. garis $x = 4$
   d. garis $y = -x$ f. garis $y = -2$
2. Sebuah segitiga ABC dengan koordinat titik-titik sudutnya adalah $A(2, 1)$; $B(6, 1)$ dan $C(2, 8)$. Gambarkan bayangan ΔABC dalam sebuah koordinat kartesius, jika masing-masing dicerminkan terhadap sumbu X dan sumbu Y!
3. Sebuah titik $P(-2, 3)$ direfleksikan terhadap garis $x = 3$. Gambarkan titik bayangannya dan tentukan koordinat titik bayangan!
4. Sebuah garis PQ: $P(5, 6)$ dan $Q(2, 3)$. Gambarkan dan tentukan koordinat bayangan garis PQ yang direfleksikan terhadap sumbu Y!
5. Sebuah garis AB dengan $A(3, 2)$ dan $B(5, 6)$. Gambarkan dan tentukan koordinat bayangan $A'B'$!
6. Tentukan bayangan dari refleksi berikut!
   a. Garis $3x + 2y - 5 = 0$ oleh refleksi terhadap sumbu Y
   b. Titik $A(5, 7)$ oleh refleksi terhadap garis $y = \sqrt{3}x$
   c. Lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ oleh refleksi terhadap garis $y = 5$
7. Sebuah segitiga PQR dengan koordinat titik-titik sudut $P(1, 3)$; $Q(6, 1)$; $R(4, 7)$. Segitiga PQR direfleksikan terhadap sumbu X dan sumbu Y
   a. Gambarkan bayangan segitiga PQR tersebut
   b. Tentukan koordinat titik-titik sudut kedua segitiga bayangan tersebut.
8. Sebuah garis AB dengan koordinat titik sudut $A(2, 3)$ dan $B(5, 1)$. Garis tersebut direfleksikan terhadap sumbu X dilanjutkan dengan refleksi terhadap sumbu Y.
   a. Gambarkan hasil refleksinya!
   b. Tentukan koordinat titik refleksi terakhir $(A''B'')$!
9. Sebuah titik $P(-1, 5)$ dicerminkan terhadap sumbu Y dilanjutkan refleksi terhadap garis $y = x$. Tentukan koordinat titik bayangannya!
10. Sebuah persegi panjang $ABCD$ dengan koordinat titik sudut $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, dan $C(4, 5)$. Jika keempat titik sudut persegi panjang tersebut dicerminkan terhadap sumbu Y, dilanjutkan terhadap sumbu X, tentukan:
    a. koordinat titik D;
    b. koordinat titik bayangan hasil pencerminan pertama dan kedua;
    c. gambarkan hasil pencerminannya!

4.3.2 Translasi (pergeseran)

A. Pengertian translasi

Translasi ialah suatu perpindahan semua titik di dalam bidang yang bersangkutan sejauh jarak yang sama dan dalam arah yang sama.

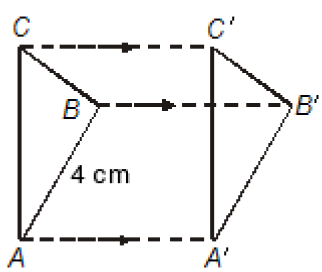
Perpindahan suatu benda dari titik A ke B ditentukan oleh besar dan arahnya. Perpindahan tersebut dapat dilambangkan dengan garis berarah $\overrightarrow{AB}$.



Contoh soal 18:

Sebuah segitiga siku-siku di B dengan panjang AB = 4 cm dan BC = 3 cm. Jika ditranslasikan sejauh 7 cm ke kanan, $A \to A'$, $B \to B'$, dan $C \to C'$. Tentukan panjang AA', BB' dan CC' dan panjang $A'C'$!

Jawab:



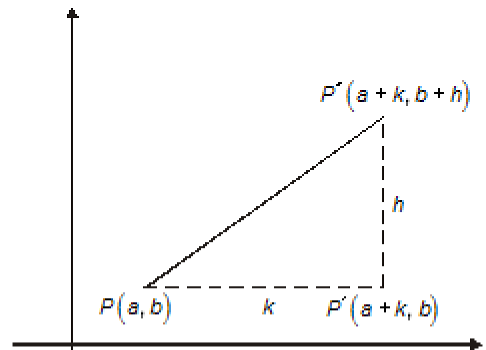
Translasi yang diwakili $\overline{AA'}$ atau $\overline{BB'}$ atau $\overline{CC'}$ memetakan titik-titik $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Akibatnya segitiga ABC sama dan sebangun (kongruen) dengan segitiga $A'B'C'$, sehingga panjang AA' = 7 cm, BB' = 7 cm dan CC' = 7 cm

Panjang $A'C'$ = panjang AC. Panjang AC = $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ cm.

B. Translasi dengan pasangan bilangan

Sebuah titik $P(a, b)$ ditranslasikan mendatar (horizontal) sejauh k satuan maka bayangan titik P menjadi $P'(a+k, b)$. Selanjutnya titik $P'(a+k, b)$ ditranslasikan tegak (vertical) sejauh h satuan, maka bayangan titik $P'(a+k, b)$ menjadi $P''(a+k, b+h)$. Lintasan atau sejauh garis berarah menjadi $P''(a+k, b+h)$.

Perhatikan gambar berikut!



Gambar 4.29

> Bayangan titik $P(a, b)$ oleh translasi $\begin{pmatrix} k \\ h \end{pmatrix}$ adalah $P'(a+k, b+h)$

Contoh soal 19:

1. Diketahui garis AB dengan koordinat titik $A(3, 2)$ dan $B(4, 6)$ ditranslasikan ke kanan sejauh/sepanjang 5 satuan dan ke bawah sepanjang 3 satuan.
   a) Nyatakan translasi yang diwakili oleh AA' dan BB'!
   b) Tentukan koordinat bayangan A' dan B'!
2. Diketahui sebuah segitiga ABC dengan koordinat titik-titik sudut $A(1, 1)$, $B(6, 3)$ dan $C(3, 7)$.

   Tentukan koordinat bayangan titik A', B', dan C' oleh translasi $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$!

Jawab:

1. $A(3, 2)$, $B(4, 6)$
   a) Translasi $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

   b) $A(2, 3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}} A'(2+5, 3-3) = A'(7, 0)$

   $B(4, 6) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}} B'(4+5, 6-3) = B'(9, 3)$

2. $A(1,1)\xrightarrow{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}A'(1+2,1+3)=A'(3,4)$

$B(6,3)\xrightarrow{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}B'(6+2,3+3)=B'(8,6)$

$C(3,7)\xrightarrow{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}C'(3+2,7+3)=C'(5,10)$

Latihan 4

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Tentukan bayangan dari titik-titik $P=(3,4)$ dan $Q=(2,-3)$ oleh translasi $T=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$!
2. Translasi $T=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ memetakan titik $A=(3,-2)$ ke titik $A'=(5,-5)$. Tentukan nilai x dan y!
3. ABC adalah sebuah segitiga dengan panjang sisi-sisinya AB = 5 cm; BC = 4 cm; dan AC = 3 cm. Pada translasi sepanjang 8 cm, $A\to A'$; $B\to B'$; dan $C\to C'$. Tentukan panjang AA', BB', $B'C'$, dan $C'A'$!
4. Diketahui garis PQ dengan $P(2,1)$ dan $Q(6,6)$, ditranslasikan ke kanan sepanjang 4 satuan dan ke atas 2 satuan. Tentukan koordinat titik A' dan B'!
5. Suatu persegi panjang $PQRS$ dengan koordinat titik-titik sudutnya: $P(3,2)$; $Q(9,2)$; $R(6,4)$.
   a. Tentukan koordinat titik S
   b. Jika ke 4 sudutnya ditranslasikan yang diwakili oleh $\frac{1}{2}PR$. Tentukan koordinat ke 4 titik sudutnya setelah translasi.

4.3.3 Rotasi (perputaran)

A. Pengertian rotasi

Suatu gerak dikatakan berotasi apabila setiap titik berpindah sepanjang busur lingkaran sejauh atau sebesar sudut tertentu. Pusat dari lingkaran disebut ***pusat*** **putaran.**

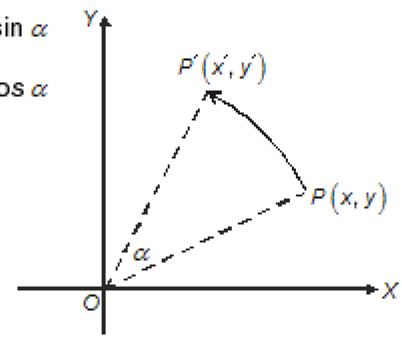
Arah putaran dikatakan *positif* apabila arah putaran berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam. Sebaliknya, arah putaran dikatakan *negatif* apabila arah putaran searah dengan arah jarum jam.

B. Rotasi terhadap titik pusat $O(0,0)$

Jika titik $P(x,y)$ diputar sebesar α radian berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam terhadap titik pusat O dan diperoleh bayangan $P'(x',y')$, maka:

$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$

$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$



Gambar 4.30

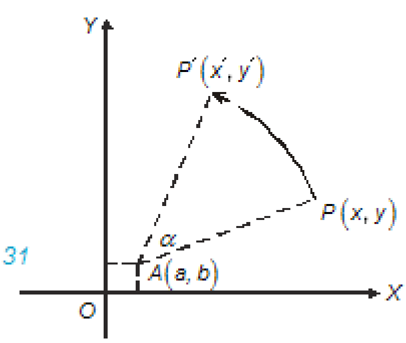
C. Rotasi terhadap titik pusat $A(a,b)$

Jika titik $P(x,y)$ diputar sebesar α radian berlawanan arah dengan arah jarum jam terhadap titik pusat $A(a,b)$ dan diperoleh bayangan $P'(x',y')$, maka:

$x'-a=(x-a)\cos\alpha-(y-b)\sin\alpha$

$y'-b=(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha$

Gambar 4.31



Contoh soal 20:

1. Titik $P(-6,8)$ diputar sebesar $60°$ berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam terhadap titik $O(0,0)$. Tentukan bayangan titik A oleh rotasi tersebut!

Jawab:

Misalkan, bayangannya adalah titik $P'(x',y')$; maka:

$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$

$x' = -6\cos 60° - 8\sin 60°$

$x' = -6 \times \frac{1}{2} - 8 \times \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$x' = -3 - 4\sqrt{3}$

$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$

$y' = -6\sin 60° + 8\cos 60°$

$y' = -6 \times \frac{1}{2}\sqrt{3} + 8 \times \frac{1}{2}$

$y' = -3\sqrt{3} + 4$

Jadi, bayangan titik P oleh rotasi tersebut adalah $P'\left(-3 - 4\sqrt{3}, -3\sqrt{3} + 4\right)$

2. Diketahui titik $A(4, -7)$ diputar terhadap titik $A(-2, 3)$ dengan perputaran searah dengan arah jarum jam dan besar sudut putarnya $\frac{\pi}{4}$ radian. Tentukan bayangan titik A oleh rotasi tersebut!

Jawab:

Misalkan, bayangannya adalah $A'(x', y')$, maka:

$x' - a = (x - a)\cos\alpha - (y - b)\sin\alpha$

$x' + 2 = (4 + 2)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - (-7 - 3)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$x' + 2 = 6\cos(-45°) - (-10)\sin(-45°)$

$x' + 2 = 6 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

$x' + 2 = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$x' = -2\sqrt{2} - 2$

$y' - b = (x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha$

$y' - 3 = (4 + 2)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + (-7 - 3)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$y' - 3 = 6\sin(-45°) + (-10)\cos(-45°)$

$y' - 3 = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - 10 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$y' - 3 = -3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$y' = 3 - 8\sqrt{2}$

Jadi, bayangan titik A oleh rotasi tersebut adalah $A'\left(-2\sqrt{2} - 2, 3 - 8\sqrt{2}\right)$.

Latihan 5

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Sebuah segitiga OBC dengan koordinat titik sudut $O(0, 0)$, $B(6, 0)$, dan $C(4, 4)$. Jika dirotasi pada O sejauh $90°$;
   a. arah positif;
   b. arah negatif;
   gambarkan rotasinya!
2. Diketahui segitiga ABC dengan koordinat titik-titik sudutnya: $P(5, 3)$, $Q(1, 0)$, dan $R(5, 0)$.
   a. Gambarkan bayangan segitiga ABC, jika diputar pada O sejauh $+180°$ dan $270°$!
   b. Tentukan koordinat bayangan segitiga ABC hasil rotasi!
3. Sebuah titik $A(4, 6)$ diputar dengan pusat sejauh $x°$, sehingga menjadi titik $A'(6, -4)$. Tentukan harga x!
4. Sebuah titik $P(3, 4)$ dirotasikan pada O sejauh $90°$ searah dengan putaran jarum jam, dilanjutkan dengan refleksi terhadap sumbu X. Tentukan koordinat bayangan akhir P''!
5. Sebuah titik $P(6, 3)$ diputar sebesar $\frac{1}{4}\pi$ radian terhadap titik pusat $A(2, 1)$.
   Tentukan:
   a. koordinat titik bayangan P jika diputar berlawanan arah dengan jarum jam;
   b. koordinat titik bayangan P jika diputar searah dengan arah jarum jam!

4.3.4 Dilatasi

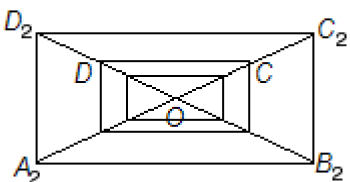
A. Pengertian dilatasi

Dilatasi disebut juga dengan perbesaran atau perkalian adalah suatu transformasi untuk mengubah bentuk bangun yang sebenarnya. Dilatasi ditentukan oleh titik pangkal dengan faktor skala dilatasi.

Dilatasi yang berpusat di titik pangkal (asal) $O(0, 0)$ dan titik sebarang $P(x, y)$ dengan masing-

masing faktor skala k dilambangkan berturut-turut dengan $[O, k]$ dan $[P, k]$.

Perhatikan gambar di bawah ini! Persegi panjang $A_1B_1C_1D_1$ adalah perbesaran dengan pusat perbesaran O dan faktor skala pembesaran adalah $\frac{1}{2}$. Sedangkan persegi panjang $A_2B_2C_2D_2$ adalah pembesaran dengan pusat pembesaran O dan faktor skala pembesaran 2.



O : pusat

k : faktor skala

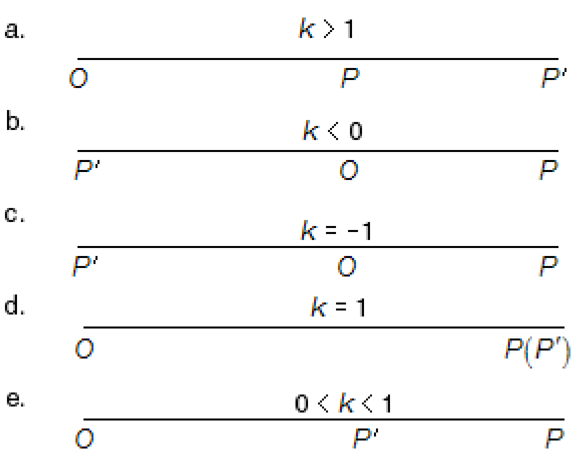
Gambar 4.32

B. Menggambar hasil dilatasi suatu titik, garis, atau bangun

a. Menggambar hasil dilatasi suatu titik

Pada uraian di atas telah dijelaskan bahwa, perbesaran dengan memilih pusat O, dan faktor skala k ditulis (O, k).

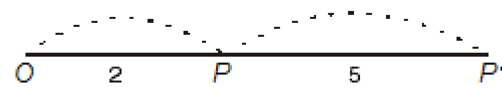
Pada gambar berikut yang menunjukkan berbagai kedudukan titik O, P, dan P' untuk berbagai nilai k.

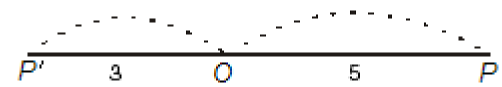


Gambar 4.33

Pada dilatasi (O, k), titik P dipetakan menjadi P'. Kedudukan titik O, P, dan P' tergantung dari harga k, sehingga: $OP' = k\ OP$.

Contoh soal 21:

1. 

2. 

Jika O adalah pusat dilatasi, P dan P' adalah titik asal dan bayangan, tentukan faktor skala dari dilatasi titik tersebut di atas.

Jawab:

1. $\overline{OP'}$ dan $\overline{OP}$ searah, maka faktor skalanya positif.

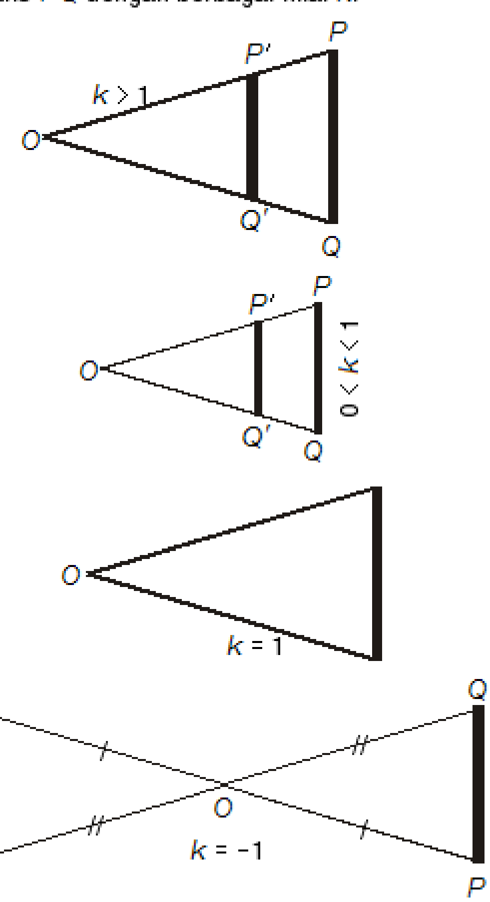
   $\overline{OP'} = \frac{5}{2} OP$. Jadi, faktor skalanya adalah $\frac{5}{2}$.

2. $\overline{OP'}$ dan $\overline{OP}$ berlawanan arah, maka faktor skalanya negatif.

   $\overline{OP'} = -\frac{3}{5} OP$. Jadi, faktor skalanya adalah $-\frac{3}{5}$.

b. Menggambarkan hasil dilatasi suatu garis

Perhatikan gambar berikut yang menunjukkan dilatasi garis PQ dengan berbagai nilai k!



Contoh soal 22:

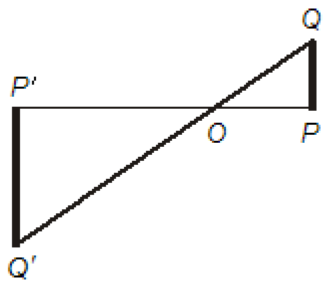
Pada gambar berikut ditunjukkan titik O dan garis PQ. Gambarkanlah hasil dilatasi garis PQ menurut $[O, k]$ dengan faktor skala:

a. -2 b. $\frac{1}{2}$

Jawab:

Untuk $k = -2$, maka P' ada disebelah kiri O dengan jarak skala 2.

a.

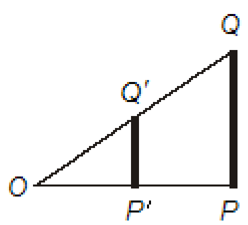


$OP' = 2\,OP$

$OQ' = 2\,OQ$

Hasil dilatasi PQ menurut $[0, -2]$ adalah garis $P'Q'$ dengan $P'Q' = 2\,PQ$.

b.



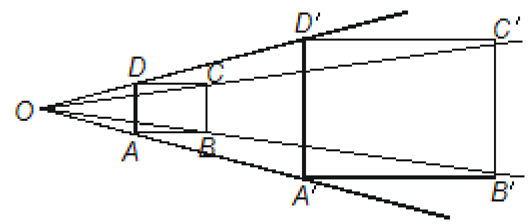
$OP' = \frac{1}{2}\,OP$

$OQ' = \frac{1}{2}\,OQ$

Hasil dilatasi OP menurut $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ adalah garis $P'Q'$ dengan $P'Q' = \frac{1}{2}\,PQ$.

c. Menggambar hasil dilatasi suatu bangun

Pada dasarnya dilatasi suatu bangun menurut $[0, k]$ adalah sejalan dengan dilatasi pada titik atau pada garis. Misalkan kita akan menentukan dilatasi persegi panjang $ABCD$ menurut $[0, k]$ dengan faktor skala $k = 2$, perhatikan gambar berikut:



Jadi, hasil dilatasi persegi panjang $ABCD$ menurut $[0, 2]$ adalah persegi panjang $A'B'C'D'$ dengan $A'B' = 2\,AB$; $B'C' = 2\,BC$; $C'D' = 2\,CD$ dan $A'D' = 2\,AD$.

Latihan 6

Kerjakan soal-soal berikut ini pada buku tugasmu!

1. Diketahui garis OP panjangnya 3 cm. Untuk tiap-tiap faktor skala k di bawah ini, tentukanlah titik P' sedemikian rupa sehingga $\overline{OP'} = k\,\overline{OP}$!

   a. $k = 2$ d. $k = -\frac{1}{2}$

   b. $k = 4$ e. $k = -\frac{3}{4}$

   c. $k = -2$ f. $k = 3$

2. Diketahui panjang ruas garis AB. Untuk suatu pembesaran yang berpusat di 0, diperoleh $A \to A'$ dan $B \to B'$. Tentukan faktor skala pembesaran tersebut agar keadaan berikut ini tercapai:

   a. $\overline{OA'} = 2\,\overline{OA}$ c. $\overline{OB'} = \frac{3}{4}\,\overline{OB}$

   b. $\overline{OA'} = \frac{4}{3}\,\overline{OA}$ d. $\overline{OA'} = -2\,\overline{AA'}$

3. Sebuah segitiga ABC dengan koordinat titik sudut: $A(-6, 0)$; $B(-3, 0)$, dan $C(6, 8)$. Gambarlah segitiga ABC dan segitiga $A'B'C'$ yang diperoleh dari segitiga ABC melalui dilatasi menurut $[0, -1]$ dan tentukan pula koordinat titik-titik sudutnya setelah dilatasi!

4. Bayangan titik $M(5, -8)$ oleh suatu dilatasi yang berpusat di $O(0, 0)$ adalah $M'(15, -24)$. Tentukan besarnya faktor skala dari dilatasi tersebut!

5. Titik $K'(-16, 8)$ adalah hasil dilatasi titik K dengan pusat di $O(0, 0)$ dan faktor skala $\frac{1}{2}$. Tentukan koordinat titik K!

Rangkuman

1. Unsur-unsur dalam bangun datar

   Titik adalah bangun yang tidak mempunyai dimensi. Titik diwujudkan dengan noktah (.) atau dengan silang(x).

   Garis lurus adalah bangun yang berdimensi satu, artinya suatu bangun yang mempunyai panjang saja. Bagian-bagian garis lurus ialah sebagai berikut.

2. *Bidang datar* adalah suatu bangun yang mempunyai dua dimensi. Artinya suatu bangun yang mempunyai panjang dan lebar atau merupakan daerah yang mempunyai luas.

   Bidang datar (disebut bidang) tidak terbatas luasnya, karena itu yang dapat digambar adalah wakilnya saja. Wakil untuk bidang biasanya dipilih gambar persegi panjang atau jajargenjang.

3. *Sudut* adalah bagian bidang yang dibatasi oleh dua sinar garis yang berpotongan di satu titik.

   Berdasarkan besarnya, sudut-sudut dikelompokkan sebagai berikut.

   a. sudut lancip

   b. sudut siku-siku

   c. sudut tumpul

   d. sudut lurus

4. Segitiga

   Pengertian segitiga ialah sebagai berikut.

   a. *Segitiga* adalah suatu bentuk bidang yang terjadi jika tiga titik yang tidak segaris dihubungkan satu sama lainnya.

   b. Garis-garis penghubung itu disebut *sisi-sisi segitiga*.

   c. Titik potong dua sisi disebut *titik sudut*.

   d. jumlah sudut dalam segitiga $180°$

   Jenis-jenis segitiga menurut sudutnya

   a. segitiga siku-siku

   b. segitiga tumpul

   c. segitiga lancip

5. Jenis-jenis segitiga menurut sisinya

   a. *segitiga sembarang* yaitu segitiga yang ketiga sisinya tidak sama panjang;

   b. *segitiga sama kaki* yaitu segitiga yang kedua sisinya sama panjang;

   c. *segitiga sama sisi* yaitu segitiga yang ketiga sisinya sama panjang.

6. Garis-garis istimewa pada segitiga

   Garis tinggi adalah garis yang ditarik dari titik-titik sudut segitiga, tegak lurus pada sisi di hadapan titik sudutnya. *Garis berat* adalah garis yang ditarik dari titik sudut segitiga ke pertengahan sisi di hadapannya. *Garis sumbu* adalah garis yang melalui titik tengah suatu sisi serta tegak lurus terhadap sisi itu. *Garis bagi* adalah garis yang membagi suatu sudut menjadi dua bagian sama besar.

7. *Persegi* adalah bangun datar yang mempunyai empat buah sisi sama panjang dan empat buah sudut sama besar.

8. *Persegi panjang* adalah bangun datar yang mempunyai empat buah sisi dan empat buah sudut sama besar

9. *Belah ketupat* adalah bangun datar yang mempunyai empat buah sisi sama panjang dan sisi-sisi berhadapan yang sejajar.

10. *Layang-layang* adalah bangun datar yang mempunyai empat buah sisi dengan empat sisi yang berdekatan sama panjang.

11. *Trapesium* adalah bangun datar yang dibatasi oleh dua garis sejajar dengan keempat sisi tidak sama panjang.

12. *Lingkaran* adalah bangun datar yang dibatasi oleh garis lengkung. Garis lengkung tersebut merupakan himpunan semua titik berjarak sama panjang terhadap titik tertentu.

    Tali busur adalah garis yang menghubungkan dua titik pada suatu lingkaran. *Busur* adalah garis lengkung yang membentuk lingkaran. *Juring* atau *sektor* adalah daerah yang dibatasi oleh dua jari-jari dan satu busur. Tembereng atau *segmen* adalah daerah yang dibatasi oleh tali busur dan busur lingkaran. Apotema adalah garis yang ditarik dari titik pusat lingkaran *O*, tegak lurus pada tali busur.

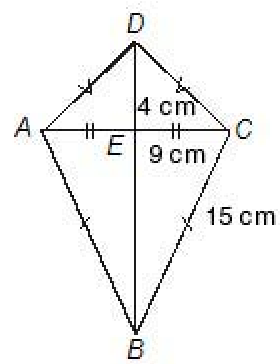
13. Suatu bangun pada sebuah bidang dapat dipindahkan dari tempat semula ke tempat lain dalam bidang tersebut dengan menggunakan transformasi. Jenis transformasi ada 4 (empat) macam, yaitu:
    1. *Refleksi* (pencerminan) adalah memindahkan sebuah objek materi pada bidang dengan cara dan rumus serta teori cermin datar. Hasil dari pencerminan tersebut memperoleh bayangan.
        a. Jarak benda semula sama dengan jarak bayangannya.
        b. Tinggi benda semula sama dengan tinggi bayangannya.
        c. Bangun benda semula sama dengan bangun bayangannya (kongruen).

       Sifat refleksi terhadap garis, yaitu :
        a. Jarak bangun semula sama dengan jarak bayangannya.
        b. Tinggi benda semula sama dengan tinggi bayangannya.
        c. Bangun semula dengan bayangannya sama dan sebangun (kongruen).
    2. *Translasi* ialah suatu perpindahan semua titik di dalam bidang yang bersangkutan sejauh jarak yang sama dan dalam arah yang sama.
    3. Suatu gerak dikatakan berotasi apabila setiap titik berpindah sepanjang busur lingkaran sejauh atau sebesar sudut tertentu. Pusat dari lingkaran disebut ***pusat putaran***. Arah putaran dikatakan *positif* apabila arah putaran berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam. Sebaliknya, arah putaran dikatakan *negatif* apabila arah putaran searah dengan arah jarum jam.
    4. *Dilatasi* atau disebut juga dengan perbesaran atau perkalian adalah suatu transformasi untuk mengubah bentuk bangun yang sebenarnya. Dilatasi ditentukan oleh titik pangkal dengan faktor skala dilatasi.

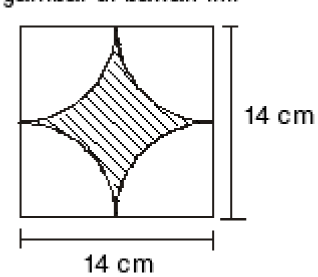
Evaluasi

A. Pilihlan jawaban yang paling tepat!

1. Bagian bidang yang dibatasi oleh dua buah sinar yang berpotongan disatu titik disebut ... .
   a. titik d. ruas garis
   b. garis e. sudut
   c. sinar
2. Sudut yang besarnya antara $90°$ dan $180°$ disebut sudut ... .
   a. lancip d. sudut lurus
   b. siku-siku e. pelurus
   c. tumpul
3. Jika dinyatakan dalam derajat 1 radian sama dengan ...
   a. $30°$ d. $63{,}5°$
   b. $57{,}3°$ e. $75{,}3°$
   c. $60°$
4. Jika dinyatakan dalam derajat $\frac{2}{3}\pi$ radian sama dengan ... .
   a. $60°$ d. $130°$
   b. $90°$ e. $150°$
   c. $120°$
5. Jika dinyatakan dalam radian $30°$ sama dengan ... .
   a. $\frac{1}{3}\pi$ radian d. $\frac{1}{8}\pi$ radian
   b. $\frac{1}{4}\pi$ radian e. $\frac{1}{9}\pi$ radian
   c. $\frac{1}{6}\pi$ radian
6. Sebuah ΔABC sama kaki dengan sisi AB = 6 cm dan $AC = BC$ = 5 cm, maka luas ΔABC adalah ...
   a. 12 cm^2 d. 32 cm^2
   b. 24 cm^2 e. 36 cm^2
   c. 30 cm^2
7. Sebuah ΔABC siku-siku di A dengan panjang sisi alas AB = 6 cm dan BC = 10 cm, maka keliling ΔABC sama dengan ... .
   a. 16 cm d. 36 cm
   b. 18 cm e. 48 cm
   c. 24 cm
8. Lihat gambar layang-layang di samping ini!
   Panjang BC = 15 cm, panjang CE = 9 cm, dan panjang DE = 4 cm. Maka luas layang-layang $ABCD$ adalah ... .

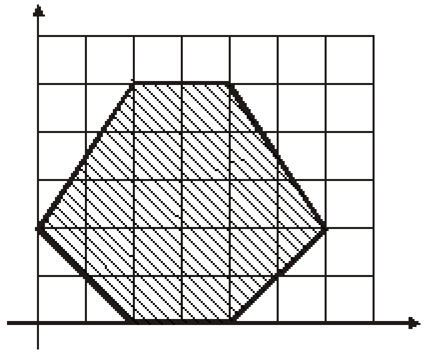


   a. 144 cm^2
   b. 225 cm^2
   d. 342 cm^2
   c. 288 cm^2
   e. 360 cm^2
9. Lihat gambar di bawah ini!



   Luas daerah yang diarsir sama dengan ... .
   ($\pi = \frac{22}{7}$)
   a. 28 cm^2 d. 196 cm^2
   b. 42 cm^2 e. 200 cm^2
   c. 154 cm^2

10. Lihat gambar di bawah ini!



Luas daerah yang diarsir sama dengan ... .
   a. 14 satuan persegi
   b. 16 satuan persegi
   c. 18 satuan persegi
   d. 20 satuan persegi
   e. 22 satuan persegi

11. Titik $P'(4, 6)$ adalah bayangan dari titik $P(6, 4)$ yang dicerminkan terhadap ... .
   a. sumbu X
   b. sumbu Y
   c. garis $y = x$
   d. garis $y = -x$
   e. titik asal O

12. Titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap garis $x = 2$ menghasilkan bayangan titik $A'(0, 2)$ maka $(a, b) =$ ... .
   a. $(2, -4)$
   b. $(0, -4)$
   c. $(2, 4)$
   d. $(4, 2)$
   e. $(0, -6)$

13. Bayangan titik $P(-2, 3)$ oleh dilatasi $[0, k]$ adalah $P'(4, -6)$, sehingga bayangan titik $Q(3, -2)$ oleh $[0, 4k]$ adalah ... .
   a. $Q'(-24, -16)$
   b. $Q'(-24, 16)$
   c. $Q'(12, -8)$
   d. $Q'(-12, 8)$
   e. $Q'(-6, 4)$

14. Diketahui titik $P(12, -5)$ dan $A(-2, 1)$. Bayangan titik P oleh dilatasi $\left[A, \frac{1}{2}\right]$ adalah ... .
   a. $P'(7, -2)$
   b. $P'(-5, -2)$
   c. $P'(5, -2)$
   d. $P'(5, 2)$
   e. $P'(3, -2)$

15. Diketahui titik $P(6, -8)$ dan $A(a, b)$. Bayangan titik P oleh dilatasi $[A, 2]$ adalah $P(8, -6)$. Nilai $a - b =$ ... .
   a. 4
   b. 6
   c. 10
   d. 14
   e. 18

16. Koordinat titik $P(-3, 6)$ dicerminkan terhadap garis $x = 5$, maka koordinat bayangannya adalah ... .
   a. $P'(2, 11)$
   b. $P'(2, 6)$
   c. $P'(13, 6)$
   d. $P'(8, 11)$
   e. $P'(11, 2)$

17. Bayangan titik $(4, -5)$ setelah dicerminkan terhadap garis $y = -1$ adalah ... .
   a. $(-6, -5)$
   b. $(-4, -5)$
   c. $(4, 4)$
   d. $(4, 3)$
   e. $(4, -4)$

18. Koordinat bayangan titik $A(-2, -3)$, bila dicerminkan terhadap garis $y = x$ adalah ... .
   a. $(2, 3)$
   b. $(-2, 3)$
   c. $(-3, -2)$
   d. $(3, 2)$
   e. $(3, -3)$

19. Koordinat bayangan titik $A(7, -8)$ yang dicerminkan terhadap sumbu Y, kemudian dicerminkan terhadap sumbu X adalah ... .
   a. $(7, 8)$
   b. $(-7, 8)$
   c. $(7, -8)$
   d. $(-7, -8)$
   e. $(8, -7)$

20. Titik $B(-4, 8)$ dicerminkan terhadap pusat koordinat menghasilkan bayangan $B'(x', y')$. Nilai $x' + y' =$ ... .

a. -12 d. 4
b. -8 e. 8
c. -4

21. Segitiga PQR sama kaki dengan $PQ = PR$. Jika pada pencerminan sehadap QR, $P \to P'$, maka bangun $PQP'R$ berbentuk ... .
a. layang-layang
b. jajargenjang
c. trapesium
d. belah ketupat
e. persegi

22. Jika titik $A(5, 6)$ ditranslasikan dengan $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, maka koordinatnya menjadi ... .
a. $(3, 5)$ d. $(7, 5)$
b. $(3, 7)$ e. $(5, 7)$
c. $(7, 7)$

23. Jika suatu translasi $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ dilanjutkan $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ menghasilkan $\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$, maka nilai a dan b adalah ... .
a. -7 dan 2 d. 7 dan 14
b. 3 dan 14 e. 7 dan -14
c. 3 dan 2

24. Titik $T(1, 3)$ ditranslasikan dengan $\begin{pmatrix}a\\5\end{pmatrix}$ dan diteruskan dengan $\begin{pmatrix}2\\b\end{pmatrix}$. Jika bayangannya $T'(4, 5)$, maka nilai a dan b adalah ... .
a. 1 dan -3 d. -1 dan -2
b. 1 dan 3 e. -1 dan 3
c. 1 dan 2

25. Oleh suatu translasi yang sama $A \to A'$ dan $B \to B'$. Koordinat titik $A(2, 3)$, $B(-3, -2)$, dan $A(5, 5)$. Koordinat titik B' adalah ... .
a. $(0, 0)$ d. $(2, 3)$
b. $(-1, 1)$ e. $(3, 5)$
c. $(-5, -5)$

26. Koordinat bayangan titik $(3, 4)$ pada translasi $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ dilanjutkan $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ adalah ... .
a. $(4, 8)$ d. $(3, 9)$
b. $(4, 7)$ e. $(2, 6)$
c. $(3, 8)$

27. Koordinat bayangan titik $P(2, 3)$ oleh translasi $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ yang dilanjutkan dengan $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ adalah $(4, 5)$. Nilai $a + b =$ ... .
a. -6 d. -3
b. -5 e. -2
c. -4

28. Diketahui persegi $ABCD$ diagonal AC dan BD berpotongan di titik E. Bayangan titik A oleh rotasi $-90°$ dengan pusat E adalah ... .
a. D d. B
b. C e. E
c. A

29. Koordinat bayangan titik $P(-5, 8)$ oleh rotasi $90°$ adalah ... .
a. $(5, 8)$ d. $(5, -8)$
b. $(-5, 8)$ e. $(-5, -8)$
c. $(8, 5)$

30. Titik $A(3, 4)$ oleh rotasi $180°$ menjadi A' dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = -x$, menjadi A''. Koordinat A' adalah ... .
a. $(3, 4)$ d. $(-4, -3)$
b. $(-3, -4)$ e. $(-4, 3)$
c. $(4, 3)$

31. Titik $B(-2, 6)$ dirotasikan $-90°$ dengan pusat $O(0, 0)$ dilanjutkan dengan translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh bayangan $B'(6, -2)$. Nilai ab = ...

    a. -4
    b. 0
    c. 1
    d. 2
    e. 3

32. Ditentukan $P'(4, -6)$ dan $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP'}$. Koordinat P adalah ... .

    a. $(2, -3)$
    b. $(2, 3)$
    c. $(3, 2)$
    d. $(-2, 3)$
    e. $(-2, -3)$

33. Bayangan titik P oleh dilatasi $[O, -2]$ adalah $(-4, 6)$. Koordinat titik P adalah ... .

    a. $(-8, 12)$
    b. $(-2, 3)$
    c. $(2, -3)$
    d. $(8, -12)$
    e. $(8, 12)$

34. Bayangan titik $P(8, -4)$ oleh dilatasi $[O, -2]$ adalah ... .

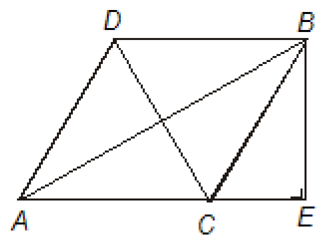
    a. $P'(-4, 2)$
    b. $P'(4, -2)$
    c. $P'(-16, 8)$
    d. $P'(16, -8)$
    e. $P'(16, 8)$

35. Koordinat titik sudut ΔPQR adalah $P(2, 1)$, $Q(5, -2)$, dan $R(7, 4)$. Bila ΔPQR mengalami dilatasi $[O, -3]$, maka koordinat bayangannya adalah ... .

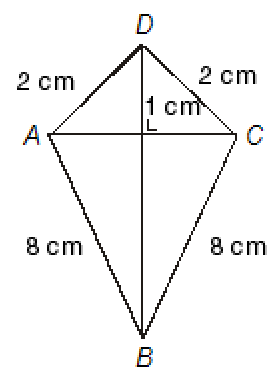
    a. $P'(-6, 3)$, $Q'(-15, -6)$, dan $R'(-21, -12)$
    b. $P'(6, 3)$, $Q'(15, -6)$, dan $R'(21, 12)$
    c. $P'(2, -3)$, $Q'(5, 6)$, dan $R'(7, -12)$
    d. $P'(-6, -3)$, $Q'(-15, 6)$, dan $R'(-12, -12)$
    e. $P'(16, 8)$, $Q'(15, 6)$, dan $R'(21, -12)$

B. Kerjakanlah soal-soal berikut ini!

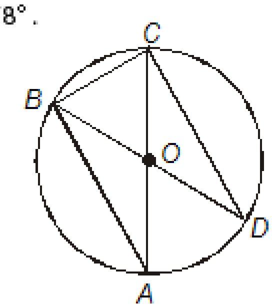
1. Diketahui ΔABC siku-siku di C. AD dan BE garis berat, $BC = AD = 4$ cm. Tentukan panjang BE!
2. Trapesium dengan sisi-sisi sejajar 12 cm dan 26 cm, panjang kaki-kakinya 13 cm dan 15 cm. Tentukan luas trapesium tersebut!s
3. Diketahui persegi panjang $ABCD$ dengan $AB = 2$ cm dan $BC = 1$ cm. Titik E pertengahan AB. DB dan CE berpotongan di M. Tentukan panjang DM!
4. Segitiga ABC siku-siku di A, $\angle B = 30°$, dan $BC = 6$ cm. Garis bagi $\angle C$ memotong AB di D. Tentukan panjang CD!
5. Pada gambar beriut ini, $AD = 15$ cm, $DC = 25$ cm, $DE = 34$ cm.



    Tentukan:
    a. panjang AC dan BD;
    b. luas $ABCD$!
6. Dari gambar di samping ini, tentukan panjang AC dan BD!



7. Gambar berikut ini adalah lingkaran dengan pusat di O dan $\angle BOC = 78°$.



    Tentukan:
    a. besar $\angle BDC$;
    b. besar $\angle DAB$!
8. Suatu segitiga sama sisi ABC memiliki lingkaran luar. Hitunglah jari-jari lingkaran luar ΔABC jika $AB = 20$ cm!

9. Nyatakan besar sudut berikut dalam satuan radian!
   a. $60°$
   b. $175°45'$
   c. $58°12'18''$
   d. $540°$
10. Nyatakan besar sudut berikut dalam satuan derajat!
    a. $2{,}5\pi$ radian
    b. $\frac{1}{3}\pi$ radian
    c. $0{,}64\pi$ radian
    d. $\frac{5}{6}\pi$ radian
11. Translasi $T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ memetakan titik $P(-5, -2)$ ke titiik $P'(-2, -1)$. Tentukan:
    a. Nilai x dan y
    b. Dengan menggunakan translasi T, tentukan bayangan dari jajargenjang $ABCD$, dengan $A(-2, 4)$, $B(0, 5)$, dan $C(3, 2)$!
12. Koordinat bayangan titik $P(5, -4)$ oleh translasi $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ adalah $P'(x', y')$. Tentukan nilai $x' + y'$!
13. Diketahui ΔPQR, dengan $P(2, 1)$, $Q(5, 3)$ dan $R(3, 4)$. Gambarkan bayangan ΔPQR dalam sebuah koordinat kartesius, jika masing-masing dicerminkan terhadap sumbu X dan sumbu Y!
14. Titik $A(-6, 8)$ diputar $60°$ berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam terhadap titik asal $O(0, 0)$. Tentukan bayangan titik A oleh rotasi itu!
15. Titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap garis $x = 2$ menghasilkan bayangan titik $A'(0, 2)$. Tentukan harga a dan b!

Soal Akhir Buku

A. Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Jika diketahui daerah asal suatu fungsi {2, 4, 6, 8, 10} dan F adalah suatu fungsi dengan aturan $f(x) = x^2 + 7$ maka daerah hasil dari fungsi itu adalah ... .
   a. {11, 23, 43, 71, 107}
   b. {12, 23, 42, 73, 103}
   c. {13, 24, 46, 71, 107}
   d. {11, 24, 46, 73, 103}
   e. {11, 25, 56, 71, 107}

2. Diketahui suatu fungsi $f(x) = x^2 - 2x + 8$ maka nilai dari $f(2+h)$ adalah ... .
   a. $h^2 - 2h + 8$
   b. $h^2 + 2h + 8$
   c. $h^2 + 2h - 8$
   d. $h^2 + h - 8$
   e. $h^2 + 6h + 8$

3. Sebuah segitiga mempunyai tiga titik sudut yaitu $A(-3,-3)$, $B(4,-3)$, dan $C(4,3)$. Panjang sisi BC adalah ... .
   a. 5 satuan
   b. 4 satuan
   c. 3 satuan
   d. 2 satuan
   e. 1 satuan

4. Persamaan sebuah garis yang melalui titik $A(2,5)$ dan tegak lurus dengan garis $y = 2x - 7$ adalah ... .
   a. $y = 2x + 6$
   b. $y = \frac{1}{2}x + 6$
   c. $y = -\frac{1}{2}x + 6$
   d. $y = -2x - 6$
   e. $y = 2x - 6$

5. Persamaan parabola yang mempunyai titik puncak $(1,-2)$ dan memotong sumbu X di titik $(-1,0)$ adalah ... .
   a. $y = 2x^2 - 4x - 2$
   b. $y = -2x^2 - 4x - 2$
   c. $y = -2x^2 + 4x - 2$
   d. $y = -2x^2 - 4x + 2$
   e. $y = 2x^2 - 4x + 2$

6. Nilai ekstrim dari parabola $y = x^2 - 3x - 9$ adalah ... .
   a. $y_E = 11\frac{1}{4}$
   b. $y_E = -12\frac{1}{4}$
   c. $y_E = 12\frac{1}{4}$
   d. $y_E = -11\frac{1}{4}$
   e. $y_E = -13\frac{1}{4}$

7. Diketahui fungsi perminataan dan fungsi penawaran masing-masing adalah $D: 2p + 3q = 24$ dan $S: p = q + 8$. Nilai q dan p adalah ...
   a. $q = 9$ dan $p = 1$
   b. $q = 2$ dan $p = 8$
   c. $q = 1$ dan $p = 9$
   d. $q = 1$ dan $p = 8$
   e. $q = 2$ dan $p = 9$

8. Sebuah toko sepatu menjual sepasang sepatu dengan harga Rp 35.000,00. Jumlah yang ditawarkan habis terjual 30 pasang per hari. Pada saat harga Rp 30.000,00, sepatu yang terjual habis 40 pasang per hari. Fungsi penawaran dari sepatu tersebut adalah ...
   a. $p = -500q + 50.000$
   b. $p = 500q + 50.000$
   c. $p = 500q - 50.000$
   d. $p = 500q + 45.000$
   e. $p = -500q + 30.000$

9. Biaya tetap pembuatan meja belajar suatu perusahaan ditentukan oleh $y_c = 2.000x +$

960.000. Jika meja belajar dijual dengan harga 100.000,00 per unit, maka titik pulang pokok terjadi pada penjualan ... unit

a. 5
b. 6
c. 7
d. 8
e. 9

10. Fungsi penawaran dan permintaan terhadap satu jenis barang: $S : p_S = 3q_S + 2$ dan $D : p_D = -5q_D + 67$. Titik keseimbangan barang tersebut adalah ... .

a. (42, 5)
b. (5, 42)
c. (24, 10)
d. (10, 24)
e. (8, 32)

11. Ingkaran dari kalimat "Tiada pemain basket yang tidak berbadan tinggi" adalah ... .

a. Beberapa pemain basket berbadan tinggi
b. Tidak ada pemain basket yang berbadan tinggi
c. Semua pemain basket berbadan tinggi
d. Tidak ada pemain basket yang berbadan pendek
e. Beberapa pemain basket berbadan pendek

12. Berikut ini pernyataan yang bukan merupakan tautologi adalah ... .

a. $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (p \vee q)$
b. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
c. $(p \wedge \sim r) \Rightarrow (p \vee q)$
d. $(\sim p \vee \sim q) \vee r$
e. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

13. Kontraposisi dari $(p \wedge q) \Rightarrow (q \vee p)$ adalah ... .

a. $(q \vee p) \Rightarrow (p \wedge q)$
b. $\sim(q \vee p) \Rightarrow \sim(p \wedge q)$
c. $(q \vee p) \Rightarrow \sim(p \wedge q)$
d. $\sim(q \vee p) \Rightarrow (p \wedge q)$
e. $(q \vee p) \Rightarrow \sim(p \vee q)$

14. Konvers dari kalimat "Jika harga minyak naik maka harga barang naik" dapat dilambangkan dengan ... .

a. Jika harga barang naik maka harga minyak naik
b. Jika harga barang tidak naik maka harga minyak tidak naik
c. Jika harga barang tidak naik maka harga minyak naik
d. Jika harga barang naik maka harga minyak tidak naik
e. Jika harga minyak tidak naik maka harga barang naik

15. Diketahui argumentasi:

p : Jika diterima di universitas negeri maka tergolong anak yang pandai.

q : Ari tidak pandai.

Kesimpulan : Ari tidak diterima di universitas negeri.

Penarikan kesimpulan di atas disebut ... .

a. modus ponens
b. modus tollens
c. silogisme
d. konvers
e. kontraposisi

16. Notasi sigma untuk jumlah $3 + 9 + 27 + \ldots + 729$ adalah ... .

a. $\sum_{k=1}^{6} 3^{k-1}$
b. $3\sum_{k=1}^{6} k$
c. $\sum_{k=2}^{7} 3^{k-1}$
d. $\sum_{k=2}^{6} 3^{k}$
e. $\sum_{k=3}^{6} 3^{k-1}$

17. Banyaknya suku suatu deret aritmetika adalah 15, suku terakhir adalah 47 dan jumlah deret sama dengan 285. Suku pertama deret ini adalah ... .

a. –9
b. –5
c. 0
d. 3
e. 5

18. Jumlah n suku yang pertama suatu deret aritmetika $S_n = \frac{n}{2}(3n - 17)$, maka suku kesepuluh adalah ... .

a. 50
b. 45
c. 30
d. 25
e. 20

19. Penduduk suatu desa yang pada tahun 1981 berjumlah 10.000, tiap tahun bertambah dengan sepertiga dari jumlah tahun sebelumnya. Pada tahun 1984 jumlahnya kira-kira akan menjadi ... .

a. 19.999 d. 23.700

b. 20.000 e. 31.000

c. 23.333

20. Suku pertama dari suatu barisan geometri adalah 25 dan suku kesembilan adalah 6400. Suku kelima dari barisan ini adalah ... .

a. 2500 d. 200

b. 1600 e. 100

c. 400

21. Satu jenis bakteri setelah satu detik akan membelah diri menjadi dua. Jika pada saat permulaan ada 5 bakteri, setelah ... detik banyak bakteri menjadi 320.

a. 7 detik d. 10 detik

b. 8 detik e. 11 detik

c. 9 detik

22. Suku pertama dan rasio suatu barisan geometri berturut-turut adalah 2 dan 3. Jika jumlah n suku pertama deret tersebut adalah 8, banyak suku dari barisan itu adalah ... .

a. 27 d. 4

b. 16 e. 2

c. 9

23. Diketahui deret aritmetika dengan jumlah n suku pertamanya $S_n = 4n^2 + 5n$, maka suku kesebelas adalah... .

a. 439 d. 639

b. 479 e. 670

c. 539

24. Diketahui deret geometri dengan suku ke-n adalah $U_n = 4 \cdot (2)^{n-2}$, maka jumlah lima suku pertama adalah ... .

a. 62 d. 102

b. 84 e. 114

c. 96

25. Jika b, n, dan S berturut-turut adalah beda, banyaknya suku dan jumlah n suku pertama dari deret hitung, maka suku pertama dapat dinyatakan dalam b, n, dan S sebagai ... .

a. $a = \frac{S}{n} + \frac{1}{2}(n-1)b$

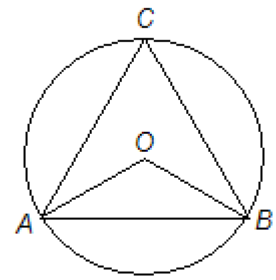
b. $a = \frac{S}{n} - \frac{1}{2}(n+1)b$

c. $a = \frac{S}{n} - \frac{1}{2}(n-1)b$

d. $a = \frac{2S}{n} - \frac{1}{2}(n-1)b$

e. $a = \frac{2S}{n} - \frac{1}{2}(n+1)b$

26. Perhatikan gambar di bawah ini!



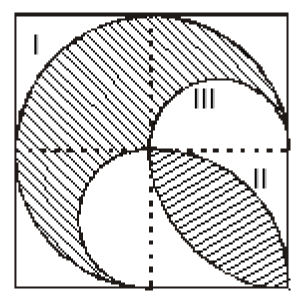
Besar sudut $ACB = 50°$ dan panjang $\overline{AB} = \overline{BC}$. Besar sudut OBC adalah ... .

a. 25° d. 65°

b. 40° e. 130°

c. 50°

27. Keliling daerah yang diarsir pada gambar di bawah adalah ... .



a. $38\frac{1}{2}$ cm

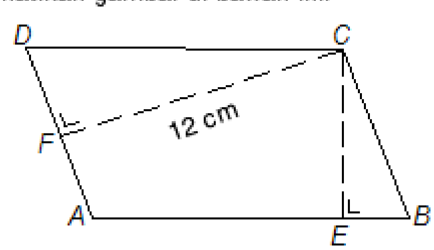
b. 77 cm

c. $115\frac{1}{2}$ cm

d. 154 cm

e. 221 cm

28. Perhatikan gambar di bawah ini!



Jajargenjang $ABCD$ dengan panjang AB = 14 cm dan CF = 12 cm. Jika panjang $CE : CF = 2 : 3$ maka luas jajargenjang $ABCD$ adalah ... .

a. 112 cm^2 d. 224 cm^2

b. 126 cm^2 e. 252 cm^2

c. 168 cm^2

B. Kerjakanlah soal-soal berikut ini pada tempat yang sudah disediakan!

1. Carilah nilai x agar tiap kalimat berikut menjadi disjungsi yang benar!

   a. $3x - 2 = x + 4$ atau 3 bilangan komposit.

   b. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$ atau ${}^2\log 3 = \frac{1}{{}^3\log 2}$

   c. $x^2 + 2x - 6 < x - 26$ atau

   $\sin 300° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

   d. 5 bilangan ganjil atau $x^2 - 25 = 0$

2. Diketahui premis-premis sebagai berikut:

   Jika Sinta sakit maka badannya lemah.

   Jika badan Sinta lemah maka ia pergi ke dokter.

   Sinta tidak pergi ke dokter.

   Jika premis-premis di atas bernilai benar. Tentukan kesimpulan yang dapat diambil!

3. Buktikan ekuivalensi berikut!

   a. $(p \vee q) \equiv (q \wedge p)$
   b. $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$
   c. $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

4. Untuk $f(x) = 2x^2 - 1$ cari dan sederhanakan $\frac{[f(a+h) - f(a)]}{h}$!

5. Carilah nilai ekstrim dari parabola $y = x^2 - 6x + 4$, kemudian gambarlah grafiknya!

6. Diketahui suatu persamaan kuadrat $y = (a - 2)x^2 + (3a - 4)x - 10$ mempunyai sumbu simetri -2. Carilah titik potong terhadap sumbu X!

7. Sebuah toko alat tulis mempunyai persediaan buku 15 buah dengan harga Rp2.000,00 per buah, tetapi persediaan akan naik 5 buah hingga harga mencapai Rp 1.800,00 per buah.

   a. Tentukan jenis fungsi yang berlaku!
   b. Tentukan fungsi tersebut bila dianggap linear!
   c. Gambarlah grafiknya!
   d. Tentukan harga tertinggi!
   e. Berapa banyaknya barang jika barang tersebut merupakan barang bebas di pasaran!

8. Fungsi permintaan dan penawaran suatu barang didefinisikan dengan D : $p = 100 - 5q$ dan S : $p = 3q + 20$. Bila dikenakan pajak sebesar 2% per unit, tentukan besarnya pajak yang diterima pemerintah!

9. Setiap 10 tahun jumlah penduduk sebuah kota bertambah menjadi dua kali lipat jumlah semula. Menurut taksiran, pada tahun 2010 nanti jumlah penduduk kota tersebut akan mencapai 3,2 juta orang. Tentukan jumlah penduduk kota itu pada tahun 1980!

10. Suku ketiga dari suatu deret geometri adalah 12, sedang suku kelimanya 3. Jika rasionya bilangan positif, tentukan:

    a. rumus umum suku ke-n;
    b. suku kedelapan;
    c. jumlah sampai tak berhingga suku

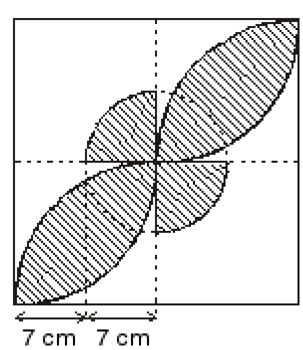
11. Suatu barisan geometri mempunyai rumus suku ke-n, yaitu $U_n = 3(-2)^{n-1}$, Carilah suku pertama dan rasio barisan itu!

12. Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika adalah $S_n = 2n^2 - 5n + 7$. tentukan:

    a. rumus suku ke-n;
    b. beda barisan tersebut;
    c. suku ke-4 barisan tersebut!

13. Jumlah sampai suku ke-n suatu deret geome adalah S_n. Jika S_n = 150, S_{n+1} = 160, d S_{n+2} = 165, tentukan rasio deret tersebut!

14. Tentukan luas daerah yang diarsir pada gamb di bawah ini!



Daftar Pustaka

Anonim. 1989. *Ensiklopedi Nasional Indonesia Jilid 5*. Jakarta: PT Cipta Adi Pustaka.

Anonim. 1993. *The Encyclopedia Americana International Edition*. U.S.A: Grolier Incorporated.

Brown, Richard G. 1970. *Basic Algebra*. New York: Mc Graw-Hill.

Campbell, H.G. dan R.E. Spencer. 1974. *Finite Mathematic*. New York: Mac Millan.

Edwin, I. Stein. 1971. *Modern Algebra*. Second Book. New York: American.

Frank, Ayres JR. 1967. *Theory and Problem Calculus*. New York: Mc Graw-Hill.

Hardy, G.H. dan E.M. 1981. Wright. *An Introduction to Theory of Numbers*. Edisi kelima. London: Oxford.

Kline - Oestertle - Wilson. 1975. *Foundation of Advanced Mathematics*. New York: American.

Lipshutz, S. 1980. Schaum's outline series: *Finite Mathematics*. New York: Mc Graw-Hill.

-----------------. 1964, Schaum's outline series: *Theory and Problem of Set Theory and Related Topics*. New York: Mc Graw-Hill.

Maddala, G.S. 1977. *Econometrics*. Tokyo: Mc Graw-Hill Kogakusha.

Nababan, M. 1993. *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Erlangga.

Negoro, S.T. dan B. Harahap. 2001. *Ensiklopedi Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Nielsen, K.L. 1970. *Modern Algebra*. New York: Barnes and Noble.

Silverman, R.A. 1977. *Essential Calculus With Application*. Philadelphia: W.B. Saunders Company.

Surbakti, B.M. 1990. *Matematika Bisnis dan Ekonomi*. Jakarta: Kasaint Blanc Indah.

Tim Matematika SMK. 2005. *Matematika SMK 1,2*. Jakarta: PT Galaxy Puspa Mega.

Tim Matematika SMA. 2004. *Matematika 3 IPS Untuk SMA Kelas XII*. Jakarta: PT Galaxy Puspa Mega.

Glosarium

Akumulasi	:	tambahan secara berkala atas suatu jumlah pokok, misalnya: laba atas modal atau cadangan, bunga atas simpanan atau utang pokok, dan sebagainya.
Apotema	:	garis yang ditarik dari titik pusat lingkaran tegak lurus pada tali busur.
Argumentasi	:	penarikan kesimpulan dari beberapa pernyataan benar yang diketahui (premis).
Barisan bilangan	:	urutan bilangan yang memiliki aturan atau pola bilangan.
Belah ketupat	:	bangun datar yang mempunyai empat buah sisi sama panjang dan sisi-sisi berhadapan yang sejajar.
Biaya variabel	:	biaya yang bergantung pada tingkat produksi. Contohnya, biaya upah dan biaya bahan.
Biaya tetap	:	biaya yang harus ada atau dikenakan, tidak bergantung pada besar atau kecilnya jumlah barang yang diproduksi. Contohnya, gaji pegawai.
Bidang datar	:	suatu bangun yang mempunyai dua dimensi. Artinya suatu bangun yang mempunyai panjang dan lebar atau merupakan daerah yang mempunyai luas.
Biimplikasi	:	dua buah pernyataan p dan q dengan menggunakan kata penghubung “jika dan hanya jika”.
Busur	:	garis lengkung yang membentuk lingkaran.
Dasar empiris	:	berdasarkan fakta yang kita jumpai sehari-hari.
Dasar tak empiris	:	berdasarkan bukti-bukti atau perhitungan-perhitungan dalam matematika.
Deret	:	suku-suku suatu barisan bilangan yang dijumlahkan.
Deret aritmetika	:	penjumlahan suku-suku pada barisan aritmetika.
Deret geometri	:	penjumlahan suku-suku dari barisan geometri.
Diagram panah	:	diagram yang melukiskan hubungan antara bilangan-bilangan dan juga melambangkan relasi himpunan.
Dilatasi	:	suatu transformasi untuk mengubah bentuk bangun yang sebenarnya.
Eliminasi	:	penyisihan/pengeluaran.
Fungsi penawaran	:	merupakan hubungan antara peubah (variabel) harga (p) dan peubah (variabel) jumlah barang atau jasa (q) yang ditawarkan.
Fungsi permintaan	:	merupakan hubungan antara peubah harga (p) dan peubah jumlah barang atau jasa (q) yang diminta.
Garis bagi	:	garis yang membagi suatu sudut menjadi dua bagian sama besar.
Garis berat	:	garis yang ditarik dari titik sudut segitiga ke pertengahan sisi di hadapannya.
Garis lurus	:	bangun yang berdimensi satu, artinya suatu bangun yang mempunyai panjang saja.
Garis sumbu	:	garis yang melalui titik tengah suatu sisi serta tegak lurus terhadap sisi itu.

Garis tinggi	:	garis yang ditarik dari titik-titik sudut segitiga, tegak lurus pada sisi di hadapan titik sudutnya.
Gradien	:	disebut juga koefisien arah suatu garis, yaitu komponen *y* dibagi dengan komponen *x*.
Implikasi	:	pernyataan majemuk yang disusun dari dua buah pernyataan p dan q dalam bentuk "jika p maka q".
Jarak	:	panjang suatu segmen garis penghubung yang terpendek.
Juring	:	daerah yang dibatasi oleh dua jari-jari dan satu busur.
Kalimat terbuka	:	kalimat yang masih mengandung peubah atau variabel, sehingga belum dapat ditentukan benar atau salah.
Konjungsi	:	pernyataan majemuk yang dibentuk dari pernyataan p dan q dengan menggunakan kata penghubung "dan".
Koordinat	:	bilangan yang digunakan untuk menunjuk lokasi titik dalam garis, permukaan, atau ruang.
Kuadran	:	daerah-daerah koordinat atau bidang koordinat yang terbagi dari sumbu-sumbu koordinat.
Kurva penawaran	:	hubungan antara jumlah barang yang ditawarkan pada berbagai tingkat harga dapat digambarkan dalam suatu grafik.
Layang-layang	:	bangun datar yang mempunyai empat buah sisi dengan empat sisi yang berdekatan sama panjang.
Lingkaran	:	bangun datar yang dibatasi oleh garis lengkung. Garis lengkung tersebut merupakan himpunan semua titik berjarak sama panjang terhadap titik tertentu.
Nilai ekstrim	:	adalah nilai tertinggi (maksimum) atau nilai terendah (minimum) yang dicapai oleh suatu fungsi.
Notasi	:	cara menuliskan atau melambangkan.
ONH	:	singkatan dari ongkos naik haji, yaitu setoran kepada bank dari atau atas nama calon haji, sebagai pembayaran biaya menunaikan ibadah haji.
Parabola	:	grafik dari fungsi kuadrat membentuk suatu lengkungan teratur yang disebut Karena itu, fungsi kuadrat disebut juga persamaan parabola.
Pernyataan	:	kalimat yang hanya benar saja atau salah saja, tetapi tidak sekaligus benar dan salah.
Pernyataan majemuk	:	adalah pernyataan baru yang dibentuk dari beberapa pernyataan tunggal dengan menggunakan kata penghubung.
Persegi	:	bangun datar yang mempunyai empat buah sisi sama panjang dan empat buah sudut sama besar.
Persegi panjang	:	bangun datar yang mempunyai empat buah sisi dan empat buah sudut sama besar.
Pola bilangan	:	cara menetapkan aturan atau ketentuan-ketentuan tertentu, sehingga dapat membentuk sebuah barisan bilangan.
Pusat putaran	:	pusat dari lingkaran.
Range	:	daerah hasil dari suatu fungsi.
Refleksi	:	memindahkan sebuah objek materi pada bidang dengan cara dan rumus serta teori cermin datar.
Relasi	:	hubungan atau pasangan tertentu antara dua buah himpunan yang bisa dinyatakan dalam suatu diagram, baik diagram panah maupun diagram Cartesius.
Segitiga	:	suatu bentuk bidang yang terjadi jika tiga titik yang tidak segaris dihubungkan satu sama lainnya.

Subsidi	:	merupakan bantuan pemerintah terhadap produsen, sehingga produsen tersebut dapat meningkatkan jumlah produksi barangnya dan harga barang tersebut menurun.
Substitusi	:	penggantian.
Sudut	:	bagian bidang yang dibatasi oleh dua sinar garis yang berpotongan di satu titik.
Sumbu simetri	:	suatu sumbu yang dipakai untuk membagi suatu bangun menjadi dua bagian yang sama dan sebangun.
Tali busur	:	garis yang menghubungkan dua titik pada suatu lingkaran.
Tembereng	:	daerah yang dibatasi oleh tali busur dan busur lingkaran.
Titik	:	bangun yang tidak mempunyai dimensi.
Titik balik	:	titik paling bawah atau paling atas dari suatu parabola.
Titik potong	:	suatu titik yang dilalui dua buah garis yang saling berpotongan.
Titik puncak	:	titik tempat terjadinya perubahan nilai fungsi, dari turun menjadi naik atau dari naik menjadi turun.
Translasi	:	suatu perpindahan semua titik di dalam bidang yang bersangkutan sejauh jarak yang sama dan dalam arah yang sama.
Trapesium	:	bangun datar yang dibatasi oleh dua garis sejajar dengan keempat sisi tidak sama panjang.
Variabel	:	peubah; sesuatu yang dapat berubah.
Verbal	:	secara lisan (bukan tertulis).
Verteks	:	titik puncak.

Indeks

ISBN 979-462-885-9

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008 tanggal 10 Juli tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran

HET(Harga Eceran Tertinggi) Rp. 17.163,-