Siswanto - Umi Supraptinah

BUKU SEKOLAH bse ELEKTRONIK

Matematika Inovatif 3

Konsep dan Aplikasinya

untuk Kelas XII SMA dan MA
Program Ilmu Pengetahuan Sosial

$U_n = S_n - S_{n-1}$

TUT WURI HANDAYANI
PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Matematika Inovatif Konsep dan Aplikasinya 3 untuk Kelas XII SMA dan MA Program Ilmu Pengetahuan Sosial

Siswanto - Umi Supraptinah

MATEMATIKA INOVATIF 3

Konsep dan Aplikasinya

untuk Kelas XII SMA dan MA

Program Ilmu Pengetahuan Sosial

Siswanto
Umi Supraptinah

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Matematika Inovatif 3

Konsep dan Aplikasinya

untuk SMA dan MA Kelas XII
Program Ilmu Pengetahuan Sosial

Penulis	: Siswanto
	Umi Supraptinah
Editor	: Suwardi
Desain kulit	: Agung Wibawanto
Desain tata letak isi	: Agung Wibawanto
Penata letak isi	: Mulyadi
Ilustrator	: Sartana
Ukuran Buku	: 17,6 x 25,0 cm

510.07
SIS SISWANTO
m Matematika Inovatif 3 : Konsep dan Aplikasinya untuk Kelas XII SMA dan MA Program Ilmu Pengetahuan Sosial / penulis, Siswanto, Umi Supraptinah ; editor, Suwardi ; ilustrator, Sartana. — Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2009.
vi, 190 hlm, : ilus. ; 25 cm

Bibliografi : hlm. 177-178
Indeks : hlm. 188
ISBN 978-979-068-864-3 (no. jilid lengkap)
ISBN 978-979-068-868-1

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Umi Supraptinah III. Suwardi IV. Sartana

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2009.

Diperbanyak oleh . . .

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2009, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 81 Tahun 2008 Tanggal 11 Desember 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*download*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juni 2009
Kepala Pusat Perbukuan

Prakata

Selamat, kalian telah naik ke kelas XII Program Ilmu Pengetahuan Sosial (IPS). Tentunya hal ini menjadi kebanggaan tersendiri bagi kalian. Semoga kalian terpacu untuk berpikir lebih dewasa lagi. Meskipun sudah naik ke kelas XII, kalian tidak boleh lupa. Ingat, tantangan yang akan kalian hadapi di kelas ini tidaklah ringan. Kalian harus betul-betul semangat dalam menggapai apa yang kalian cita-citakan. Untuk itu, kalian harus terus rajin belajar, gigih, dan pantang menyerah. Buku ini akan setia membantu kalian dalam menggapai cita-cita.

Buku ini disusun dengan urutan penyajian sedemikian rupa sehingga kalian akan merasa senang untuk mendalaminya. Dalam pembelajarannya, buku ini menuntut kalian untuk aktif dan bertindak sebagai subjek pembelajaran. Kalian dituntut untuk mengonstruksi, mengeksplorasi, dan menemukan sendiri konsep-konsep matematika sehingga kalian akan menjadi orang yang betul-betul kompeten secara matang, khususnya di bidang matematika.

Di kelas XII Program IPS ini, kalian akan mempelajari materi-materi berikut:

- Integral
- Program Linear
- Matriks
- Barisan dan Deret

Penulis berharap semoga buku ini dapat membantu kalian dalam mempelajari konsep-konsep matematika. Akhirnya, semoga kalian berhasil dan sukses.

Solo, Februari 2008

Penulis

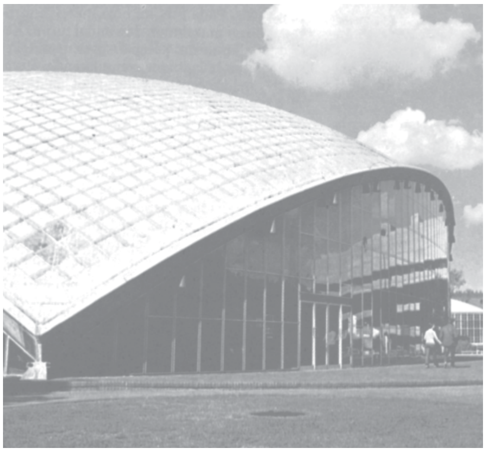
Daftar Isi

Semester 2

Bab IV Barisan dan Deret

Bab 1

Integral



Sumber: *Ilmu Pengetahuan Populer 2,* 1999

Motivasi

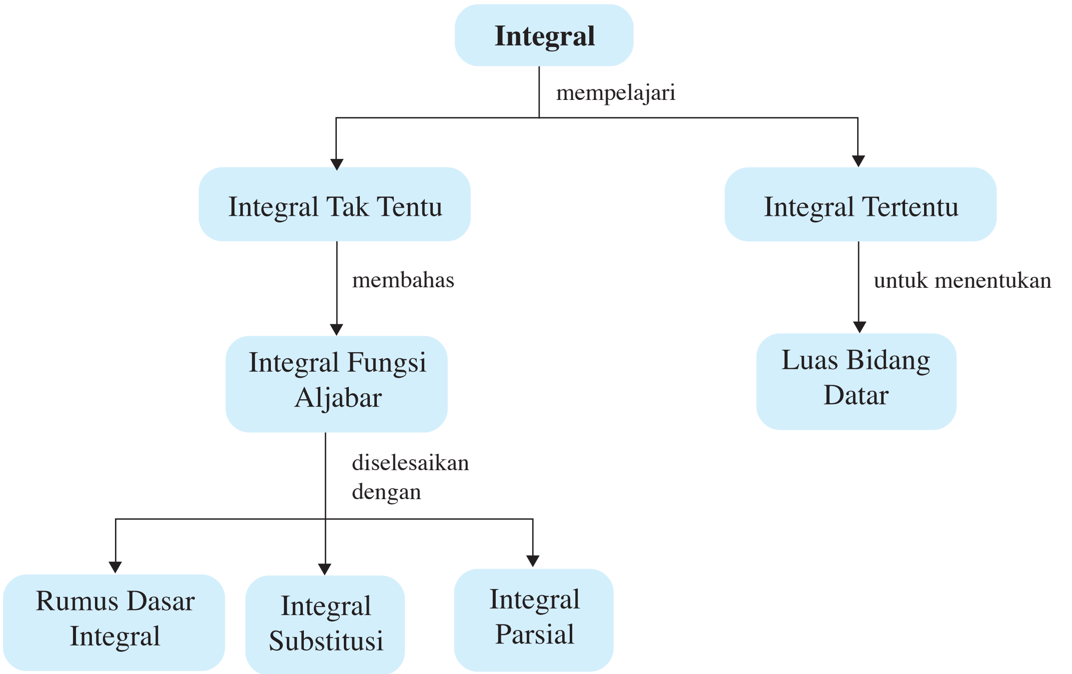
Apabila suatu laju perubahan fisik dinyatakan dalam sebuah grafik, luas bidang di bawah lengkungan grafik mempunyai arti khas. Luas itu menyatakan keseluruhan nilai yang berada di antara grafik dan sumbu mendatar tepat di bawah grafik. Luas bidang di bawah lengkungan itu tidak dapat ditentukan dengan metode aljabar, tetapi dapat ditentukan dengan integral tertentu. Teknik untuk menentukan luas bidang di bawah lengkungan itu disebut *pengintegralan*.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

1. merancang aturan integral tak tentu dari aturan turunan;
2. menghitung integral tak tentu dari fungsi aljabar;
3. menjelaskan integral tentu sebagai luas daerah di bidang datar;
4. menghitung integral tentu dengan menggunakan integral tak tentu;
5. menghitung integral dengan rumus integral substitusi;
6. menggambarkan suatu daerah yang dibatasi oleh beberapa kurva;
7. merumuskan integral tentu untuk luas suatu daerah;
8. menghitung integral yang yang menyatakan luas suatu daerah.

Peta Konsep



Kata Kunci

- batas atas
- batas bawah
- diferensial
- diferensiabel
- fungsi primitif
- integral
- integral parsial
- integral tak tentu
- integral tertentu
- integran
- persamaan keluarga kurva

Pembahasan mengenai kalkulus integral erat kaitannya dengan kalkulus diferensial. Walaupun secara historis kalkulus integral lebih dahulu ditemukan, dalam mempelajari kalkulus terasa lebih mudah jika dimulai dengan mempelajari kalkulus diferensial, kemudian kalkulus integral. Materi tentang hitung diferensial pernah kalian pelajari di kelas XI. Demikian pula dengan materi limit. Pemahaman yang baik tentang materi-materi tersebut akan sangat membantu dalam mempelajari pokok bahasan ini.

Secara umum, integral dapat diartikan dalam dua macam. Kedua arti integral itu adalah sebagai berikut.

a. Secara aljabar, integral merupakan invers operasi pendiferensialan. Coba ingat kembali, apa diferensial itu?
b. Secara geometri, integral menunjukkan luas suatu daerah.

Kedua pengertian di atas akan kita pelajari dalam pembahasan integral berikut ini. Pembahasan itu, antara lain pengertian integral, integral tak tentu, integral tertentu, dan beberapa penggunaan integral.

Sebelum mempelajari bab ini, jawablah soal-soal berikut.

Uji Prasyarat — *Kerjakan di buku tugas*

1. Diketahui $f(x) = 2x^2 - 9x$.
   Tentukan $f'(x)$.
2. Sebutkan suatu fungsi yang turunannya adalah fungsi $f'(x) = 3x$. Ada berapa fungsi?
3. Gambarlah kurva $f(x) = 2x^2$ dan $f(x) = 3x + 1$ dalam satu koordinat Cartesius. Kemudian, arsirlah daerah yang berada di antara kedua kurva itu.

Setelah kalian mampu menjawab soal-soal di atas, mari lanjutkan ke materi berikut.

A. Pengertian Integral sebagai Invers Diferensial

Misalkan f adalah fungsi turunan dari fungsi F yang kontinu pada suatu domain. Untuk setiap x terletak pada domain tersebut, berlaku

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Pengertian ini telah kita pelajari pada kalkulus diferensial. Misalnya, jika

$F(x) = x^2$ maka $F'(x) = f(x) = 2x$
$F(x) = x^2 - 4$ maka $F'(x) = f(x) = 2x$
$F(x) = x^2 + \sqrt{2}$ maka $F'(x) = f(x) = 2x$
$F(x) = x^2 + c$ maka $F'(x) = f(x) = 2x$ (c adalah suatu konstanta)

Dari kenyataan tersebut, timbul pertanyaan bagaimanakah menentukan fungsi F sedemikian rupa sehingga untuk setiap x anggota domain F, berlaku $F'(x) = f(x)$?

Suatu operasi yang digunakan untuk menentukan fungsi F merupakan invers dari operasi derivatif. Invers dari operasi derivatif disebut *integral*. Integral disebut juga antiderivatif atau antiturunan. Pada contoh di atas, jika $F(x)$ adalah integral dari $f(x) = 2x$, maka $F(x) = x^2 + c$, dengan c suatu konstanta real.

B. Integral Tak Tentu

1. Pengertian Integral Tak Tentu

Integral fungsi $f(x)$ ditulis dengan notasi $\int f(x)\,dx$, yaitu operasi yang digunakan untuk menentukan fungsi F sedemikian rupa sehingga dipenuhi $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$, untuk setiap x pada domainnya. Perhatikan kembali subbab A. Pada pembahasan itu dijelaskan berapapun nilai suatu konstanta, maka turunannya adalah nol (0). Oleh karena itu, integral dari fungsi $f(x)$ adalah $F(x)$ ditambah dengan sebarang konstanta, yaitu $F(x) + c$. Misalnya, untuk $F(x) = x^2 + 2$, maka turunannya $F'(x) = f(x) = 2x$. Adapun antiturunan dari $2x$ kemungkinan $F(x) = x^2 + 2$ atau $F(x) = x^2 + 5$ atau $F(x) = x^2 - \log 2$. Konstanta seperti 2, 5, dan $-\log 2$ dapat dinyatakan sebagai c.

Dengan demikian, diperoleh hubungan

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

dengan $\int f(x)\,dx$ = notasi dari integral tak tentu

$F(x) + c$ = fungsi antiturunan atau *fungsi primitif*

$f(x)$ = fungsi integran (fungsi yang dicari antiturunannya)

c = konstanta

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Hasil dari

$\int (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\,dx$

= ....

a. $x^4 + x^3 + x^2 + c$

b. $x^4 + x^3 + x^2 + x + c$

c. $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + c$

d. $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + c$

e. $12x^4 + 6x^3 + 2x^2 + c$

Soal Ebtanas SMA, 1992

2. Rumus Integral dari $f(x) = ax^n$, untuk $n \neq -1$

Pada kalkulus diferensial, kalian telah mempelajari bahwa turunan dari $F(x) = ax^n$ adalah $f(x) = anx^{n-1}$, dengan $F'(x) = f(x)$. Dengan demikian, jika diketahui

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \text{ maka } f(x) = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n.$$

$$F(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1} \text{ maka } f(x) = \frac{a}{n+1}(n+1)x^n = ax^n.$$

Dengan mengingat bahwa operasi integral adalah invers dari operasi diferensial, lakukan kegiatan berikut.

Kegiatan — Kerjakan di buku tugas

Tujuan:
Menentukan rumus integral $f(x) = x^n$ dan $f(x) = ax^n$ dengan memahami hubungan antara $f(x)$ dan $f'(x)$.

Permasalahan:
Bagaimana rumus integral untuk $f(x) = x^n$ dan $f(x) = ax^n$?

Langkah-Langkah:

1. Coba kalian lengkapi tabel berikut.

a.

$f(x)$	$f'(x)$
x^2	....
x^3	....
x^4	....
x^5	....
....	....
x^n	....

b.

$f(x)$	$f'(x)$
$3x^2$	....
$3x^3$	....
$3x^4$	....
$3x^5$	....
....	....
$3x^n$	....

2. Sekarang pemahaman dibalik. Amati tabel yang telah kalian lengkapi. Amati dari $f'(x)$ baru ke $f(x)$. Pola apa yang kalian dapatkan?

Kesimpulan:
Kalian akan menemukan pola dari rumus integral fungsi.

Jika melakukan kegiatan di atas, kalian dapat menyimpulkan sebagai berikut.

Integral fungsi $f(x) = x^n$ dan $f(x) = ax^n$ dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, \text{ untuk } n \neq -1$$

$$\int ax^n \, dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c, \text{ untuk } n \neq -1$$

3. Menentukan Hasil Integral

Misalnya $f(x) = x^n$. Menurut rumus di atas, diperoleh

$$\int f(x)\,dx = \int x^n\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$

Dari $\int f(x)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, kalikan a di kedua ruasnya

sehingga diperoleh $a\int f(x)\,dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c, n \neq -1$.

Dengan mengingat bahwa $\frac{a}{n+1}x^{n+1} + c = \int ax^n\,dx$, akan kalian

peroleh bahwa $\frac{a}{n+1}x^{n+1} + c = \int a\,f(x)\,dx$.

Dengan demikian, diperoleh $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$.

Dari uraian di atas, kita peroleh

$$\int af(x)\,dx \;=\; a\int f(x)\,dx$$

Masih ingatkah kalian dengan sifat turunan yang menyatakan untuk $h(x) = f(x) + g(x)$ maka turunannya $h'(x) = f'(x) + g'(x)$? Dari sifat ini dapat kita nyatakan bahwa

$$\int h'(x)\,dx = \int \big(f'(x) + g'(x)\big)dx = \int f'(x)\,dx + \int g'(x)\,dx$$

Dari uraian di atas, tentu kalian mengerti bahwa

$$\int (f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Hal ini juga berlaku untuk tanda negatif. Oleh karena itu, diperoleh sifat integral.

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Dengan sifat-sifat tersebut, rumus-rumus integral suatu fungsi lebih mudah diterapkan untuk menentukan hasil integral suatu fungsi.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika
$f(x) = \int (2ax + (a-1)\,dx$,
$f(1) = 3$, dan $f(2) = 0$
maka nilai a adalah ....

a. 2
b. –2
c. $\frac{1}{3}$
d. $\frac{1}{2}$
e. $-\frac{1}{3}$

Soal UMPTN, Kemampuan IPA, 1996

Contoh:

1. Tentukan hasil integral fungsi-fungsi berikut.

a. $\int 2\,dx$ b. $\int 3x^4 dx$ c. $\int 2\sqrt{x}\,dx$

Penyelesaian:

a. $\int 2\,dx = 2\int dx = 2x + c$

b. $\int 3x^4 dx = 3\int x^4 dx$

$= \frac{3}{4+1}x^{4+1} + c$

$= \frac{3}{5}x^5 + c$

c. $\int 2\sqrt{x}\,dx = 2\int x^{\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{2}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + c$

$= \frac{4}{3}x \cdot x^{\frac{1}{2}} + c$

$= \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c$

2. Tentukan hasil integral dari soal-soal di bawah ini.

a. $\int (3x^2 - 4x)\,dx$

b. $\int \frac{(x^3 - 3x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

Penyelesaian:

a. $\int (3x^2 - 4x)\,dx = \int 3x^2 dx - \int 4x\,dx$

$= 3\int x^2 dx - 4\int x\,dx$

$= x^3 - 2x^2 + c$

b. $\int \frac{(x^3 - 3x)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(x^6 - 6x^4 + 9x^2)\,dx$

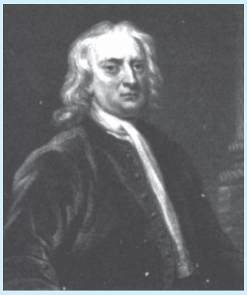
$= \int (x^{5\frac{1}{2}} - 6x^{3\frac{1}{2}} + 9x^{1\frac{1}{2}})\,dx$

$= \frac{1}{5\frac{1}{2}}x^{5\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3\frac{1}{2}}.6x^{3\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{1\frac{1}{2}}.9x^{1\frac{1}{2}+1} + c$

$= \frac{2}{13}x^{6\frac{1}{2}} - \frac{12}{7}x^{4\frac{1}{2}} + \frac{18}{5}x^{2\frac{1}{2}} + c$

Info Math: Informasi Lebih Lanjut

G.W. Von Leibniz (1646–1716)



Isaac Newton (1642–1727)

Sumber: *www.cygo.com*

Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646–1716) adalah seorang jenius serba bisa yang mampu meraih beraneka gelar kehormatan dalam berbagai bidang, seperti bidang hukum, keagamaan, kenegaraan, kesastraan, logika, metafisika, dan filsafat spekulatif. Dia menerbitkan kalkulus menurut versinya pada tahun 1684 M. Bersama dengan Isaac Newton, keduanya disebut sebagai tokoh kalkulus.

Leibniz menciptakan lambang-lambang matematika baku tentang integral dan diferensial seperti yang kita pakai sekarang, yaitu lambang "$\int$" untuk integral dan $\frac{"dy"}{dx}$ untuk diferensial.

Sumber: *www.myscienceblog.com*

Uji Kompetensi 1

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan hasil integral berikut ini.

   a. $\int 3x\, dx$ c. $\int \frac{4}{x^3}dx$ e. $\int \frac{5}{x^2}dx$

   b. $\int 9x^2\, dx$ d. $\int (-\frac{10}{x^6})\, dx$ f. $\int \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\, dx$

2. Tentukan hasil integral berikut ini.

   a. $\int 2x(\frac{2}{x}-1)\, dx$ d. $\int x^{-2}(x^2-x)(2x^2-3x)\, dx$

   b. $\int \frac{(x^2-4x)^2}{x}dx$ e. $\int \sqrt{x}(x-2)\, dx$

   c. $\int \frac{(x^2-x^3)}{x^2}dx$ f. $\int \frac{(x^2+6)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

3. Tentukan fungsi primitifnya.

   a. $\int (n+1)x^n\, dx$, untuk $n \neq -1$ c. $\int \sqrt{x^{3n}}\, dx$, untuk $n \neq -\frac{2}{3}$

   b. $\int \frac{2n}{x^n}\, dx$, untuk $n \neq 1$ d. $\int \sqrt{x^{3-2n}}\, dx$, untuk $n \neq \frac{5}{2}$

4. Misalkan diketahui fungsi $f(x) = 2x$ dan $g(x) = x^2$. Jika $(g \circ f)(x)$ ada, tentukan $\int (g \circ f)(x)\, dx$. (Ingat kembali materi komposisi fungsi yang telah kalian pelajari di kelas XI)

5. Diketahui fungsi $(f \circ g)(x) = 3(2x-1)^2 + 1$ dan $g(x) = 2x - 1$. Tentukan $\int f(x)\, dx$.

4. Menentukan Persamaan Kurva

Kalian tentu telah mengetahui bahwa interpretasi geometri dari fungsi turunan adalah *gradien garis singgung* pada kurva tersebut. Misalkan diketahui fungsi turunan sebuah kurva $y = f(x)$, yaitu $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, untuk setiap titik (x, y) dan sebuah titik pada kurva itu. Jika fungsi turunan itu diintegralkan, akan diperoleh $y = f(x) = \int f'(x)\, dx = h(x) + c$.

Persamaan ini merupakan persamaan keluarga kurva yang mempunyai turunan $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Keluarga kurva adalah semua kurva dengan persamaan yang dapat diperoleh dengan cara memberikan nilai tertentu pada konstanta persamaan itu. Dengan menyubstitusikan satu titik yang diketahui ke persamaan keluarga kurva maka akan diperoleh nilai c sehingga persamaan kurva yang dimaksud dapat ditentukan.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Ditentukan $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 10x + 2$ dan kurva melalui titik (1, 3) maka persamaan kurva adalah ....

a. $y = x^3 - 5x - 2x - 5$
b. $y = x^3 - 5x^2 + 2x - 5$
c. $y = x^3 - 5x^2 - 2x - 5$
d. $y = x^3 - 5x^2 + 2x + 5$
e. $y = x^3 - 5x^2 + 2x + 5$

Soal Ebtanas SMA, 1993

Contoh:

Suatu kurva melalui titik (2, 1). Apabila gradien kurva itu pada setiap titik memenuhi hubungan $\frac{dy}{dx} = 2(x - \frac{1}{x^2})$, tentukan persamaan kurva tersebut.

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = 2(x - \frac{1}{x^2})$$

$$y = \int 2(x - \frac{1}{x^2})\, dx$$

$$= \int (2x - \frac{2}{x^2})\, dx = x^2 + \frac{2}{x} + c$$

Dengan demikian, persamaan keluarga kurva tersebut adalah $y = x^2 + \frac{2}{x} + c$. Karena kurva yang dimaksud melalui titik (2, 1), kita tentukan nilai c terlebih dahulu dengan cara menyubstitusikan titik tersebut ke persamaan keluarga kurva itu.

$$y = x^2 + \frac{2}{x} + c$$

$$\Leftrightarrow 1 = (2)^2 + \frac{2}{(2)} + c \Leftrightarrow c = -4$$

Jadi, persamaan kurvanya adalah $y = x^2 + \frac{2}{x} - 4$.

Problem Solving

Fungsi biaya marjinal (dalam ratusan ribu rupiah) untuk memproduksi satu unit barang per minggu adalah $M_C = \frac{dC}{dQ} = \frac{4Q+10}{5}$. Biaya untuk memproduksi 1 unit produk adalah tiga ratus ribu rupiah, tentukan fungsi biaya total per minggu.

Penyelesaian:

Biaya total dapat dicari dengan mengintegralkan biaya marjinalnya.

$$\begin{aligned} C(Q) &= \int \left(\frac{4Q+10}{5} \right) dQ \\ &= \frac{1}{5} \int (4Q+10) dQ \\ &= \frac{1}{5} \int \left(2Q^2+10\right) + k \\ &= \frac{2}{5} Q^2 + 2Q + k \end{aligned}$$

Dari soal diketahui, $C(1) = 3$.

$$3 = \frac{2}{5}(1)^2 + 2(1) + k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{3}{5}$$

Oleh karena itu, rumus fungsi biaya total per minggu adalah $C(Q) = \frac{2}{5}Q^2 + 2Q + \frac{3}{5}$.

Uji Kompetensi 2

Kerjakan di buku tugas

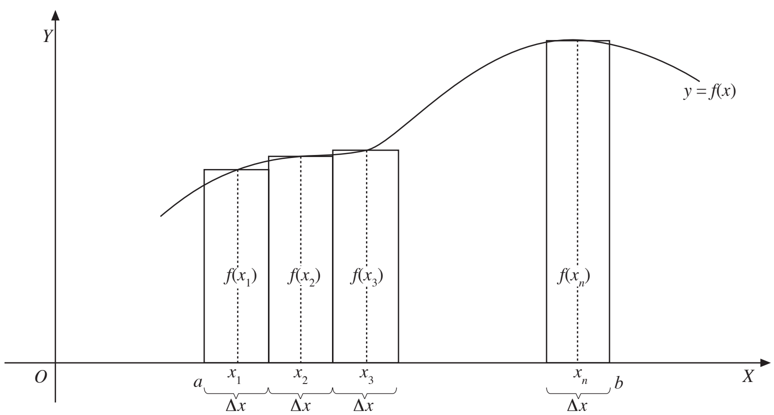
1. Tentukan $F(x)$ jika diketahui sebagai berikut.
   a. $F'(x) = 3x^2$ dan $F(2) = -3$
   b. $F'(x) = x^2 - 3$ dan $F(-3) = 10$
   c. $F'(x) = 6x^2 - 8x$ dan $F(3) = 6$
   d. $F'(x) = 2x + 6x^2$ dan $F(-1) = 8$
   e. $F'(x) = 5 - \frac{4}{x^2}$ dan $F(2) = 11$
   f. $F'(x) = m - 3x^2$, $F(-1) = -6$, dan $F(2) = 3$
2. Tentukan persamaan kurva yang memiliki gradien berikut.
   a. $\frac{dy}{dx} = 10x + 3$ dan melalui titik $(-1, 3)$
   b. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$ dan melalui titik $(3, 6)$
   c. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ dan melalui titik $(1, 4)$

3. Suatu garis menyinggung kurva kuadratis $p(x)$ di titik (2, 0). Persamaan garis singgung itu adalah $2ax - 2$. Jika kurva itu melalui titik (1, 0), tentukan persamaan kurva itu.
4. Diketahui fungsi biaya untuk memproduksi Q unit barang adalah $C = f(Q)$. Biaya marjinal didefinisikan sebagai $M_C = \frac{dC}{dQ}$. Fungsi biaya marjinal untuk memproduksi Q unit barang dirumuskan dengan $M_C = 6Q + 7$ (dalam puluhan ribu). Diketahui untuk memproduksi 2 unit barang diperlukan biaya 380.000 rupiah. Tentukan fungsi biaya totalnya. Berapa biaya total yang diperlukan untuk memproduksi 5 barang?
5. Misalnya biaya total yang dikeluarkan suatu perusahaan untuk memproduksi Q unit barang dirumuskan dengan $C = f(Q)$. Fungsi biaya marjinal (dalam jutaan rupiah) untuk memproduksi Q unit barang per periode adalah $C'(Q) = \frac{4}{5}Q + 3$. Biaya total untuk memproduksi 1 unit barang adalah $\frac{11}{15}$ juta rupiah. Tentukan fungsi biaya totalnya.

C. Integral Tertentu

1. Pengertian Integral sebagai Luas Suatu Bidang Datar

Misalkan terdapat suatu fungsi $f(x)$ yang kontinu pada interval $[a, b]$. Daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, sumbu X, garis $x = a$, dan $x = b$ dapat digambarkan seperti pada **Gambar 1.1**.



Gambar 1.1

Misalkan interval $[a, b]$ dibagi menjadi n interval bagian, dengan panjang masing-masing interval bagian Δx. Pada masing-masing interval bagian itu, selanjutnya ditentukan titik-titik x_1, x_2, ..., x_n, seperti pada **Gambar 1.1**. Kemudian, dibuat

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

NPada tiap titik (x, y) sebuah kurva $y = f(x)$ berlaku $\frac{dy}{dx} = 8x - 3$. Kurva melalui titik $(-1, 10)$. Persamaan kurva itu adalah ....

a. $y = 4x^2 + 9x + 9$
b. $y = 4x^2 - 2x + 4$
c. $y = 4x^2 - x + 7$
d. $y = 4x^2 + 2x + 8$
e. $y = 4x^2 - 3x + 3$

Soal Ebtanas SMA, 1993

persegi-persegi panjang dengan panjang masing-masing $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, dan lebarnya Δx. Oleh karena itu, diperoleh sebagai berikut.

Luas persegi panjang pada interval pertama = $f(x_1) \times \Delta x$
Luas persegi panjang pada interval kedua = $f(x_2) \times \Delta x$
$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ $\vdots$
Luas persegi panjang pada interval ke-n = $f(x_n) \times \Delta x$
——————————————————————— +

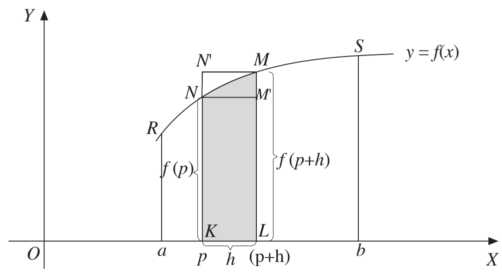
$$\text{Jumlah luas } = f(x_1) \times \Delta x + f(x_2) \times \Delta x + ... + f(x_n) \times \Delta x$$
$$= ((f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)) \times \Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \times \Delta x$$

Notasi "$\sum$" (dibaca "sigma") adalah jumlah secara berurutan. Karena persegi-persegi panjang itu terletak pada interval $[a, b]$ maka $x_1 = a$ dan $x_n = b$ sehingga jumlah luasnya dapat ditulis $L = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \times \Delta x$. Karena $f(x)$ kontinu pada interval $[a, b]$, panjang interval dapat dibuat sekecil mungkin sehingga untuk $n \to \infty$ maka $\Delta x \to 0$. Jadi, luas daerah itu adalah $L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \times \Delta x$. Dengan notasi integral, jika limit tersebut ada maka rumus luas ini didefinisikan secara sederhana menjadi $L = \int_a^b f(x)\, dx$.

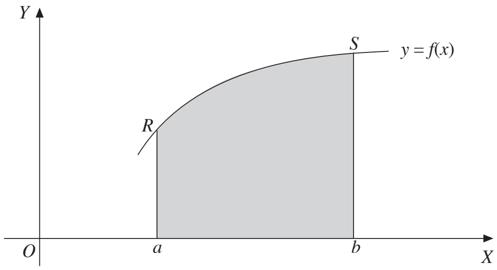
Dengan demikian, kita memperoleh kesimpulan sebagai berikut.

> Jika L adalah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, dengan $x \in [a, b]$, sumbu X, garis $x = a$, dan garis $x = b$ maka
>
> $$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{b} f(x_i) \times \Delta x \text{ atau } L = \int_a^b f(x)\, dx$$

Jadi, integral secara geometri diartikan sebagai luas daerah yang dinyatakan oleh limit suatu penjumlahan. Notasi "$\int$" adalah lambang integral yang diperkenalkan pertama kali oleh *Leibniz*. Pada gambar di samping, luas daerah antara kurva $y = f(x)$ dan sumbu X pada



(a)



(b)

Gambar 1.2

- interval $[a, b]$, $L(b) = \int_a^b f(x)\, dx$;
- interval $[a, p]$, $L(p) = \int_a^p f(x)\, dx$;
- interval $[a, p + h]$, $L(p + h) = \int_a^{p+h} f(x)\, dx$;
- interval $[a, a]$, $L(a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0$.

Luas $KLM'N$ < Luas $KLMN$ < Luas $KLMN'$

$f(p) \times h < L(p + h) - L(p) < f(p + h) \times h$

Jika setiap ruas dibagi h, diperoleh

$$f(p) < \frac{L(p+h) - L(p)}{h} < f(p + h).$$

Agar diperoleh pendekatan luas sesungguhnya, interval h dibuat sekecil-kecilnya atau $h \to 0$ sehingga

$$\lim_{h \to 0} f(p) \le \lim_{h \to 0} \frac{L(p+h) - L(p)}{h} \le \lim_{h \to 0} f(p+h)$$

$\Leftrightarrow f(p) \le L'(p) \le f(p)$

Jadi, $L'(p) = f(p)$.

Karena p pada interval $[a, b]$, untuk $p = x$ diperoleh $L'(x) = f(x)$.

Berarti, $L(x) = \int_a^x f(x)\, dx$.

Jika F adalah antiturunan dari f maka $L(x) = F(x) + c$.

- Untuk $x = a$ maka $L(a) = F(a) + c$.
  Karena $L(a) = 0$ maka $0 = F(a) + c \Leftrightarrow c = -F(a)$.
- Untuk $x = b$ maka $L(b) = F(b) + c$.
  Karena $c = -F(a)$ maka $L(b) = F(b) - F(a)$.

Jadi, berdasarkan uraian di atas, luas daerah antara kurva $y = f(x)$, garis $x = a$, $x = b$, dan sumbu X (lihat **Gambar 1.2** (b)) dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$L = \int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Pembahasan lebih lanjut mengenai luas daerah di bidang datar yang dibatasi suatu kurva, sumbu X, dan dua garis sejajar sumbu Y akan kita perdalam pada subbab tentang penggunaan integral.

2. Pengertian Integral Tertentu

Integral tertentu adalah integral dengan batas-batas integrasi yang telah ditentukan. Pada pembahasan sebelumnya, kita telah mempelajari bahwa integral dapat diartikan sebagai limit suatu jumlah, yaitu jika f suatu fungsi *integrable* (dapat diintegralkan) pada interval $[a, b] = \{x \mid a \le x \le b,\ x \in \text{bilangan real}\}$ dan F merupakan antiturunan dari f maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Notasi $\int_a^b f(x)\,dx$ disebut *notasi integral tertentu* dari f karena ditentukan pada batas-batas integrasi a dan b. Untuk batas-batas integrasi itu, a disebut *batas bawah integrasi* dan b disebut *batas atas integrasi*.

Tugas

Informasi Lebih Lanjut

Kerjakan di buku tugas

Coba kalian cari tahu tentang "Teorema Dasar Kalkulus". Apa isi teorema tersebut? Siapa tokoh yang berada di balik teorema tersebut?

Contoh:

1. Tentukan nilai dari $\int_{-1}^{4} (x^4 - x^3)\,dx$.

Penyelesaian:

$$\int_{-1}^{4} (x^4 - x^3)\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{4}$$

$$= \left(\frac{1}{5}(4^5) - \frac{1}{4}(4^4)\right) - \left(\frac{1}{5}(-1)^5 - \frac{1}{4}(-1)^4\right) = 141\tfrac{1}{4}$$

2. Tentukan nilai a yang memenuhi $\int_{1}^{a} (2x - 1)\,dx = 6$.

Penyelesaian:

$$\int_{1}^{a} (2x - 1)\,dx = [x^2 - x]_1^a$$

$\Leftrightarrow 6 = (a^2 - a) - (1 - 1)$

$\Leftrightarrow 6 = a^2 - a - 0$

$\Leftrightarrow a^2 - a - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (a - 3)(a + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (a - 3) = 0$ atau $a + 2 = 0$

$\Leftrightarrow a = 3$ atau $a = -2$

Jadi, nilai a yang dimaksud adalah $a = -2$ atau $a = 3$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Nilai $\int_1^2 (6x+2)(4-x)$ adalah ....

a. 44 d. –17
b. 37 e. –51
c. 27

Soal Ebtanas SMA, 1995

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

$\int_{-2}^{1} (3x^2+2x+4)\, dx$ = ...

a. –14 d. 10
b. –6 e. 18
c. –2

Soal UAN SMK, 2003

3. Sifat-Sifat Integral Tertentu

Sifat-sifat integral tertentu adalah sebagai berikut.

a. $\int_a^b c\, f(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx$, dengan c = konstanta

b. $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

c. $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$, $a < c < b$, dengan a, b, dan c bilangan real

d. $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

e. $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt$

Bukti:

Sifat-sifat di atas mudah untuk kalian buktikan. Oleh karenanya, di sini hanya akan dibuktikan sifat c saja.

Misalkan F adalah antiturunan dari f.

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx &= \left[F(x)\right]_a^c + \left[F(x)\right]_c^b \\ &= \left[F(c) - F(a)\right] + \left[F(b) - F(c)\right] \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\, dx \text{ .... terbukti}\end{aligned}$$

Coba kalian buktikan sifat-sifat lainnya.

Sifat-sifat ini dapat memudahkan kalian dalam menentukan nilai-nilai integral pada suatu interval. Agar kalian dapat memahami sifat-sifat integral di atas, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Dengan sifat-sifat integral tertentu, carilah hasil dari $\int_1^3 (x^2 - \frac{1}{x^2})\, dx + \int_3^5 (x^2 - \frac{1}{x^2})\, dx$.

Penyelesaian:

$$\int_1^3 (x^2 - \frac{1}{x^2})\, dx + \int_3^5 (x^2 - \frac{1}{x^2})\, dx = \int_1^5 (x^2 - \frac{1}{x^2})\, dx$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\int_1^5 (x^2 - \frac{1}{x^2})\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{x}\right]_1^5$$

$$= \left[\frac{1}{3}(5)^3 + \frac{1}{5}\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3 + \frac{1}{1}\right]$$

$$= 40\tfrac{8}{15}$$

Uji Kompetensi 3

Kerjakan di buku tugas

1. Dengan sifat-sifat integral tertentu, selesaikanlah soal-soal berikut.

   a. $\int_1^5 8\,dx$

   b. $\int_2^4 2x^3\,dx$

   c. $\int_0^3 x^2\sqrt{x}\,dx$

   d. $\int_0^2 x^2\sqrt[3]{x}\,dx$

   e. $\int_{-1}^3 (x^4 - \frac{1}{x^2})\,dx$

   f. $\int_2^5 (2x - 1)(5x + 2)\,dx$

2. Hitunglah nilai dari integral berikut.

   a. $\int_0^2 (2x + 5)(x - 3)\,dx + \int_2^4 (2x + 5)(x - 3)\,dx$

   b. $\int_1^3 (3x + 2)(x - 1)\,dx - \int_4^3 (3x + 2)(x - 1)\,dx$

   c. $\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$

   d. $\int_0^{\frac{1}{2}} (8x - 2x^2)\,dx - \int_4^{\frac{1}{2}} (8x - 2x^2)\,dx$

3. Tentukan nilai *a* dari integral berikut.

   a. $\int_{-1}^0 (2x^2 - x^3)\,dx + \int_0^a (2x^2 - x^3)\,dx = \frac{4}{3}$

   b. $\int_a^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} - \int_4^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

c. $\displaystyle\int_0^1 x^2(x^3+1)\,dx + \int_1^a x^2(x^3+1)\,dx = \frac{40}{3}$

d. $\displaystyle\int_{-1}^a (t-t^3)\,dt + \int_a^2 (t-t^3)\,dt = \frac{-9}{4}$

4. Jika $x = 1 - 3y$, tentukan nilai-nilai integral berikut.

a. $\displaystyle\int_0^3 x\,dy$

b. $\displaystyle\int_0^1 (x+x^2)\,dy$

c. $\displaystyle\int_{-1}^1 y\,dx$

d. $\displaystyle\int_0^1 (y-y^2)\,dx$

D. Pengintegralan dengan Substitusi

Beberapa bentuk integral yang rumit dapat dikerjakan secara sederhana dengan melakukan substitusi tertentu ke dalam fungsi yang diintegralkan tersebut. Di antara bentuk integral yang dapat dikerjakan dengan substitusi adalah bentuk $\int (f(x))^n\, d(f(x))$.

Coba perhatikan bentuk $\int x^n dx$. Bentuk ini telah kalian pelajari sebelumnya. Bagaimana jika variabelnya diganti dengan fungsi, misalnya $f(x)$? Bentuk ini akan menjadi $\int (f(x))^n\, d(f(x))$.

Untuk menyelesaikan suatu integral yang dapat disederhanakan menjadi bentuk $\int (f(x))^n\, d(f(x))$, dapat dilakukan substitusi $u = f(x)$. Dengan substitusi $u = f(x)$, diperoleh bentuk integral berikut.

$$\int (f(x))^n\, d(f(x)) = \int u^n\, du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$$

dengan $u = f(x)$ dan $n \neq -1$.

Perhatikan kembali bentuk $\int (f(x))^n\, d(f(x))$. Misalkan diambil $g(x) = x^n$ maka $\int (f(x))^n\, d(f(x)) = \int g(f(x))\, d(f(x))$. Secara umum, bentuk $\int (f(x))^n\, d(f(x))$ dapat ditulis sebagai $\int g(f(x))\, d(f(x))$. Jika diambil substitusi $u = f(x)$, diperoleh bentuk integral $\int g(f(x))\, d(f(x)) = \int g(u)\, du$.

Agar kalian dapat memahami pengintegralan bentuk ini, perhatikan dengan saksama contoh-contoh berikut.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}\,dx = \frac{3}{10}$; $a > 0$

$\displaystyle\int_0^b (2x-3)\,dx = 4$; $b > 0$

maka nilai $(a+b)^2$ = ...

a. 10
b. 15
c. 20
d. 25
e. 30

Soal UMPTN, 1993

Tugas

Kreativitas

Kerjakan di buku tugas

Diberikan fungsi $f(x) = x^2 - 5x + 6$ dan $g(x) = x^3 - 1$.

Buktikan bahwa

$\int f(x)\, g(x)\, dx = f(x) \int g(x)\, dx - \int [f'(x) (\int g(x)\, dx)]\, dx$

Contoh:

Carilah hasil integral $\int (2x - 7)(x^2 - 7x + 12)^6\, dx$.

Penyelesaian:

$$\int (2x - 7)(x^2 - 7x + 12)^6\, dx = \int (x^2 - 7x + 12)^6 (2x - 7)\, dx$$

Misalkan $u = x^2 - 7x + 12$.

$$\frac{du}{dx} = 2x - 7 \Leftrightarrow du = \frac{du}{dx}\, dx \Leftrightarrow du = (2x - 7)\, dx$$

Sebenarnya lambang $\frac{du}{dx}$ adalah suatu kesatuan dan tidak sama dengan $du : dx$. Namun, untuk mempermudah perhitungan, $\frac{du}{dx} = 2x - 7$ biasanya langsung ditulis $du = (2x - 7)$ dx. Oleh karena itu,

$$\int (x^2 - 7x + 12)^6 (2x - 7)\, dx = \int u^6\, du$$

$$= \frac{1}{7} u^7 + c = \frac{1}{7}(x^2 - 7x + 12)^7 + c$$

Dengan cara langsung, diperoleh

$$\int (x^2 - 7x + 12)^6 (2x - 7)\, dx = \int (x^2 - 7x + 12)^6\, d(x^2 - 7x + 12)$$

$$= \frac{1}{7}(x^2 - 7x + 12)^7 + c$$

Uji Kompetensi 4

Kerjakan di buku tugas

Carilah hasil integral berikut.

1. $3\int (2 - 3x)^6\, dx$
2. $\int \frac{3\, dx}{\sqrt{2 + 3x}}$
3. $-4\int (10 - 4x)^{-6}\, dx$
4. $\int \frac{3\, dx}{\sqrt[3]{(6 - x)^2}}$
5. $\int \frac{(6x^3 - 5x + 2)\, dx}{\sqrt{3x^4 - 5x^2 + 2x}}$
6. $\int \frac{(4x^3 - 6x^2)\, dx}{x^4 - 2x^3 + 5}$
7. $\int \frac{(2x + 2)\, dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}$
8. $\int_0^1 (x - 3)\, dx$
9. $\int_{-2}^{0} (3 - x)^2\, dx$ 6.
10. $\int_{-1}^{2} \frac{4x - 8}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}\, dx$

E. Integral Parsial (Pengayaan)

Jika kita menjumpai soal $\int u\,dv$, dengan u dan v adalah fungsi-fungsi dalam variabel x yang sulit dikerjakan, sedangkan $\int u\,dv$ lebih mudah dikerjakan maka kita perlu mendapatkan hubungan kedua integral tersebut untuk memperoleh penyelesaian $\int u\,dv$. Misalnya, $y = uv$, dengan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$ adalah fungsi-fungsi yang diferensiabel (dapat didiferensialkan) maka $y' = u'v + uv'$. Dalam notasi Leibniz, hal ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

$$d(uv) = v\,du + u\,dv$$

Jika kedua ruas diintegralkan, diperoleh

$$\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$\Leftrightarrow uv = \int v\,du + \int u\,dv$$

Dari persamaan terakhir, diperoleh hubungan $\int u\,dv$ dan $\int v\,du$, yaitu

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Pada rumus tersebut, integral yang diberikan harus dipisah menjadi dua bagian, yaitu satu bagian adalah fungsi dan bagian lain (fungsi yang mengandung dx) adalah dv. Oleh karena itu, rumus tersebut sering disebut *integral bagian* atau *integral parsial*. Strategi penggunaan integral parsial adalah sebagai berikut.

a. Memilih dv yang dapat segera diintegralkan.

b. Memilih $\int v\,du$ yang lebih mudah dikerjakan daripada $\int u\,dv$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

$15\int_2^3 x\sqrt{x-2}\;dx = ...$

a. 18   d. 24
b. 20   e. 26
c. 22

Soal SPMB, 2006

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\;dx = ...$

a. $\frac{108}{15}$ d. $\frac{116}{15}$
b. $\frac{128}{15}$ e. $\frac{106}{15}$
c. $\frac{96}{15}$

Soal Tes STT TELKOM, 1992

Contoh:

Tentukan $\int x\sqrt{x-4}\,dx$.

Penyelesaian:

Pilihan 1:

Misalkan dipilih $u = \sqrt{x-4}$ dan $dv = x\,dx$.

Dengan demikian, $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x-4}}\,dx$ dan $v = \dfrac{1}{2}x^2$.

$$\int x\sqrt{x-4}\,dx = \frac{1}{2}x^2\sqrt{x-4} - \int \frac{1}{4}x^2\frac{1}{\sqrt{x-4}}\,dx$$

Bentuk ini sulit dikerjakan sehingga pemisalan u dan dv yang demikian tidak digunakan.

Pilihan 2:

Misalkan dipilih $u = x\sqrt{x-4}$ dan $dv = dx$.

$$du = \sqrt{x-4} - \frac{x}{2\sqrt{x-4}}\ dx \text{ dan } v = x.$$

$$\int x\sqrt{x-4}\ dx = x^2\sqrt{x-4} - \int x\left(\sqrt{x-4} - \frac{x}{2\sqrt{x-4}}\right) dx$$

Bentuk ini juga sulit dikerjakan sehingga pemisalan u dan dv yang demikian juga tidak digunakan.

Pilihan 3:

Misalkan $u = x$. Dengan demikian, $du = dx$

$dv = \sqrt{x-4}\ dx$ sehingga $\int dv = \int \sqrt{x-4}\ dx$

$$\int dv = \int \sqrt{x-4}\ d(x-4)$$

$$\Leftrightarrow v = \int (x-4)^{\frac{1}{2}} d(x-4)$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{2}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}$$

Ternyata pemisalan u dan dv seperti ini memudahkan bentuk integral tersebut sehingga dapat kita gunakan.

$$\int x\sqrt{x-4}\ dx = \frac{2}{3}x(x-4)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}\ dx$$

$$= \frac{2}{3}x(x-4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (x-4)^{\frac{3}{2}}\ d(x-4)$$

$$= \frac{2}{3}x(x-4)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x-4)^{\frac{5}{2}} + c$$

Uji Kompetensi 5

Kerjakan di buku tugas

Tentukan integral-integral berikut.

1. $\int x(x+3)^5\ dx$
2. $\int 8x(2x+4)^3\ dx$
3. $\int x\sqrt{x-2}\ dx$
4. $\int \frac{6x\ dx}{\sqrt{2x-3}}$
5. $\int \frac{2x\ dx}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$
6. $\int \frac{3(x-2)^2}{4x^3\sqrt{x}}\ dx$

7. $\int x^2\sqrt{x-2}\,dx$

8. $\int x^3\sqrt{x-1}\,dx$

9. $\int x^3\sqrt{x+4}\,dx$

10. $\int \frac{8x^4\,dx}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$

Diskusi Inkuiri

Coba kerjakan soal berikut secara berurutan dengan menggunakan integral parsial.

1. $\int x\sqrt{x}\,dx$
2. $\int x^2\sqrt{x}\,dx$
3. $\int x^3\sqrt{x}\,dx$
4. $\int x^4\sqrt{x}\,dx$

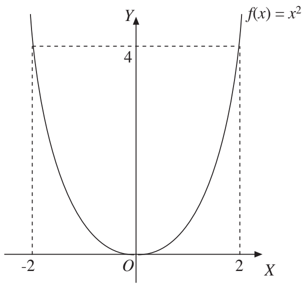
Dari keempat soal di atas, pemilihan fungsi *u* manakah yang kalian anggap sulit? Mengapa kalian menilai demikian? Jelaskan.

F. Penggunaan Integral

Di antara penggunaan integral adalah untuk menentukan luas suatu daerah.

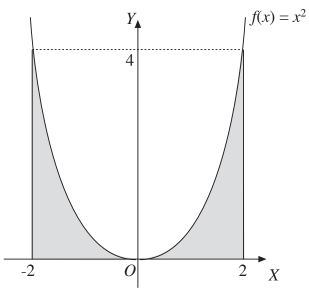
Sebelum membahas lebih lanjut tentang penggunaan integral untuk menentukan luas suatu daerah, ada baiknya kalian mempelajari bagaimana cara menggambarkan luasan suatu daerah terlebih dahulu.

Cara-cara menggambar grafik telah kalian pelajari di kelas X, terutama grafik fungsi kuadrat. Misalkan kalian akan menggambar suatu daerah yang dibatasi oleh fungsi $f(x) = x^2$ dan sumbu X pada interval $-2 \leq x \leq 2$. Pertama, kamu harus menggambar kurva (grafik) fungsi $f(x) = x^2$, $-2 \leq x \leq 2$ pada bidang Cartesius seperti **Gambar 1.3**.



Gambar 1.3

Tarik garis batas pada interval (terkecil atau terbesar) sejajar sumbu Y hingga memotong kurva $f(x) = x^2$. Kemudian, arsir daerah yang berada di antara kurva dan sumbu X pada interval yang diberikan sehingga diperoleh **Gambar 1.4**.



Gambar 1.4

Bagaimana jika daerah yang dimaksud dibatasi oleh dua kurva? Cara menggambarkannya pada prinsipnya sama seperti cara-cara di atas. Namun, hal yang sangat penting diperhatikan adalah titik perpotongan kedua kurva. Kalian harus menentukan titik potong kedua kurva itu. Di samping itu, kalian juga harus memahami pada interval mana fungsi yang satu memiliki nilai lebih besar daripada fungsi lainnya. Hal ini penting untuk menentukan luas daerah tersebut.

Contoh:

Gambarlah luasan daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = x^2$ dan $f(x) = x$ pada interval $0 \leq x \leq 1$.

Penyelesaian:

Kalian tentu sudah dapat menggambar kedua kurva itu. Titik potong kedua kurva ada jika keduanya mempunyai titik persekutuan.

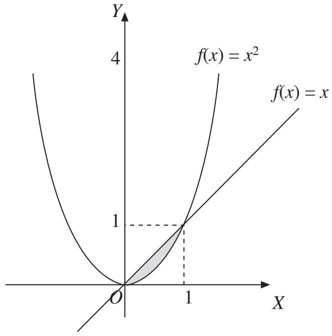
Dengan menyamakan kedua fungsi itu diperoleh

$$\begin{aligned} x^2 &= x \\ x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \\ x &= 0 \text{ atau } x = 1 \end{aligned}$$

Untuk $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$ (boleh diambil dari kedua fungsi itu)

Untuk $x = 1 \rightarrow f(1) = 1$

Jadi, titik potong kedua fungsi adalah (0, 0) dan (1, 1).



Gambar 1.5

Secara lengkap, luas daerah yang dimaksud dapat digambarkan sebagai daerah yang diarsir (lihat gambar di samping).

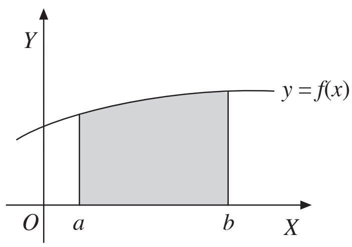
Pada interval $0 \leq x \leq 1$, tampak bahwa fungsi $f(x) = x$ lebih besar daripada fungsi $f(x) = x^2$.

Bagaimana cara menggambarkan luasan daerah yang dibatasi dua kurva itu pada interval $1 \leq x \leq 2$? Bagaimana pula pada interval $-1 \leq x \leq 0$? Coba kalian kerjakan.

1. Menentukan Luas Daerah di Atas Sumbu *X* antara Kurva *y* = *f*(*x*), Sumbu *X*, Garis *x* = *a*, dan Garis *x* = *b*

Kalian telah dapat menggambarkan daerah-daerah yang dibatasi kurva-kurva. Sekarang kita akan mencari luas daerah-daerah itu.

Di depan telah dibuktikan bahwa luas daerah di atas sumbu X yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu X, garis $x = a$, dan garis $x = b$ dapat ditentukan dengan rumus di atas, yaitu



Gambar 1.6

$$L = \int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

dengan $F(x)$ adalah antiturunan dari $f(x)$. Untuk lebih jelasnya, mari kita pelajari contoh berikut.

Contoh:

Suatu daerah dibatasi oleh kurva $y = 4x - x^2$, $x = 1$, $x = 3$, dan sumbu X.

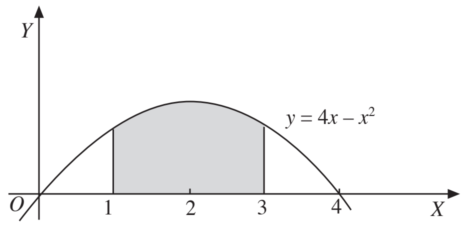
a. Lukislah kurva tersebut dan arsir daerah yang dimaksud.

b. Hitunglah luas daerah itu.

Penyelesaian:

a. Dengan menggambarkan grafik kurva dan garis-garis batas yang diberikan terlebih dahulu pada bidang koordinat, diperoleh gambar di samping. (Daerah yang diarsir adalah daerah yang dimaksud).

b. Luasnya dapat ditentukan dengan mengintegralkan $y = 4x - x^2$ dengan batas-batas integralnya mulai dari $x = 1$ sampai $x = 3$.



Gambar 1.7

$$L = \int_1^3 (4x - x^2)\, dx = [2x^2 - \frac{1}{3}x^3]_1^3$$

$$= \left[2(3)^2 - \frac{1}{3}(3)^3\right] - \left[2(1)^2 - \frac{1}{3}(1)^3\right] = (18 - 9) - (2 - \frac{1}{3}) = 7\frac{1}{3} \text{ satuan luas}$$

Uji Kompetensi 6

Kerjakan di buku tugas

1. Lukislah sketsa grafiknya, kemudian arsir daerah yang disajikan oleh kurva dengan notasi integral berikut.

   a. $\int_0^3 2x\, dx$

   b. $\int_{-1}^1 (-x^2 + 4)\, dx$

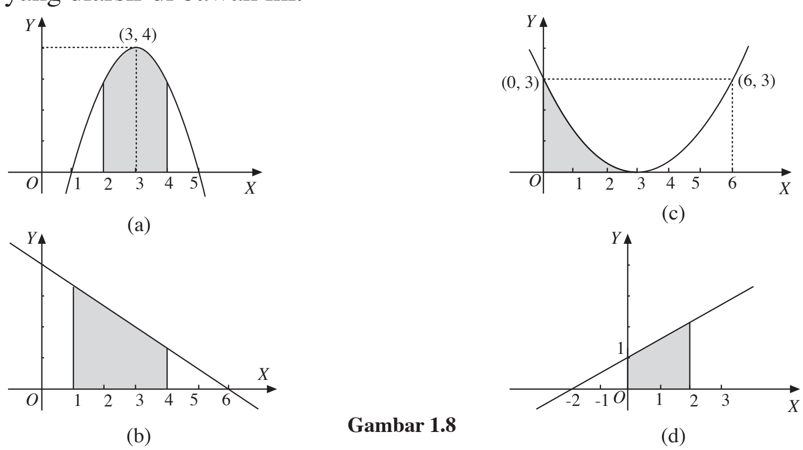
   c. $\int_{-1}^4 (x + 2)\, dx$

   d. $\int_{-4}^{-1} x^2\, dx$

   e. $\int_{-2}^3 4\, dx$

   f. $\int_{-2}^1 (9 - x^2)\, dx$

2. Tulislah notasi integral yang menyatakan luas daerah yang ditunjukkan oleh bagian yang diarsir di bawah ini.



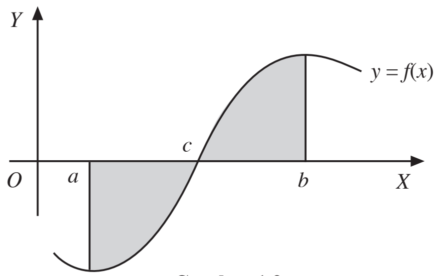
Gambar 1.8

3. Tentukan luas daerah yang diarsir pada soal nomor 2.
4. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva di bawah ini.
   a. $y = 6 - 3x$, sumbu X, garis $x = -3$, dan garis $x = 1$
   b. $y = 8 - 2x$, sumbu X, garis $x = -4$, dan garis $x = -1$
   c. $y = x^2$, sumbu X, dan garis $x = 3$
   d. $y = x^2 + 2$, sumbu X, garis $x = 1$, dan garis $x = 4$
   e. $y = x^2 - 4x + 3$, sumbu X, garis $x = 4$, dan garis $x = 5$
5. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh sumbu X dengan kurva-kurva berikut.
   a. $y = -3x - x^2$ d. $y = 2 + x - x^2$
   b. $y = 6 - 3x^2$ e. $y = -x^2 + 6x - 8$
   c. $y = 2 - x^2$ f. $y = (1 - x)(x - 3)$

2. Luas Daerah Gabungan: Di Atas dan di Bawah Sumbu *X*

Untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu X, garis $x = a$, dan $x = b$ seperti pada **Gambar 1.9** dilakukan dengan analisis sebagai berikut.

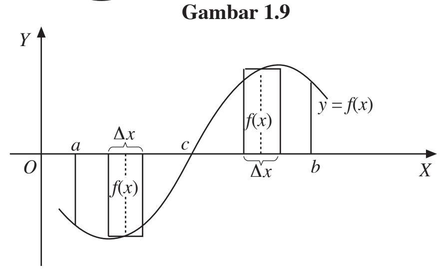
Untuk $c < x \le b$ nilai $f(x) > 0$ sehingga $\sum_{x=c}^{b} f(x) \times \Delta x > 0$. Hal ini berarti $\int_c^b f(x)\,dx > 0$.



Gambar 1.9

Pada interval $a \le x < c$, $f(x)$ bernilai negatif atau $f(x) < 0$ sehingga $\sum_{x=a}^{c} f(x) \times \Delta x < 0$.

Hal itu berarti $\int_a^c f(x)\,dx < 0$. Adapun pada titik c, $f(x)$ bernilai nol atau $f(c) = 0$.



Gambar 1.10

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu X, garis $x = a$, dan garis $x = b$, seperti pada **Gambar 1.10** adalah sebagai berikut.

Luas = Luas daerah di bawah sumbu X + Luas daerah di atas sumbu X

Kita telah mengetahui bahwa $\int_a^c f(x)\,dx$ bernilai negatif, sedangkan luas suatu daerah tidak mungkin bernilai negatif. Untuk itu, $\int_a^c f(x)\,dx$ perlu diubah tandanya sehingga nilainya menjadi positif. Hal itu dilakukan dengan cara membalik batas integralnya atau membubuhkan tanda negatif dari bentuk inte-

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 3x^2 - 2$, garis $x = 2$, garis $x = 4$, dan sumbu X adalah ....
a. 60 satuan luas
b. 52 satuan luas
c. 44 satuan luas
d. 6 satuan luas
e. 2 satuan luas

Soal UN SMK, 2004

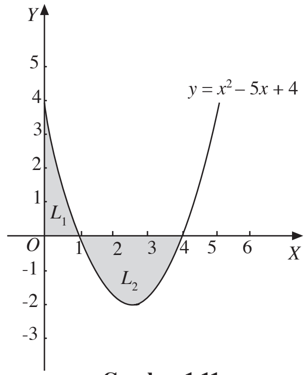
gral semula sehingga diperoleh $\int_c^a f(x)\,dx$ atau $-\int_a^c f(x)\,dx$.

Dengan demikian, luas daerah yang dimaksud adalah

$$L = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \text{ atau } L = \int_c^a f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Contoh:

Tentukan luas daerah yang diarsir pada **Gambar 1.11** dengan menggunakan integral.



Gambar 1.11

Penyelesaian:

Karena L_2 terletak di bawah sumbu X (bernilai negatif), L_2 diberi tanda negatif (agar menjadi positif). Oleh karena itu, luas daerah yang dicari adalah sebagai berikut.

Luas $= L_1 + (-L_2) = L_1 - L_2$

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 (x^2 - 5x + 4)\,dx - \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\,dx \\
&= \int_0^1 (x^2 - 5x + 4)\,dx + \int_4^1 (x^2 - 5x + 4)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_4^1 \\
&= \left[\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{5}{2}(1)^2 + 4(1)\right] - [0] + \left[\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{5}{2}(1)^2 + 4(1)\right] - \left[\frac{1}{3}(4)^3 - \frac{5}{2}(4) + 4(4)\right] \\
&= \left[\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4\right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4\right] - \left[\frac{64}{3} - \frac{80}{2} + 16\right] \\
&= \frac{11}{6} + \frac{11}{6} - \left(-\frac{16}{6}\right) = \frac{38}{6} = 6\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Jadi, luas daerah yang dimaksud adalah $6\frac{1}{3}$ satuan luas.

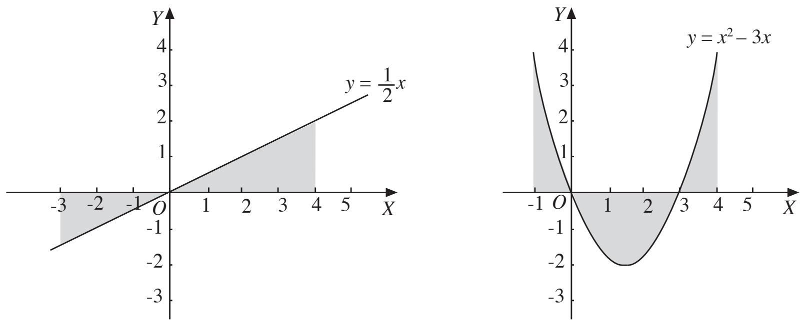
Diskusi Berpikir Kritis

Misalkan diberikan suatu fungsi f, pada interval $a \le x \le c$ maka $f(x) \le 0$ dan pada interval $c < x \le d$ maka $f(x) > 0$. Apa yang terjadi jika kalian menggunakan rumus $\int_a^d f(x)\,dx$ untuk mencari luas antara kurva dan sumbu X? Mengapa demikian? Langkah apa yang kalian ambil?

Uji Kompetensi 7

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan luas daerah yang diarsir berikut.



(a) (b)

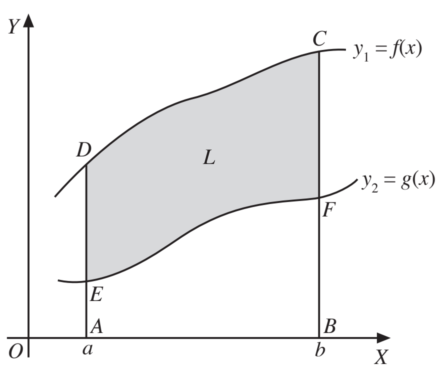
Gambar 1.12

Untuk soal nomor 2 – 8, tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut dan sumbu X pada interval yang diberikan.

2. $y = x^2 - 7x + 10$; $[0, 2]$
3. $y = x^2 - 25$; $[-5, 5]$
4. $y = x^2 - 5x$; $[0, 5]$
5. $y = x^2(x - 1)$; $[0, 1]$
6. $y = x(x + 1)(x - 2)$; $[-1, 2]$
7. $y = x(x^2 + x - 6)$; $[-3, 2]$
8. $y = x^3 - 9x$; $[-1, 1]$
9. Tentukan luas daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu X, garis $x = 2$, dan garis $x = 4$.
10. Gambarlah kurva $y = x^2 - 8x + 15$, kemudian tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva tersebut, garis $x = 1$, garis $x = 7$, dan sumbu X.

3. Luas Daerah yang Dibatasi Dua Kurva

Misalkan terdapat kurva $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = g(x)$, dengan $f(x) > g(x)$ pada interval $a < x < b$, seperti pada **Gambar 1.13**. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = g(x)$ dari $x = a$ sampai $x = b$ dapat dihitung dengan cara berikut.



Gambar 1.13

Luas L adalah luas daerah di bawah kurva $y_1 = f(x)$ dari titik a ke b dikurangi luas daerah di bawah kurva $y_2 = g(x)$ dari titik a ke b.

L = luas daerah $ABCD$ – luas daerah $ABFE$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Jadi, luas daerah itu adalah

$$L = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Contoh:

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 2x$ dan $y = 6x - x^2$.

Penyelesaian:

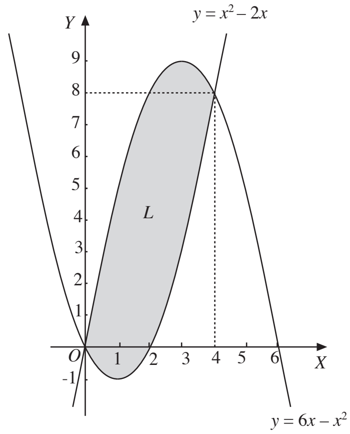
Perpotongan antara kedua kurva tersebut adalah

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x = 6x - x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - 8x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x(x - 4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \text{ atau } x = 4 \end{aligned}$$

Untuk $x = 0$ maka nilai $y = 0$.
Untuk $x = 4$ maka nilai $y = 8$.

Oleh karena itu, titik perpotongan antara kedua kurva itu adalah (0, 0) dan (4, 8) sehingga batas integralnya adalah $x = 0$ hingga $x = 4$.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^4 ((6x - x^2) - (x^2 - 2x))\,dx \\ &= \int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx \\ &= \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^4 \\ &= \left[4(4)^2 - \frac{2}{3}(4)^3\right] - [0] \\ &= 64 - 42\frac{2}{3} \\ &= 21\frac{1}{3} \end{aligned}$$



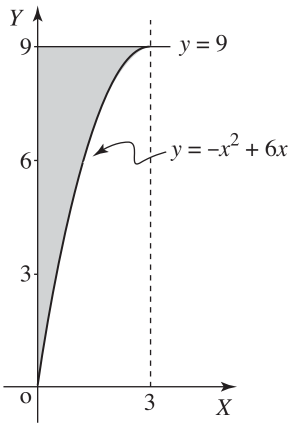
Gambar 1.14

Jadi, luas daerahnya adalah $21\frac{1}{3}$ satuan luas.

Soal Terbuka

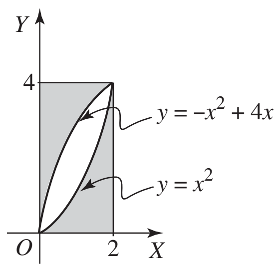
Kerjakan di buku tugas

1. Perhatikan gambar di samping. Tentukan luas daerah yang diarsir.



Gambar 1.15

2.



Gambar 1.16

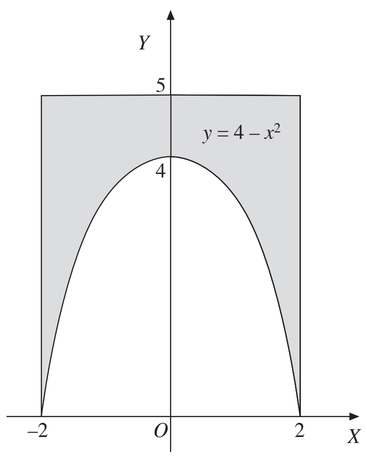
Perhatikan gambar di atas. Tentukan luas daerah yang diarsir.

Uji Kompetensi 8

Kerjakan di buku tugas

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut (nomor 1–9).

1. $y = x$ dan $y = x^2$
2. $y = 3x$ dan $y = x^2$
3. $y = x^2$ dan $y = 4 - x^2$
4. $y = x^2 - x$ dan $y = 3x - x^2$
5. $y = 2x$ dan $y = x^2 - 4x$
6. $y = 7 - x^2$ dan $y = x^2 - 2x + 1$
7. $y = (x - 2)^2$ dan $y = 10 - x^2$
8. $y = -1$ dan $y = x^2$
9. $y = x^2$, $y = 8x - x^2$, dan sumbu X
10. Gambar di samping adalah sisi samping dari sebuah jembatan. Lengkungan jembatan mempunyai persamaan $y = 4 - x^2$. Berapakah luas sisi samping jembatan itu (daerah yang diarsir)?



Gambar 1.17

Tugas Informasi Lebih Lanjut **Kerjakan di buku tugas**

Untuk menambah wawasan kalian tentang materi integral, carilah informasi yang berhubungan dengan penggunaan integral (tokoh, materi, teknik pengintegralan) di berbagai sumber (perpustakaan, internet, maupun buku-buku penunjang).

Refleksi

Setelah mempelajari integral, tentu kalian tahu bahwa luasan suatu daerah bidang datar yang memiliki bentuk teratur dapat ditentukan luasnya. Menurut kalian, apakah hanya itu kegunaan integral? Seberapa sering kalian menggunakan aplikasi materi ini?

Rangkuman

1. Bentuk $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ dinamakan integral tak tentu dari $f(x)$.
2. Beberapa rumus integral tak tentu adalah sebagai berikut.
   a. $\int dx = x + c$
   b. $\int a\,dx = ax + c$, untuk a konstanta
   c. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, untuk $n \neq -1$
   d. $\int ax^n\,dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$, untuk $n \neq -1$
   e. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
   f. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$
3. Jika F adalah antiturunan dari f, luas daerah di atas yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu X, $x = a$, dan $x = b$ adalah

$$L = \int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

4. Sifat-sifat integral tertentu
   a. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, untuk c = konstanta.
   b. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

c. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

d. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

e. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

5. Luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva

Jika $f(x) \geq g(x) > 0$ pada domain $[a, b]$ maka luas daerah yang dibatasi oleh $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, garis $x = a$, dan garis $x = b$ adalah

$$L = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Latihan Ulangan Harian I

Kerjakan di buku tugas

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. $\int \frac{dx}{x^{10}} = ...$

   a. $-\frac{1}{9}x^{-9} + c$

   b. $-\frac{1}{11}x^{-11} + c$

   c. $\frac{1}{9}x^{-9} + c$

   d. $\frac{1}{11}x^{-11} + c$

   e. $\frac{-1}{11}x^{11} + c$

2. $\int (39x^2 + 2x + 1)(78x + 2)\,dx = ...$

   a. $(39x^2 + 2x + 1)^2 + c$

   b. $\frac{1}{2}(39x^2 + 2x + 1)^2 + c$

   c. $78x^3 + 2x^2 + c$

   d. $39x^3 + 2x^2 + x + c$

   e. $\frac{1}{2}(39x^3 + 2x^2 + x)(78x + 2) + c$

3. $\int 9x^2\sqrt{(x^3 + 9)}\,dx = ...$

   a. $2(x^3 + 9)^{\frac{3}{2}} + c$

   b. $\frac{2}{3}(x^3 + 9)^{\frac{3}{2}} + c$

   c. $\frac{2}{5}(x^3 + 9)^{\frac{3}{2}} + c$

   d. $\frac{3}{2}(x^3 + 9)^{\frac{3}{2}} + c$

   e. $\frac{1}{2}(x^3 + 9)^{\frac{1}{2}} + c$

4. Diketahui $\frac{dF(x)}{dx} = ax + b$, $F(0) = 3 + F(-1)$, dan $F(1) - F(0) = 5$. Nilai $a + b = ...$

   a. 8
   b. 6
   c. 2
   d. –2
   e. –4

5. Gradien suatu kurva dinyatakan dengan $m = \frac{dy}{dx} = (x - 1)^3$. Jika kurva tersebut melalui titik $A(3, 0)$, persamaan kurva itu adalah ....

a. $4y = (x - 1)^3 + 16$
b. $4y = (x - 1)^4 - 16$
c. $4y = -(x - 1)^3 - 16$
d. $y = -\frac{1}{4}(x - 1)^4 + 16$
e. $y = (x - 1)^4 + 16$

6. $\int_{-3}^{1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx = ...$

a. $\frac{9}{10}$ d. 2,5
b. $\frac{10}{9}$ e. 4
c. $\frac{1}{4}$

7. Jika $f(x) = ax + b$, $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$, dan $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$ maka nilai $a + b = ...$

a. 3
b. 4
c. 5
d. –3
e. –4

8. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ dan sumbu X adalah ....

a. 4
b. 6
c. 8
d. 10
e. 12

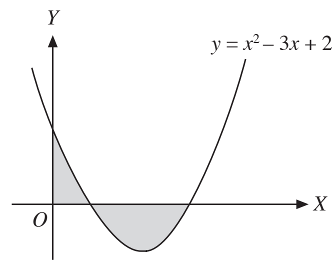
9. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 2 - x^2$ dan $y = -x$ adalah ....

a. $\frac{9}{2}$ d. $\frac{5}{2}$
b. $\frac{7}{2}$ e. $\frac{3}{2}$
c. 3

10. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = -x^2 + 2x$, sumbu X, dan garis $x = 3$ adalah ....

a. 0 d. 8
b. $1\frac{1}{3}$ e. 4
c. $2\frac{2}{3}$

11. Luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah adalah ....



a. $\frac{1}{6}$
b. $\frac{5}{6}$
c. $\frac{2}{3}$
d. $\frac{3}{2}$
e. 1

12. Luas daerah yang dibatasi garis $y = \frac{1}{2}$ dan kurva $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$ dapat dinyatakan sebagai integral tertentu, yaitu ....

a. $\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\,dx$ d. $2\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2}\,dx$
b. $2\int_0^1 \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\,dx$ e. $2\int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\,dx$
c. $\int_0^1 \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\,dx$

13. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = x + 2$ adalah ....

a. 9 d. $\frac{9}{6}$
b. $\frac{27}{8}$ e. $\frac{9}{7}$
c. $\frac{27}{6}$

14. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $4x = y^2$ dan $y = 2x - 4$ adalah ....
    a. 9
    b. $\frac{27}{8}$
    c. $\frac{27}{6}$
    d. $\frac{9}{6}$
    e. $\frac{9}{7}$

15. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4x$ dan $y = 3$ dari $x = 1$ sampai $x = 2$ adalah ... satuan luas.
    a. 1
    b. 2
    c. 3
    d. 5
    e. $6\frac{2}{3}$

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Hitunglah integral berikut.
   a. $\int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}}\, dx$
   b. $\int \sin x \sin 3x \, dx$
2. Tentukan persamaan suatu kurva yang memiliki persamaan gradien $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$ dan melalui titik $A(9, 18)$.
3. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 9 - x^2$ dan $y = x + 3$.
4. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4x^2$, $y = x^2$, dan $y = 4$ di kuadran I.
5. Misalkan suatu pabrik memproduksi Q unit barang menghabiskan biaya yang bersesuaian dengan fungsi $C(Q)$. Biaya marjinal adalah besarnya biaya tambahan yang harus dikeluarkan pabrik karena adanya penambahan unit barang yang diproduksi. Secara matematis, biaya marjinal dirumuskan dengan $M_C = \frac{dC}{dQ}$.

   Jika diketahui $M_C = \frac{2}{7}Q + 1$ (dalam ratusan ribu), tentukan rumus fungsi biaya totalnya.

Bab II

Program Linear

Sumber: *Ensiklopedia Pelajar,* 1999

Motivasi

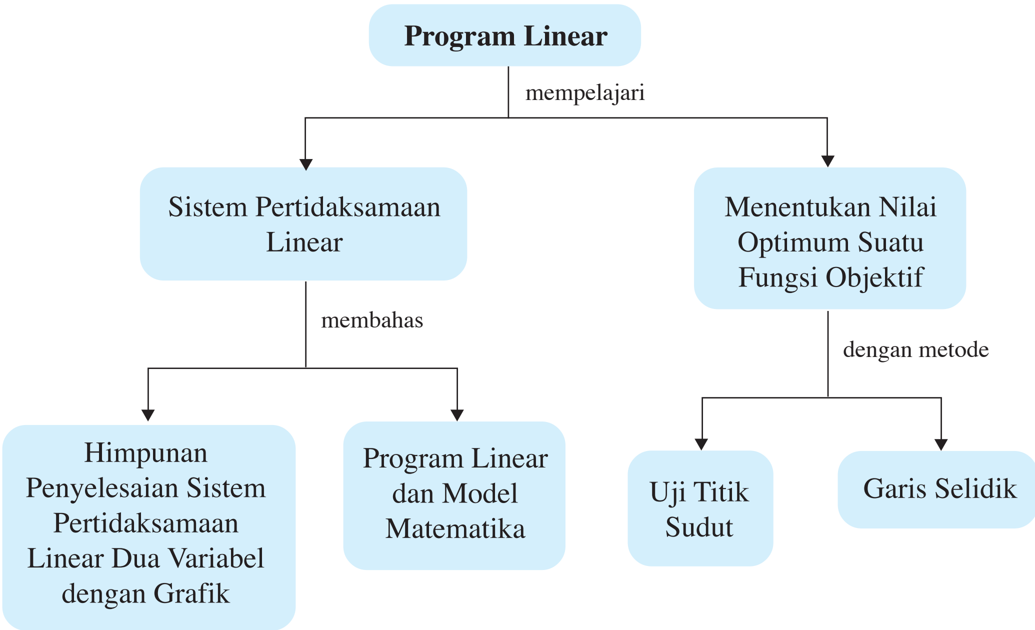
Setiap pedagang, pengusaha, atau orang yang berkecimpung di bidang usaha pasti menginginkan keuntungan sebanyak-banyaknya terhadap apa yang diupayakannya. Salah satu cara yang dapat ditempuh adalah menekan biaya produksi hingga sekecil-kecilnya. Dengan menyederhanakan beberapa faktor yang berpengaruh pada proses tersebut, pedagang atau pengusaha dapat membentuk suatu model matematika. Program linear merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan model matematika sederhana.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

1. menentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel;
2. menentukan fungsi tujuan (fungsi objektif) beserta kendala yang harus dipenuhi dalam masalah program linear;
3. menggambarkan kendala sebagai daerah di bidang yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear;
4. menentukan nilai optimum dari fungsi tujuan sebagai penyelesaian dari program linear;
5. menafsirkan nilai optimum yang diperoleh sebagai penyelesaian program linear.

Peta Konsep



Kata Kunci

- fungsi objektif
- fungsi kendala
- model matematika
- program linear
- pertidaksamaan
- sistem pertidaksamaan linear
- nilai maksimum
- nilai minimum
- nilai optimal
- optimasi

Program linear sebagai bagian dari matematika banyak digunakan dalam berbagai bidang, antara lain dalam bidang ekonomi, pertanian, dan perdagangan. Dengan menggunakan program linear, seseorang dapat menghitung keuntungan maksimum atau biaya minimum. Hal itu sangat bergantung pada pembatas atau kendala, yaitu sumber daya yang tersedia.

Dalam mempelajari program linear, kita perlu mengingat kembali cara menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel dengan menggunakan grafik. Oleh karena itu, kita awali pembahasan ini dengan mengulang kembali cara menentukan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Setelah hal ini kita pahami dengan baik, kita lanjutkan pembicaraan ini dengan membahas pengertian program linear dan model matematika, menentukan nilai optimum bentuk objektif, serta menyelesaikan soal-soal program linear.

Sebelum mempelajari bab ini, ada baiknya kalian jawab soal-soal berikut.

Uji Prasyarat — **Kerjakan di buku tugas**

1. Gambarlah grafik yang menyatakan himpunan penyelesaian dari:
   a. $6x + 5y < 11$
   b. $\begin{cases} x - 6y = -5 \\ 5x + y = 6 \end{cases}$
2. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear
   $\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 6x + y = 7 \end{cases}$
   dengan metode substitusi dan metode eliminasi.
3. Ade membeli buku dan sebuah bolpoin di Toko Permata Ibu. Ade harus membayar Rp7.000,00. Di toko yang sama Ria membeli sebuah buku dan dua bolpoin. Ria harus membayar Rp4.000,00. Berapa harga buku di toko Permata Ibu? Berapa pula harga bolpoin?

Setelah kalian mampu menjawab soal-soal di atas, mari kita lanjutkan ke materi berikut.

A. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah suatu sistem (gabungan dua atau lebih) pertidaksamaan linear yang memuat dua variabel. Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel merupakan irisan atau interseksi dari himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear yang terdapat pada sistem pertidaksamaan itu. Dalam bentuk grafik pada bidang koordinat, himpunan penyelesaian itu berupa daerah yang dibatasi oleh garis-garis dari sistem persamaan linearnya. Perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh:

1. Gambarlah himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear berikut pada bidang Cartesius. (R adalah himpunan bilangan real)
   a. $2x + 3y \geq 6$, dengan $x, y \in R$
   b. $x + 2y < 4$, dengan $x, y \in R$

Penyelesaian:

Sebelum menentukan daerah penyelesaiannya, kita perlu melukis batas-batas daerahnya, yakni grafik $2x + y = 6$ dan grafik $x + 2y = 4$.

Karena batas yang dimaksud berbentuk linear, dapat dipastikan bahwa batas-batas daerahnya berupa garis-garis lurus. Jadi, untuk melukisnya cukup ditentukan 2 titik anggotanya, kemudian menghubungkannya menjadi sebuah garis lurus. Dua titik anggotanya yang mudah dihitung adalah titik potong garis itu dengan sumbu X dan sumbu Y. Skema perhitungannya dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 2.1

x	0	....
y	....	0
(x, y)	(0, ...)	(..., 0)

a. $2x + y \geq 6$, dengan $x, y \in R$

Batas daerah penyelesaiannya adalah grafik $2x + y = 6$.

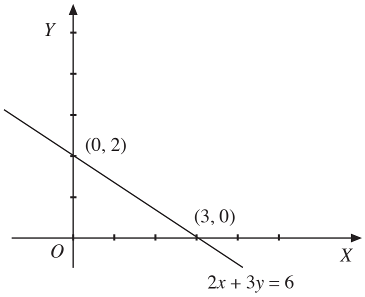
- Titik potong grafik dengan sumbu X, syaratnya $y = 0$. Berarti, $2x + 3(0) = 6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$. Oleh karena itu, titik potong grafik dengan sumbu X adalah (3, 0).
- Titik potong grafik dengan sumbu Y, syaratnya $x = 0$. Berarti, $2(0) + 3y = 6 \Leftrightarrow 3y = 6 \Leftrightarrow y = 2$. Oleh karena itu, titik potong grafik dengan sumbu Y adalah (0, 2).

Jadi, isian tabel selengkapnya adalah sebagai berikut.

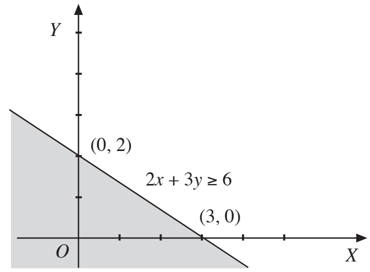
Tabel 2.2

x	0	3
y	2	0
(x, y)	(0, 2)	(3, 0)

Grafik $2x + 3y = 6$ dapat diperoleh dengan membuat garis yang menghubungkan titik (3, 0) dan (0, 2) seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.1



Gambar 2.2

Pada **Gambar 2.1**, tampak bahwa garis $2x + y = 6$ membagi bidang Cartesius menjadi dua daerah, yaitu daerah di sebelah kanan (atas) garis dan daerah di sebelah kiri (bawah) garis itu. Untuk menentukan daerah yang memenuhi pertidaksamaan $2x + 3y \geq 6$, kita ambil sembarang titik untuk diselidiki, misalnya titik (0, 0). Kita substitusikan (0, 0) pada pertidaksamaan $2x + 3y \geq 6 \Leftrightarrow 2(0) + 3(0) \geq 6$ sehingga diperoleh $0 \geq 6$. Berdasarkan substitusi itu terlihat bahwa pertidaksamaan $0 \geq 6$ bernilai salah. Berarti, titik (0, 0) tidak berada pada daerah penyelesaian $2x + 3y \geq 6$. Karena daerah yang diminta adalah $2x + 3y > 6$, titik-titik yang berada pada garis $2x + 3y = 6$ termasuk daerah penyelesaian. Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang tidak diarsir, seperti pada **Gambar 2.2**.

> **Ketahuilah**
>
> Pada buku ini, kita tetapkan bahwa daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan adalah daerah yang bersih (yang tidak diarsir), sedangkan daerah yang diberi arsir *bukan* merupakan daerah himpunan penyelesaian.

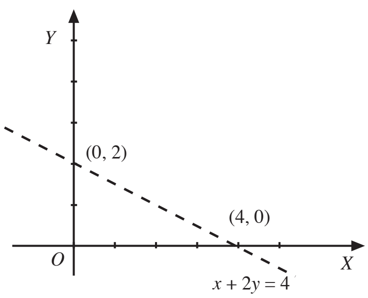
b. $x + 2y < 4$, dengan $x, y \in R$

Titik potong grafik $x + 2y = 4$ dengan sumbu koordinat

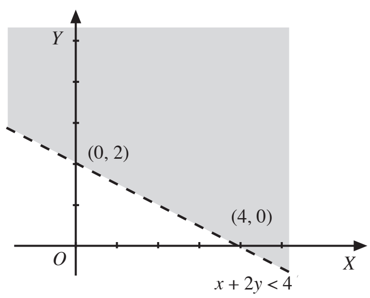
Tabel 2.3

$\boldsymbol{x}$	0	4
$\boldsymbol{y}$	2	0
$\boldsymbol{(x, y)}$	(0, 2)	(4, 0)

Jadi, titik potongnya adalah (0, 2) dan (4, 0). Grafiknya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.3



Gambar 2.4

Kita selidiki titik (0, 0) dengan menyubstitusikannya pada pertidaksamaan $x + 2y < 4$ sehingga diperoleh $0 + 2(0) < 4 \Leftrightarrow 0 < 4$. Terlihat bahwa pertidaksamaan $0 < 4$ benar. Berarti, titik (0, 0) berada pada daerah penyelesaian $x + 2y < 4$, sedangkan garis $x + 2y = 4$ tidak memenuhi pertidaksamaan sehingga digambar putus-putus. Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang tidak diarsir, seperti terlihat pada **Gambar 2.4**.

2. Gambarlah pada bidang Cartesius, himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan berikut, untuk $x, y \in R$.

   a. $\begin{cases} 2x + y \le 4 \\ x + y \le 3 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x, y \ge 0 \\ x + y \le 7 \\ 4x + 3y \le 24 \end{cases}$

Penyelesaian:

a. Sistem pertidaksamaan $2x + y \le 4$ dan $x + y \le 3$, dengan $x, y \in R$

Titik-titik potong garis $2x + y = 4$ dan $x + y = 3$ dengan sumbu koordinat

- Untuk $2x + y = 4$

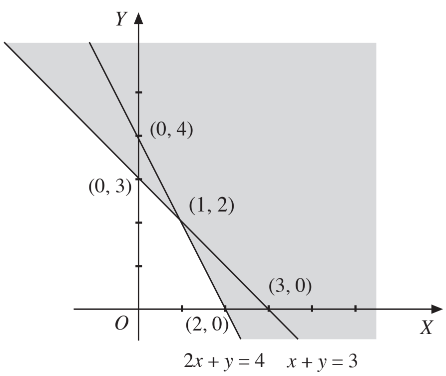
Tabel 2.4

x	0	2
y	4	0
(x, y)	(0, 4)	(2, 0)

- Untuk $x + y = 3$

Tabel 2.5

x	0	3
y	3	0
(x, y)	(0, 3)	(3, 0)



Gambar 2.5

Keterangan:

- Penyelesaian pertidaksamaan $2x + y \le 4$ adalah daerah di sebelah kiri garis $2x + y = 4$ (yang diarsir di sebelah kanan).
- Penyelesaian pertidaksamaan $x + y \le 3$ adalah daerah di sebelah kiri garis $x + y = 3$ (yang diarsir di sebelah kanan).
- Titik potong garis $2x + y = 4$ dan $x + y = 3$

$$\begin{array}{rl} 2x + y & = 4 \\ x + y & = 3 \\ \hline x & = 1 \end{array} \; -$$

Berarti, $x + y = 3 \Leftrightarrow 1 + y = 3 \Leftrightarrow y = 2$.

Jadi, titik potongnya adalah (1, 2).

Dengan demikian, himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $2x + y \le 4$, $x + y \le 3$, untuk $x, y \in R$ adalah daerah yang tidak diarsir (bersih), seperti terlihat pada **Gambar 2.5**.

b. Sistem pertidaksamaan: $x, y \ge 0$, $x + y \le 7$, $4x + 3y \le 24$

Titik-titik potong garis $x + y = 7$ dan $4x + 3y = 24$ dengan sumbu koordinat

- Untuk $x + y = 7$

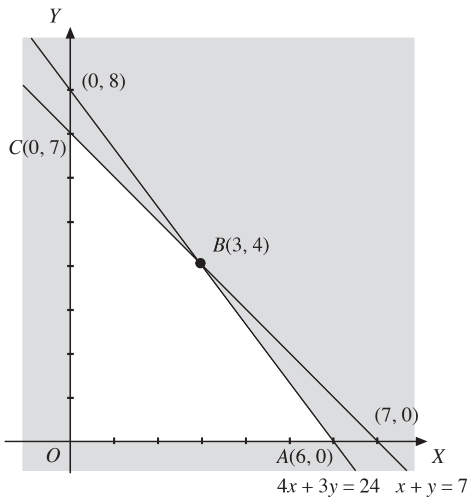
Tabel 2.6

x	0	7
y	7	0
(x, y)	(0, 7)	(7, 0)

- Untuk $4x + 3y = 24$

Tabel 2.7

x	0	6
y	8	0
(x, y)	(0, 8)	(6, 0)



Gambar 2.6

Keterangan:

- Penyelesaian $x \geq 0$ adalah daerah di sebelah kanan sumbu Y.
- Penyelesaian $y \geq 0$ adalah daerah di sebelah atas sumbu X.
- Penyelesaian pertidaksamaan $x + y \leq 7$ adalah daerah di sebelah kiri garis $x + y = 7$.
- Penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 24$ adalah daerah di sebelah kiri garis $4x + 2y = 24$.

- Titik potong antara garis $x + y = 7$ dan $4x + 3y = 24$

$$\begin{array}{ll|l} x + y & = 7 & \times\ 3 \rightarrow 3x + 3y = 21 \\ 4x + 3y & = 24 & \times\ 1 \rightarrow \underline{4x + 3y = 24} \ - \\ & & \qquad\quad -x \quad = -3 \Leftrightarrow x = 3 \end{array}$$

Berarti, $x + y = 7 \Leftrightarrow 3 + y = 7 \Leftrightarrow y = 4$.
Jadi, koordinat titik potongnya adalah (3, 4).
Dengan demikian, himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 7$, $4x + 3y \leq 24$, dengan $x, y \in R$ adalah daerah segi empat $OABC$ yang tidak diarsir, seperti terlihat pada **Gambar 2.6**.

Tugas Kreativitas **Kerjakan di buku tugas**

Dengan cara-cara yang telah kalian pelajari, coba gambarlah daerah penyelesaian

$$\begin{cases} x + y \leq 0 \\ x - y \geq 0 \\ y = \ 1 \end{cases}$$

Ada berapa titik yang termasuk dalam himpunan penyelesaian? Titik manakah itu?

Uji Kompetensi 1 — *Kerjakan di buku tugas*

1. Gambarlah himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear berikut pada bidang Cartesius.
   a. $3x + 5y < 15$
   b. $4x - 6y > 24$
   c. $x + 4y < 12$
   d. $5x - 4y > 20$
   e. $2x + 5y > 20$
   f. $x - 3y > 18$
   g. $6x + 5y \leq 30$
   h. $8x - 6y \leq 48$
2. Gambarlah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear berikut pada bidang Cartesius.
   a. $\begin{cases} x - y \leq -2 \\ 8x + 10\,y \leq 55 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} 2x + 8y \leq 60 \\ 4x + 4y \leq 60 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$
   c. $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x - y \geq -1 \\ 5x + 3y \leq 15 \\ x \geq 0,\ y \leq 0 \end{cases}$
   d. $\begin{cases} 2x + 4y \geq 8 \\ 2x - 5y \geq 0 \\ -x + 5y \leq 5 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$
   e. $\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ 2x + y \leq 10 \\ y \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$
   f. $\begin{cases} 4 \leq x + y \leq 10 \\ -6 \leq x - y \leq 0 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$

B. Merancang Model Matematika yang Berkaitan dengan Program Linear

Matematika mempunyai kaitan yang erat dengan persoalan-persoalan real yang terjadi di tengah kehidupan kita. Persoalan-persoalan seperti ini di antaranya dapat diselesaikan melalui program linear. *Program linear* adalah suatu metode atau program untuk memecahkan masalah optimasi yang mengandung kendala-kendala atau batasan-batasan yang dapat diterjemahkan dalam bentuk sistem pertidaksamaan linear. Penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear ini dapat disajikan dalam daerah himpunan penyelesaian. Di antara beberapa penyelesaian yang terdapat dalam daerah penyelesaian, terdapat satu penyelesaian terbaik yang disebut *penyelesaian optimum*. Jadi, tujuan program linear adalah mencari penyelesaian optimum yang dapat berupa nilai maksimum atau nilai minimum dari suatu fungsi. Fungsi tersebut dinamakan *fungsi sasaran*. Fungsi sasaran disebut juga *fungsi tujuan* atau *fungsi objektif*.

Untuk dapat menyelesaikan program linear, terlebih dahulu kita harus menerjemahkan persoalan (kendala-kendala atau batasan-batasan yang terdapat dalam masalah program linear) ke dalam bahasa matematika yang disebut *model matematika*. Jadi, *model matematika* adalah suatu rumusan matematika (berupa persamaan, pertidaksamaan, atau fungsi) yang diperoleh dari hasil penafsiran atau terjemahan suatu masalah program linear ke dalam bahasa matematika. Model matematika yang baik memuat bagian-bagian yang diperlukan. Untuk lebih jelasnya, lakukan kegiatan berikut.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Sebuah kapal pesiar dapat menampung 150 orang penumpang. setiap penumpang kelas utama boleh membawa 60 kg bagasi dan penumpang kelas ekonomi 40 kg. Kapal itu hanya dapat membawa 8.000 kg bagasi. Jika banyak penumpang kelas utama adalah x dan banyak penumpang kelas ekonomi adalah y maka sistem pertidaksamaan yang harus dipenuhi adalah ....

a. $x + y \leq 150$, $3x + 2y \leq 800$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
b. $x + y \leq 150$, $3x + 2y \leq 400$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
c. $x + y \geq 150$, $3x + 2y \leq 400$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
d. $x + y \leq 150$, $3x + 3y \leq 400$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
e. $x + y \leq 150$, $3x + 3y \leq 800$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Soal Ebtanas SMA, 1996

Kegiatan — Kerjakan di buku tugas

Disajikan permasalahan berikut.

Seorang tukang mebel membuat kursi dan meja. Setidak-tidaknya harus diproduksi 500 mebel, yang terdiri atas kursi dan meja. Pengerjaan kursi memerlukan waktu 2 jam, sedangkan pengerjaan meja memerlukan waktu 5 jam. Waktu yang tersedia 1.500 jam. Harga jual eceran kursi Rp75.000,00 dan meja Rp125.000,00. Bagaimana model matematikanya?

Tujuan:

Membentuk model matematika dari permasalahan tersebut.

Permasalahan:

Bagaimana model matematika dari permasalahan tersebut?

Langkah-Langkah:

1. Misalkan x = banyak kursi dan y = banyak meja.
2. Tulislah pertidaksamaan linear dua variabel untuk jumlah mebel yang diproduksi. Perhatikan kendala bahwa paling sedikit harus diproduksi mebel sebanyak 500 buah.
$$\ldots x + \ldots y \geq 500$$
3. Tulislah pertidaksamaan linear untuk waktu total produksi. Perhatikan kendala bahwa waktu total produksi adalah 1.500 jam.
$$\ldots x + \ldots y \leq 1.500$$
4. Tulis juga dua kendala lainnya, yaitu tiap jenis mebel tidak mungkin negatif.
$$\ldots \geq 0 \text{ dan } \ldots \geq 0$$
5. Tulislah pernyataan untuk fungsi tujuan jika pabrik menginginkan memperoleh pendapatan kotor paling besar.
$$\text{Fungsi tujuan } z = \ldots x + \ldots y$$
6. Simpulkan model matematika yang kalian peroleh.
$$\text{Kendala: } \begin{cases} \ldots x + \ldots y \geq 500 \\ \ldots x + \ldots y \leq 1.500 \\ \ldots \geq 0 \text{ dan } \ldots \geq 0 \end{cases}$$

Fungsi objektif: memaksimumkan $z = \ldots x + \ldots y$

Kesimpulan:

Dari langkah-langkah di atas akan diperoleh model matematika:

Fungsi objektif: memaksimumkan $z = 75.000x + 125.000y$

$$\text{Kendala: } \begin{cases} x + y \geq 500 \\ 2x + 5y \leq 1.500 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$$

Setelah melakukan kegiatan di atas, tentu kalian mampu memahami contoh-contoh berikut dengan mudah.

Contoh:

1. Luas suatu lahan parkir adalah 400 m^2. Luas rata-rata satu mobil dan satu bus masing-masing adalah 8 m^2 dan 24 m^2. Lahan parkir tersebut hanya memuat paling banyak 20 kendaraan. Buatlah model matematika dari persoalan tersebut dengan memisalkan mobil yang sedang diparkir sebanyak x dan bus sebanyak y.

   Penyelesaian:

   Dari keterangan tersebut, diperoleh hubungan sebagai berikut.

   $8x + 24\,y \leq 400$

   $x + y \leq 20$

   Karena x dan y masing-masing menunjukkan banyaknya mobil dan bus, x dan y berupa bilangan cacah. Jadi, model matematika persoalan tersebut adalah

   $$\begin{cases} 8x + 24y \leq 400 \\ x + y \leq 20 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x, y \in C \end{cases}$$

2. Suatu industri rumah tangga memproduksi dua jenis roti, yaitu roti jenis A dan roti jenis B. Roti jenis A memerlukan 150 g tepung dan 50 g mentega. Roti jenis B memerlukan 75 g tepung dan 75 g mentega. Banyaknya tepung yang tersedia adalah 2,25 kg, sedangkan banyaknya mentega yang tersedia adalah 1,25 kg. Pemilik industri rumah tangga itu ingin membuat kedua jenis roti tersebut sebanyak-banyaknya. Buatlah model matematika dari masalah tersebut.

   Penyelesaian:

   Misalkan banyaknya roti jenis A adalah x dan roti jenis B adalah y. Keterangan pada soal di atas dapat dirangkum dalam tabel berikut.

   Tabel 2.8

	Roti Jenis A	Roti Jenis B	Maksimum
Tepung (gram)	$150x$	$75y$	2.250
Mentega (gram)	$50x$	$75y$	1.250

   Banyaknya tepung yang digunakan untuk membuat kedua jenis roti tersebut adalah $(150x + 75y)$ g, sedangkan banyaknya tepung yang tersedia adalah 2.250 g sehingga diperoleh hubungan $150x + 75y \leq 2.250$ atau $2x + y \leq 30$ .... (1)

   Banyaknya mentega yang digunakan untuk membuat kedua jenis roti tersebut adalah $(50x + 75y)$ g, sedangkan banyaknya mentega yang tersedia adalah 1.250 g sehingga diperoleh hubungan $50x + 75y \leq 1.250$ atau $2x + 3y \leq 50$ .... (2)

   Karena x dan y masing-masing menyatakan banyaknya roti, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ .... (3)

   Nilai-nilai x dan y berupa bilangan cacah.

   Karena permasalahannya adalah bagaimana membuat kedua jenis roti sebanyak-banyaknya (memaksimumkan), fungsi objektif atau fungsi sasarannya adalah menentukan $x + y$ maksimum.

Misalkan fungsi sasarannya z maka $z = x + y$.
Pertidaksamaan (1) sampai dengan (3) merupakan kendala (pembatas) sehingga model matematika tersebut dapat ditulis sebagai berikut.
Fungsi objektif: menentukan nilai maksimum $z = x + y$
Kendala: $\begin{cases} 2x + y \le 30 \\ 2x + 3y \le 50 \\ x \ge 0, y \ge 0 \\ x, y \in C \end{cases}$

Problem Solving

Seorang pedagang es menjual dua jenis es krim, yaitu jenis I dan jenis II. Harga beli es krim jenis I adalah Rp700,00 per bungkus dan es krim jenis II Rp600,00 per bungkus. Modal yang dimiliki pedagang tersebut Rp168.000,00, sedangkan termos es yang digunakan untuk menjual es tidak dapat memuat lebih dari 300 bungkus es krim. Keuntungan es krim jenis I adalah Rp300,00 per bungkus dan jenis II adalah Rp200,00 per bungkus. Penjual es itu ingin memperoleh keuntungan sebanyak-banyaknya. Buatlah model matematika dari persoalan tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan banyaknya es krim jenis I adalah x dan jenis II adalah y sehingga dari persoalan di atas, dapat dibuat tabel persoalan berikut.

Tabel 2.9

	Es Krim Jenis I	Es Krim Jenis II	Maksimum
Banyaknya Es Krim	x	y	300
Harga Beli Per Bungkus	$700x$	$600y$	168.000

Karena termos es dapat memuat tidak lebih dari 300 bungkus, sedangkan banyaknya es krim jenis I dan II adalah $(x + y)$ bungkus, diperoleh hubungan
$x + y \le 300$ .... (1)
Modal yang dimiliki Rp168.000, sedangkan uang yang diperlukan untuk membeli kedua jenis es krim adalah $(700x + 600y)$, diperoleh hubungan
$700x + 600y \le 168.000$ atau $7x + 6y \le 1.680$ ....(2)
Karena x dan y menyatakan banyaknya es krim maka $x \ge 0$ dan $y \ge 0$ .... (3)
Nilai-nilai x dan y adalah bilangan cacah. Karena permasalahannya adalah menentukan keuntungan maksimum yang diharapkan oleh pedagang es, fungsi objektifnya adalah menentukan nilai maksimum $z = 300x + 200y$.
Model matematikanya adalah sebagai berikut.
Fungsi objektif: menentukan nilai maksimum $z = 300x + 200y$
Kendala: $\begin{cases} x + y \le 300 \\ 7x + 6y \le 1.680 \\ x \ge 0, y \ge 0 \\ x, y \in C \end{cases}$

Uji Kompetensi 2

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui jumlah dua bilangan nonnegatif x dan y tidak lebih dari 25, sedangkan 4 kali bilangan x ditambah 2 kali bilangan y tidak lebih dari 75. Buatlah model matematika dari persoalan tersebut.
2. Seorang pedagang buah menjual buah mangga dan buah jeruk yang ditempatkan dalam satu keranjang. Daya tampung keranjang itu tidak lebih dari 1.000 buah. Harga satu buah mangga dan satu buah jeruk masing-masing Rp500,00 dan Rp1.000,00. Apabila seluruh buah terjual, uang yang ia peroleh tidak lebih dari Rp750.000,00. Jika banyaknya buah mangga dan buah jeruk masing-masing adalah x dan y, buatlah model matematika dari persoalan tersebut.
3. Harga karcis dalam suatu gedung pertunjukan dibedakan menjadi dua kelompok umur, yaitu anak-anak dan dewasa yang masing-masing seharga Rp2.500,00 dan Rp5.000,00. Jika karcis terjual habis, uang yang terkumpul seluruhnya tidak lebih dari Rp125.000,00, sedangkan daya tampung gedung tersebut paling banyak 1.000 orang. Apabila x dan y masing-masing menyatakan banyaknya anak-anak dan orang dewasa yang mengunjungi suatu pertunjukan di gedung tersebut, tentukan model matematika dari permasalahan tersebut.
4. Seorang anak yang membeli 8 buku tulis dan 5 pensil harus membayar Rp18.500,00. Anak yang lain membeli 4 buku tulis dan 6 pensil harus membayar Rp11.000,00. Jika harga satu buku tulis dan satu pensil masing-masing x dan y, buatlah model matematika untuk persoalan tersebut.
5. Suatu pabrik mainan memproduksi 2 jenis mainan, yaitu jenis I dan II. Keuntungan setiap mainan jenis I adalah Rp3.000,00, sedangkan jenis II Rp5.000,00. Mainan jenis I memerlukan waktu 6 jam untuk membuat bahan-bahannya, 4 jam untuk memasang, dan 5 jam untuk mengepak. Mainan jenis II memerlukan waktu 3 jam untuk membuat bahannya, 6 jam untuk memasang, dan 5 jam untuk mengepak. Suatu pesanan sedang dikerjakan pabrik itu dengan alokasi waktu 54 jam untuk membuat bahan-bahannya, 48 jam untuk memasang, dan 50 jam untuk mengepak. Pabrik tersebut berharap untuk mendapatkan keuntungan maksimum dari pesanan tersebut. Buatlah model matematika dari persoalan tersebut.
6. Seorang ahli pertanian ingin mencampur dua jenis pupuk dengan memberikan 15 g kalium karbonat, 20 g nitrat, dan 24 g fosfat seminimal mungkin pada suatu takaran. Satu takaran pupuk merek I yang harganya Rp75.000,00 per bungkus memerlukan 3 g kalium karbonat, 1 g nitrat, dan 1 g fosfat. Pupuk merek II harganya Rp60.000,00 per bungkus memerlukan 1 g kalium karbonat, 5 g nitrat, dan 2 g fosfat. Buatlah model matematika dari persoalan tersebut agar pengeluarannya sekecil mungkin.

Soal Terbuka — *Kerjakan di buku tugas*

1. Suatu perusahaan mebel mengerjakan proses *finishing* 2 model meja, yaitu model klasik dan modern. Meja model klasik memerlukan waktu 2 jam untuk mengampelas dan 3 jam untuk mewarnai. Meja model modern memerlukan waktu 4 jam untuk mengampelas dan 1 jam untuk mewarnai. Perusahaan tersebut memiliki waktu untuk mengerjakan pesanan selama 60 jam untuk mengampelas dan 80 jam untuk mewarna. Perusahaan tersebut berharap untuk mendapatkan keuntungan sebesar-besarnya dari penjualan meja tersebut. Jika keuntungan penjualan masing-masing meja model klasik dan modern adalah Rp150.000,00 dan Rp180.000,00 per meja, buatlah model matematika dari persoalan tersebut.
2. Seorang peternak menginginkan ternaknya mendapatkan paling sedikit 24 g zat besi dan 8 g vitamin setiap hari. Satu takaran jagung memberikan 2 g zat besi dan 5 g vitamin, sedangkan satu takaran padi-padian memberikan 2 g zat besi dan 1 g vitamin. Peternak itu ingin mencampur bahan makanan tersebut untuk mendapatkan biaya yang semurah-murahnya. Jika harga jagung Rp1.500,00 per bungkus dan harga padi-padian Rp2.500,00 per bungkus, buatlah model matematika dari persoalan tersebut.

C. Menyelesaikan Model Matematika dan Menafsirkannya

Kalian telah mampu merancang model matematika yang berkaitan dengan masalah program linear. Model itu tidak akan banyak berarti jika kalian tidak menyelesaikan permasalahan yang timbul dari model itu. Menyelesaikan model itu sama halnya menentukan nilai optimum (maksimum/minimum) dari fungsi objektifnya, kemudian menafsirkannya pada persoalan semula.

1. Fungsi Objektif *ax* + *by*

Untuk memahami pengertian bentuk objektif $ax + by$, perhatikan kembali model matematika pada contoh-contoh yang telah kita pelajari di atas.

a. Sistem pertidaksamaan linear dua variabel

$$\begin{cases} 2x + y \le 30 \\ 2x + 3y \le 50 \\ x \ge 0,\ y \ge 0, \text{ dengan } x, y \in C \end{cases}$$

Fungsi objektif: memaksimumkan $z = x + y$

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan

$$\begin{cases} 2x + y \le 40 \\ x + 2y \le 40 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$$

terletak pada daerah berbentuk ....

a. trapesium
b. persegi panjang
c. segitiga
d. segi empat
e. segi lima

Soal PPI, 1982

b. Sistem pertidaksamaan linear dua variabel

$$\begin{cases} x + y \le 300 \\ 4x + 3y \le 1.120 \\ x \ge 0, y \ge 0, \text{ dengan } x, y \in C \end{cases}$$

Fungsi objektif: memaksimumkan $z = 25x + 10y$

Dengan memerhatikan kedua model matematika pada contoh di atas, kita ketahui bahwa tujuan yang hendak dicapai dalam suatu model matematika dinyatakan dalam bentuk persamaan $z = ax + by$. Bentuk $ax + by$ yang hendak dioptimumkan (dimaksimumkan atau diminimumkan) tersebut dinamakan fungsi objektif. Dengan kata lain, fungsi objektif dalam program linear adalah fungsi $z = ax + by$ yang hendak ditentukan nilai optimumnya.

2. Menentukan Nilai Optimum Fungsi Objektif

Setelah kita memahami pengertian model matematika dan fungsi objektif, kita dapat mengetahui tujuan yang hendak dicapai dari persoalan program linear, yaitu menentukan nilai optimum suatu fungsi objektif. Langkah-langkah untuk menyelesaikan persoalan program linear secara umum adalah

1. menerjemahkan atau merumuskan permasalahan ke dalam model matematika;
2. menyelesaikan sistem pertidaksamaan yang merupakan kendala atau pembatas;
3. mencari penyelesaian optimum (maksimum atau minimum);
4. menjawab permasalahan.

Berkaitan dengan hal tersebut, kita dapat menggunakan metode grafik yang terdiri atas dua macam cara, yaitu metode uji titik sudut dan metode garis selidik.

a. Metode Uji Titik Sudut

Dengan metode ini, nilai optimum dari bentuk objektif $z = ax + by$ ditentukan dengan menghitung nilai-nilai $z = ax + by$ pada setiap titik sudut (titik verteks) yang terdapat pada daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel. Beberapa nilai yang diperoleh itu, kemudian dibandingkan. Nilai yang paling besar merupakan nilai maksimum dari $z = ax + by$, sedangkan nilai yang paling kecil merupakan nilai minimum dari $z = ax + by$.

Untuk lebih memahami cara menentukan nilai optimum fungsi objektif dengan uji titik sudut, perhatikan contoh-contoh berikut.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Nilai minimum dari $z = 3x + 6y$ yang memenuhi syarat

$$\begin{cases} 4x + y \ge 20 \\ x + y \le 20 \\ x + y \ge 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

adalah ....

a. 50 d. 20
b. 40 e. 10
c. 30

Soal UMPTN, 2001

Contoh:

1. Tentukan nilai optimum bentuk objektif dari model matematika berikut.
   Sistem pertidaksamaan linear dua variabel.
   $$\begin{cases} 2x + y \le 30 \\ 2x + 3y \le 50 \\ x \ge 0,\ y \ge 0, \text{ dengan } x, y \in C \end{cases}$$
   Fungsi objektif: memaksimumkan $z = x + y$

Penyelesaian:

Titik potong garis dengan persamaan $2x + y = 30$ dan $2x + 3y = 50$ dengan sumbu koordinat dapat ditentukan dengan membuat tabel, seperti pada **Tabel 2.10** dan **Tabel 2.11**.

- Untuk $2x + y = 30$

Tabel 2.10

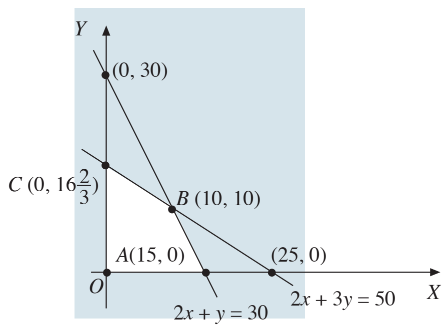
x	0	15
y	30	0
(x, y)	(0, 30)	(15, 0)

- Untuk $2x + 3y = 50$

Tabel 2.11

x	0	25
y	$16\frac{2}{3}$	0
(x, y)	$(0, 16\frac{2}{3})$	(25, 0)

Pasangan koordinat tersebut kita lukis pada bidang koordinat dan dihubungkan dengan sebuah garis lurus. Setelah garis $2x + y = 30$ dan $2x + 3y = 50$ terlukis, tentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $2x + y \le 30$ dan $2x + 3y \le 50$, seperti pada gambar di bawah.



Gambar 2.7

Daerah himpunan penyelesaiannya diperlihatkan sebagai bagian yang bersih (tidak diarsir). Titik potong kedua garis tersebut adalah

$$\begin{array}{rl} 2x + y &= 30 \\ 2x + 3y &= 50 \\ \hline -2y &= -20 \text{ atau } y = 10 \end{array} -$$

Karena nilai $y = 10$ maka $2x + y = 30 \Leftrightarrow 2x + 10 = 30 \Leftrightarrow 2x = 20 \Leftrightarrow x = 10$.
Jadi, koordinat titik potong kedua garis itu adalah (10, 10).
Dari **Gambar 2.7**, tampak bahwa titik-titik sudut yang terdapat pada daerah himpunan penyelesaian adalah titik $O(0, 0)$, $A(15, 0)$, $B(10, 10)$, dan $C(0, 16\frac{2}{3})$.
Selanjutnya, selidiki nilai fungsi objektif $z = x + y$ untuk masing-masing titik sudut tersebut.

Tabel 2.12

Titik	$O(0, 0)$	$A(15, 0)$	$B(10, 10)$	$C(0, 16\frac{2}{3})$
x y	0 0	15 0	10 10	0 $16\frac{2}{3}$
$z = x + y$	0	15	20	$16\frac{2}{3}$

z maksimum

Dari tabel tersebut, nilai maksimum fungsi objektif $z = x + y$ adalah 20, yaitu untuk $x = 10$ dan $y = 10$.

2. Seorang pedagang beras hendak mengangkut 60 ton beras dari gudang ke tokonya. Untuk keperluan tersebut, ia menyewa dua jenis kendaraan, yaitu truk dan pikap. Dalam sekali jalan, satu truk dapat mengangkut 3 ton beras, sedangkan pikap dapat mengangkut 2 ton beras. Untuk sekali jalan, biaya sewa truk adalah Rp50.000,00, sedangkan pikap Rp40.000,00. Dengan cara sewa seperti ini, pedagang beras tersebut diharuskan menyewa kedua kendaraan itu sekurang-kurangnya 24 kendaraan. Berapa banyak truk dan pikap yang harus disewa agar biaya yang dikeluarkan minimum dan berapa biaya minimum tersebut?

Penyelesaian:
Misalkan banyaknya truk adalah x dan banyaknya pikap adalah y. Berdasarkan soal di atas, dapat dibuat tabel sebagai berikut.

Tabel 2.13

	Jenis I	**Jenis II**	**Maksimum**
Banyak Kendaraan Banyak Muatan (ton)	x $3x$	y $2y$	24 60

Dari diagram tersebut, diperoleh sistem pertidaksamaan berikut.

$$\begin{cases} x + y \geq 24 \\ 3x + 2y \geq 60 \\ x \geq 0,\ y \geq 0, \text{ dengan } x, y \in C \end{cases}$$

Fungsi objektif: meminimumkan $z = 50.000x + 40.000y$
Untuk membuat garis $x + y = 24$ dan $3x + 2y = 60$, kita tentukan titik potong garis-garis tersebut terhadap sumbu-sumbu koordinat dengan membuat tabel seperti berikut.

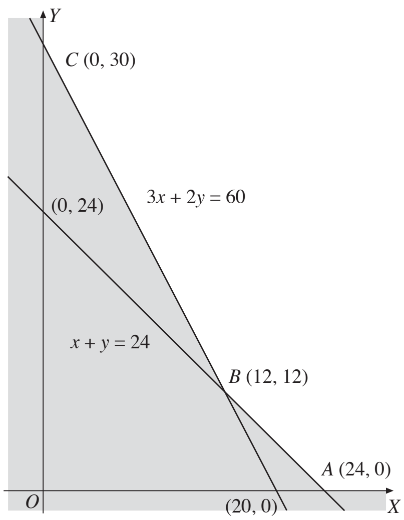
- Untuk $x + y = 24$
- Untuk $3x + 2y = 60$

Tabel 2.14

x	0	24
y	24	0
(*x*, *y*)	(0, 24)	(24, 0)

Tabel 2.15

x	0	20
y	30	0
(*x*, *y*)	(0, 30)	(20, 0)



Gambar 2.8

Daerah penyelesaiannya terlihat pada **Gambar 2.8**.
Menentukan titik potong kedua garis

$$\begin{array}{l|l} x + y = 24 & \times 2 \rightarrow 2x + 2y = 48 \\ 3x + 2y = 60 & \times 1 \rightarrow \underline{3x + 2y = 60} \; - \\ & \qquad\qquad -x = -12 \\ & \qquad\qquad \Leftrightarrow x = 12 \end{array}$$

Karena $x = 12$ maka
$x + y = 24 \Leftrightarrow 12 + y = 24 \Leftrightarrow y = 12$.
Jadi, koordinat titik potong kedua garis itu adalah (12, 12).
Dari gambar di samping, tampak bahwa titik-titik sudut yang terdapat pada daerah penyelesaian adalah $A(24, 0)$, $B(12, 12)$, dan $C(0, 30)$. Nilai bentuk objektif $z = 50.000x + 40.000y$ untuk masing-masing titik tersebut, dapat diselidiki dengan membuat tabel sebagai berikut.

Tabel 2.16

Titik	$A(24, 0)$	$B(12, 12)$	$C(0, 30)$
x ***y***	24 0	12 12	0 30
50.000*x* + 40.000*y*	1.200.000	1.080.000	1.200.000

Dari tabel tersebut, nilai minimum bentuk objektif $z = 50.000x + 40.000y$ adalah 1.080.000, yaitu untuk $x = 12$ dan $y = 12$.
Jadi, banyaknya kendaraan yang harus disewa agar biaya yang dikeluarkan minimum adalah 12 truk dan 12 pikap. Biaya minimumnya adalah Rp1.080.000,00.

b. Metode Garis Selidik $ax + by = k$

Menentukan nilai optimum suatu fungsi objektif dengan menggunakan uji titik sudut memerlukan perhitungan dan waktu yang cukup lama. Untuk itu, sering digunakan metode yang lebih sederhana, yaitu metode garis selidik yang berbentuk $ax + by = k$.

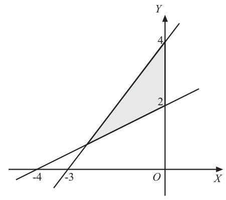
Misalkan terdapat suatu fungsi objektif $z = ax + by$, dengan a dan b bilangan real. Dengan mengambil beberapa nilai k_i untuk z, yaitu $k_1, k_2, \ldots, k_n$, diperoleh n garis selidik yang memiliki persamaan sebagai berikut.

$k_1 = ax + by$
$k_2 = ax + by$
...
$k_n = ax + by$

Garis-garis tersebut mempunyai gradien yang sama, yaitu $m = -\frac{a}{b}$. Dengan demikian, garis-garis tersebut merupakan garis-garis yang sejajar. Apabila digambarkan, sebagian dari garis-garis tersebut terletak pada daerah penyelesaian pertidaksamaan linear (daerah *feasibel*) dan salah satu di antaranya melalui titik optimum. Garis yang melalui titik optimum inilah yang menghasilkan nilai optimum bagi fungsi objektif $z = ax + by$. Garis selidik yang berada paling kanan atau paling atas pada daerah penyelesaian menunjukkan nilai maksimum, sedangkan garis selidik yang berada paling kiri atau paling bawah pada daerah penyelesaian menunjukkan nilai minimum.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas



Pada gambar di atas, daerah yang diwarnai gelap memenuhi sistem pertidaksamaan

a. $y \geq 0, x \leq 0,$ $3y \geq 4x + 12,$ $x - 2y \leq -4$
b. $x \leq 0, 3y \leq 4x + 12,$ $x - 2y \geq -4$
c. $x \leq 0, 2y - x \geq 4,$ $3y \leq 4x + 12$
d. $x \leq 0, y \geq 9,$ $3y \leq 4x + 12,$ $2y - x \leq 4$
e. $y \geq 0, x \leq 0,$ $2y - x \geq 4,$ $3y \geq 4x + 12$

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2004

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

Buktikan bahwa n garis selidik dengan persamaan
$k_1 = ax + by$
$k_2 = ax + by$
....
$k_n = ax + by$ mempunyai gradien $m = -\frac{a}{b}$.

Contoh:

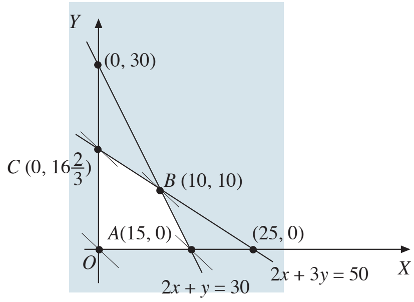
1. Tentukan nilai optimum bentuk objektif model matematika berikut.
Sistem pertidaksamaan linear dua variabel:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 30 \\ 2x + 3y \leq 50 \\ x, y \geq 0, \text{ dengan } x, y \in C \end{cases}$$

Fungsi objektif: memaksimumkan $z = x + y$

Penyelesaian:

Terlebih dahulu kita buat garis $x + y = k$, dengan $k = 0$, yaitu $x + y = 0$. Kemudian, kita buat garis-garis yang sejajar dengan garis $x + y = 0$, yaitu dengan mengambil nilai k yang berbeda-beda, seperti pada gambar di samping.



Gambar 2.9

Dari **Gambar 2.9**, tampak bahwa apabila nilai k makin besar, letak garis-garis $x + y = k$ makin jauh dari titik $O(0, 0)$. Karena nilai k bersesuaian dengan nilai z, nilai z terbesar dan nilai z terkecil bersesuaian dengan garis terjauh dan garis terdekat dari titik $O(0, 0)$. Nilai z maksimum diperoleh dari garis $x + y = k$ yang melalui titik $(10, 10)$, yaitu $10 + 10 = 20$ dan nilai z minimum diperoleh dari garis $x + y = k$ yang melalui titik $O(0, 0)$, yaitu $0 + 0 = 0$.

2. Seperti soal nomor 2 (halaman 48), tetapi selesaikan dengan menggunakan metode garis selidik.

Penyelesaian:

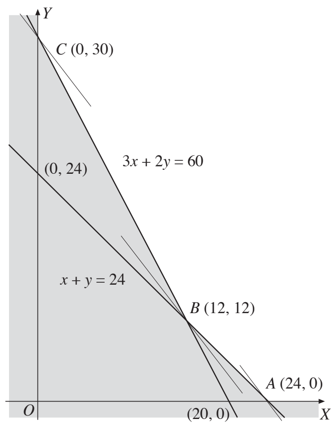
Dari soal yang dimaksud, diperoleh model matematika

$$\begin{cases} x + y \geq 24 \\ 3x + 2y \geq 60 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Fungis objektif:

meminimumkan $z = 50.000x + 40.000y$

Dari informasi soal tersebut, diperoleh himpunan penyelesaian yang dapat dilihat pada gambar di samping.



Gambar 2.10

Terlebih dahulu dibuat garis $50.000x + 40.000y = k$, dengan k berbeda-beda, seperti pada **Gambar 2.10**. Dari gambar itu, tampak bahwa makin kecil nilai k, makin dekat ke titik $O(0, 0)$. Karena nilai k bersesuaian dengan nilai z, maka nilai z terkecil (minimum) bersesuaian dengan garis terdekat dengan titik $O(0, 0)$. Garis terdekat yang dimaksud melalui titik $A(12, 12)$. Jadi, nilai z minimum adalah $z = 50.000(12) + 40.000(12) = 1.080.000$.

Jadi, banyak kendaraan yang harus disewa agar biaya yang dikeluarkan minimum adalah 12 truk dan 12 pikap. Biaya minimumnya adalah Rp1.080.000,00.

Tampak bahwa dengan kedua cara, akan memberikan hasil yang sama.

Problem Solving

Suatu pabrik farmasi memproduksi dua jenis kapsul, yaitu jenis I dan jenis II. Setiap kapsul jenis I mengandung 6 mg vitamin A, 8 mg vitamin C, dan 1 mg vitamin E. Setiap kapsul jenis II mengandung 8 mg vitamin A, 3 mg vitamin C, dan 4 mg vitamin E. Setiap hari, seorang pasien memerlukan tambahan vitamin selain berasal dari makanan dan minuman sebanyak 40 mg vitamin A, 24 mg vitamin C, dan 12 mg vitamin E. Harga satu kapsul jenis I adalah Rp1.000,00 dan kapsul jenis II adalah Rp1.500,00. Berapa banyak uang minimal yang harus disediakan pasien tersebut untuk memenuhi kebutuhan vitaminnya setiap hari.

Penyelesaian:

Misalkan banyaknya kapsul jenis I adalah x dan kapsul jenis II adalah y. Berdasarkan banyaknya kandungan vitamin yang diketahui, dapat dibuat tabel sebagai berikut.

Tabel 2.17

Vitamin	Kapsul Jenis I (mg)	Kapsul Jenis II (mg)	Kebutuhan Minimum (mg)
Vitamin A	$6x$	$8y$	40
Vitamin C	$8x$	$3y$	24
Vitamin E	x	$4y$	12

Model matematikanya adalah sebagai berikut.

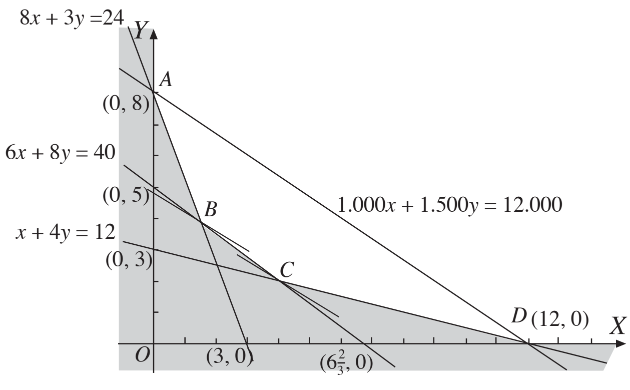
Sistem pertidaksamaan linear:

$$\begin{cases} 6x + 8y \geq 40 \\ 8x + 3y \geq 24 \\ x + 4y \geq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \text{ dengan } x, y \in C \end{cases}$$

Fungsi objektif: meminimumkan

$z = 1.000x + 1.500y$

Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear di atas digambarkan sebagai daerah yang tidak diarsir, seperti pada gambar di samping.



Gambar 2.11

Titik B adalah perpotongan garis $8x + 3y = 24$ dan $6x + 8y = 40$. Koordinat titik B dapat ditentukan dengan metode eliminasi sebagai berikut.

$$\begin{array}{l|l} 8x + 3y = 24 & \times 8 \rightarrow 64x + 24y = 192 \\ 6x + 8y = 40 & \times 3 \rightarrow \underline{18x + 24y = 120} \; - \\ & \qquad\quad\;\; 46x \qquad = 72 \Leftrightarrow x = 1\tfrac{13}{23} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 8x + 3y = 24 & \times 3 \rightarrow 24x + 9y = 72 \\ 6x + 8y = 40 & \times 4 \rightarrow \underline{24x + 32y = 160} \; - \\ & \qquad\quad\;\; -23y = -88 \Leftrightarrow y = 3\tfrac{19}{23} \end{array}$$

Berarti, koordinat titik B adalah $B\left(1\frac{13}{23},\ 3\frac{19}{23}\right)$.

Titik C adalah perpotongan garis $6x + 8y = 40$ dan $x + 4y = 12$. Koordinat titik C dapat ditentukan dengan metode eliminasi sebagai berikut.

$$\begin{array}{l|l} 6x + 8y = 40 & \times\ 1 \rightarrow 6x + 8y = 40 \\ x + 4y\ = 12 & \times\ 2 \rightarrow \underline{2x + 8y = 24}\ - \\ & \qquad\quad\ 4x \qquad = 16 \Leftrightarrow x = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6x + 8y = 40 & \times\ 1 \rightarrow 6x + 8y\ \ = 40 \\ x + 4y\ = 12 & \times\ 6 \rightarrow \underline{6x + 24y = 72}\ - \\ & \qquad\qquad -16y = -32 \Leftrightarrow y = 2 \end{array}$$

Berarti, koordinat titik C adalah $C(4, 2)$.

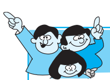
Dari **Gambar 2.11**, nilai minimum dari fungsi objektif $z = 1.000x + 1.500y$ dicapai pada titik $C(4, 2)$ sehingga nilai minimum dari $z = 1.000x + 1.500y = 1.000(4) + 1.500(2) = 4.000 + 3.000 = 7.000$.

Jadi, banyaknya uang minimum yang harus disediakan oleh pasien tersebut adalah Rp7.000,00 setiap hari dengan mengonsumsi 4 kapsul jenis I dan 2 kapsul jenis II.

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan nilai maksimum fungsi sasaran $z = 500x + 400y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan berikut.
   $2x + 3y \le 2.500$
   $x + 7y \le 4.000$
   $x \ge 0, y \ge 0$
2. Sebuah pabrik roti ingin membuat dua jenis roti, yaitu roti A dan B. Pada pembuatan 1 paket roti A diperlukan 50 kg mentega dan 60 kg tepung. Pembuatan 1 paket roti B diperlukan 1 kuintal mentega dan 20 kg tepung. Mentega dan tepung yang tersedia masing-masing adalah 3,5 ton dan 2,2 ton. Jika harga roti A dan B per paketnya masing-masing adalah Rp2.750.000,00 dan Rp3.600.000,00, tentukan jumlah uang hasil penjualan kedua roti tersebut.



Diskusi

Mengomunikasikan Gagasan

Dalam setiap pengerjaan masalah optimasi, mengapa selalu digunakan titik-titik sudut untuk menentukan nilai optimasinya (maksimum atau minimumnya)? Jelaskan menurut pendapat kalian.

Jika koordinat titik optimum tidak bulat, sedangkan titik optimum yang diminta berupa bilangan bulat, perlu diselidiki titik-titik bulat di sekitar titik optimum yang termasuk dalam daerah penyelesaian.

Contoh:

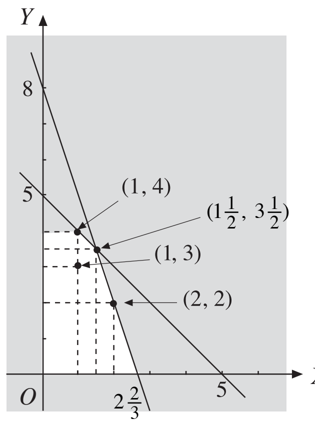
Tentukan nilai maksimum dari fungsi objektif $z = 15x + 10y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear berikut.

$$\begin{cases} x + y \le 5 \\ 3x + y \le 8 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \\ x, y \in C \end{cases}$$

Penyelesaian:

Titik potong garis $x + y = 5$ dan $3x + y = 8$ adalah $\left(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$. Jika x dan y bilangan real, nilai maksimum fungsi $z = 15x + 10y$ dicapai pada titik $\left(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$. Oleh karena itu, perlu diselidiki titik-titik bulat di sekitar $\left(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ dan termasuk dalam daerah penyelesaian, yaitu titik (1, 4), (1, 3), dan (2, 2).

- Untuk titik (1, 4)
  $z = 15x + 10y = 15(1) + 10(4) = 55$
- Untuk titik (1, 3)
  $z = 15x + 10y = 15(1) + 10(3) = 45$
- Untuk titik (2, 2)
  $z = 15x + 10y = 15(2) + 10(2) = 50$



Gambar 2.12

Berarti, nilai maksimum fungsi z dicapai pada titik bulat (1, 4), yaitu $z = 55$.

Uji Kompetensi 3

Kerjakan di buku tugas

1. Dengan metode uji titik sudut, tentukan titik optimum (x, y) dan nilai optimum fungsi objektif dari program linear berikut.

   a. Sistem pertidaksamaan linear:

   $$\begin{cases} 2x + 5y \le 40 \\ 4x + y \le 20 \\ 10 + 5y \le 60 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \\ x, y \in C \end{cases}$$

   Fungsi objektif: memaksimumkan $z = 24x + 8y$

   b. Sistem pertidaksamaan linear:

   $$\begin{cases} 2x + 3y \ge 40 \\ 2x + 2y \ge 28 \\ 8x + 2y \ge 32 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \\ x, y \in C \end{cases}$$

   Fungsi objektif: meminimumkan $z = 3x + 4y$

c. Sistem pertidaksamaan linear:

$$\begin{cases} 4x + 2y \geq 20 \\ 2x + y \geq 14 \\ x + 6y \geq 18 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ x, y \in C \end{cases}$$

Fungsi objektif: meminimumkan $z = 4x + 2y$

2. Dengan metode garis selidik, tentukan nilai optimum fungsi objektif dari program linear berikut.

a. Sistem pertidaksamaan linear:

$$\begin{cases} 2x + 6y \leq 36 \\ 5x + 3y \leq 30 \\ 8x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ x, y \in C \end{cases}$$

Fungsi objektif: memaksimumkan $z = 40x + 50y$

b. Sistem pertidaksamaan linear:

$$\begin{cases} 3x + y \geq 15 \\ x + 5y \geq 20 \\ 3x + 2y \geq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \\ x, y \in C \end{cases}$$

3. Seekor hewan pemakan serangga setiap hari paling sedikit memerlukan 10 unit makanan *A*, 12 unit makanan *B*, dan 12 unit makanan *C*. Untuk memenuhi kebutuhannya, hewan tersebut memakan 2 jenis serangga. Serangga jenis I memberikan masing-masing makanan *A*, *B*, dan *C* sebanyak 5, 2, dan 1 unit setiap ekor. Serangga jenis II memberikan masing-masing makanan *A*, *B*, dan *C* sebanyak 1, 2, dan 4 unit setiap ekor. Untuk menangkap serangga jenis I, hewan tersebut mengeluarkan 3 unit energi, sedangkan untuk menangkap serangga jenis II dikeluarkan 2 unit energi. Berapa ekor jenis serangga masing-masing harus ditangkap hewan tersebut untuk memenuhi kebutuhan makanan dengan mengeluarkan energi minimum?
4. Suatu pabrik baja memproduksi dua tipe baja yang diberi kode baja B_1 dan B_2. Baja B_1 memerlukan 2 jam untuk melebur, 4 jam untuk menggiling, dan 10 jam untuk memotong. Baja B_2 memerlukan 5 jam untuk melebur, 1 jam untuk menggiling, dan 5 jam untuk memotong. Waktu yang tersedia untuk melebur, menggiling, dan memotong masing-masing adalah 40 jam, 20 jam, dan 60 jam. Keuntungan setiap potong baja B_1 dan baja B_2 masing-masing adalah Rp240.000,00 dan Rp80.000,00. Tentukan keuntungan maksimum yang diperoleh.
5. Suatu perusahaan batu kerikil untuk halaman rumah memproduksi dua macam batu kerikil, yaitu kasar dan halus. Batu kerikil kasar memerlukan waktu 2 jam untuk menghancurkan, 5 jam untuk mengayak, dan 8 jam untuk mengeringkan. Batu kerikil yang halus memerlukan waktu 6 jam untuk menghancurkan, 3 jam

untuk mengayak, dan 2 jam untuk mengeringkan. Keuntungan dari masing-masing batu kerikil itu adalah Rp40.000,00 untuk yang kasar dan Rp50.000,00 untuk yang halus. Suatu pesanan dikerjakan perusahaan itu dengan alokasi waktu 36 jam untuk menghancurkan, 30 jam untuk mengayak, dan 40 jam untuk mengeringkan. Tentukan keuntungan maksimum yang diperoleh.

6. Suatu pabrik menghasilkan dua macam barang, yaitu *A* dan *B*. Masing-masing barang diproses melalui dua mesin. Setiap unit barang *A* diproses selama 4 menit di mesin I dan II, sedangkan setiap unit barang *B* diproses selama 2 menit di mesin I dan 4 menit di mesin II. Kapasitas pengoperasian mesin I dan mesin II masing-masing 600 menit dan 480 menit. Dari setiap penjualan satu unit barang A diperoleh laba Rp8.000,00, sedangkan dari penjualan satu unit barang B diperoleh laba Rp6.000,00. Nyatakan komposisi penjualan barang *A* dan *B* yang akan memaksimumkan laba dan tentukan laba maksimumnya.
7. Seorang peternak merasa perlu memberi makanan yang mengandung paling sedikit 27, 21, dan 30 satuan unsur nutrisi *A*, *B*, dan *C* setiap hari kepada ternaknya. Untuk itu, ada dua jenis makanan, yaitu *M* dan *N* yang dapat diberikan kepada ternak tersebut. Satu pon (500 g) jenis makanan *M* mengandung *A*, *B*, dan *C* masing-masing sebesar 3, 1, dan 2 satuan. Satu pon jenis makanan *N* mengandung nutrisi *A*, *B*, dan *C* masing-masing 1, 1, dan 2 satuan. Harga satu pon makanan *M* dan *N* masing-masing sebesar Rp4.000,00 dan Rp2.000,00. Tentukan komposisi kedua jenis makanan tersebut yang meminimumkan pengeluaran serta besarnya pengeluaran minimum peternak tersebut.
8. Suatu pabrik alat-alat pertanian memproduksi dua jenis pompa air. Setiap jenis pompa air harus melalui tiga tahap dalam perakitan. Waktu yang diperlukan dan waktu yang tersedia dalam setiap tahap diperlihatkan dalam tabel berikut.

Tabel 2.18

Perakitan / Jenis Pompa Air	Tahap I	Tahap II	Tahap III
Jenis I	40 jam	24 jam	20 jam
Jenis II	30 jam	32 jam	24 jam
Waktu yang Tersedia	480 jam	480 jam	480 jam

Keuntungan setiap unit pompa air jenis I dan II masing-masing adalah Rp30.000,00 dan Rp50.000,00. Tentukan keuntungan maksimum dan jumlah produksi kedua jenis pompa tersebut agar diperoleh keuntungan maksimum.

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

1. Seorang ahli elektronik merakit alat-alat *stereo-set* yang akan dijual di tokonya. Ia merangkai dua macam produk, yaitu piringan hitam dan pesawat kaset. Dari hasil penjualan piringan hitam, ia memperoleh laba Rp3.000,00 setiap unit

dan dari penjualan pesawat kaset Rp4.500,00 setiap unit. Kedua produk itu harus melalui dua tahap perakitan dan ruang uji. Satu piringan hitam memerlukan 12 jam untuk merakit dan 4 jam untuk menguji, sedangkan pesawat kaset memerlukan 4 jam untuk merakit dan 8 jam untuk menguji. Berdasarkan jadwal setiap bulan, waktu yang tersedia adalah 60 jam untuk merakit dan 40 jam untuk menguji. Tentukan kombinasi terbaik untuk kedua macam produk tersebut agar menghasilkan keuntungan maksimum (terbesar). Tentukan pula besar keuntungan maksimum.

2. Suatu perusahaan alat rumah tangga memproduksi lemari buku dan meja bagi keperluan pelajar. Penjualan setiap lemari buku memberikan laba Rp5.000,00 dan Rp7.500,00 untuk meja. Setiap produk itu melalui dua tahap pengerjaan, yaitu memotong dan merakit. Satu lemari buku memerlukan waktu 4 jam pemotongan dan 4 jam untuk merakit, sedangkan satu meja memerlukan waktu 3 jam pemotongan dan 5 jam untuk merakit. Jika perusahaan menyediakan waktu 40 jam untuk pemotongan dan 30 jam untuk merakit, berapakah laba maksimum dari kedua produk tersebut? Berapa banyak meja dan lemari buku yang harus diproduksi agar diperoleh laba maksimum?

Tugas Informasi Lebih Jauh **Kerjakan di buku tugas**

Agar wawasan kalian bertambah, cobalah cari informasi-informasi yang berkaitan dengan *software* untuk menyelesaikan kasus program linear di media-media yang ada di sekitarmu (perpustakaan, buku-buku referensi, maupun internet). Pelajarilah cara menggunakannya.

Refleksi

Setelah mempelajari materi program linear, tentunya kalian memahami bagaimana cara menerjemahkan persoalan (kasus) sehari-hari ke dalam matematika, untuk kemudian menyelesaikannya. Coba cari contoh kasus yang sesuai dengan materi ini, kemudian terjemahkan dalam bahasa matematika dan selesaikan. Keistimewaan apa yang kalian peroleh setelah mempelajari bab ini?

Rangkuman

1. Sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah suatu sistem (gabungan dua atau lebih) pertidaksamaan linear yang memuat dua variabel.
2. Program linear digunakan untuk memecahkan masalah optimasi.

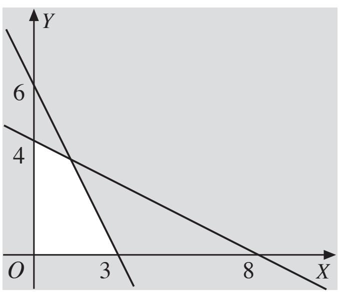
3. Model matematika berupa persamaan, pertidaksamaan, atau fungsi yang diperoleh dari hasil penafsiran atau terjemahan suatu masalah program linear ke dalam bahasa matematika.
4. Untuk memecahkan permasalahan model matematika, hal yang utama adalah memisalkan variabel-variabel dari permasalahannya ke dalam simbol-simbol matematika.
5. Fungsi objektif adalah suatu fungsi yang hendak ditentukan nilai optimumnya pada program linear. Nilai optimum bentuk objektif dapat ditentukan, antara lain dengan
   a. metode uji titik sudut;
   b. metode garis selidik.

Latihan Ulangan Harian II

Kerjakan di buku tugas

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Daerah yang tidak diarsir pada gambar berikut memenuhi sistem pertidaksamaan ....



a. $\begin{cases} 2x + y \le 8 \\ 3x + 2y \le 12 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 2y \ge 8 \\ 3x + 2y \le 12 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + 2y \le 8 \\ 3x + 2y \ge 12 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 2y \ge 6 \\ 3x + 2y \ge 8 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x + y \le 6 \\ x + 2y \le 8 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

2. Nilai maksimum fungsi $z = 400x + 300y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan

$\begin{cases} 5x + 2y \le 30 \\ 2x + 4y \le 28 \\ y \le 6 \\ x \ge 0, y \ge 0 \text{ adalah ....} \end{cases}$

a. 3.000
b. 3.100
c. 3.200
d. 3.300
e. 3.400

3. Jika $A = x + y$ dan $B = 5x + y$, nilai maksimum A dan B yang memenuhi sistem pertidaksamaan

$\begin{cases} x + 2y \le 12 \\ 2x + y \le 12 \\ x \ge 0, y \ge 0 \text{ berturut-turut adalah ....} \end{cases}$

a. 8 dan 30
b. 6 dan 6
c. 6 dan 24
d. 30 dan 6
e. 8 dan 24

4. Untuk memproduksi barang A, diperlukan waktu 6 jam pada mesin I dan 4 jam pada mesin II, sedangkan untuk memproduksi barang B, diperlukan waktu 2 jam pada mesin I dan 8 jam pada mesin II. Kedua mesin tersebut setiap hari bekerja tidak lebih dari 18 jam. Jika setiap hari diproduksi x buah barang A dan y buah barang B, model matematika yang sesuai untuk kasus di atas adalah ....

a. $\begin{cases} 2x + 3y \leq 9 \\ 4x + y \leq 9 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 2y \leq 9 \\ 2x + 4y \leq 9 \\ x \geq 0, y \leq 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + y \leq 9 \\ 2x + 4y \leq 9 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

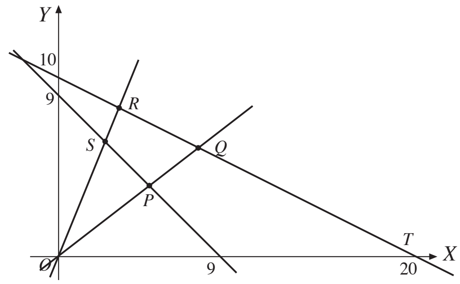
d. $\begin{cases} 3x + y \leq 9 \\ 4x + 2y \leq 9 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 4x + 3y \leq 9 \\ x + 2y \leq 9 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

5. Luas area parkir adalah 176 m^2. Luas rata-rata mobil sedan dan bus masing-masing 4 m^2 dan 20 m^2. Area parkir tersebut hanya mampu menampung 20 kendaraan, dengan biaya parkir untuk mobil dan bus masing-masing Rp1.000,00 per jam dan Rp2.000,00 per jam. Jika dalam waktu 1 jam tidak ada kendaraan yang pergi atau datang, hasil maksimum area parkir tersebut adalah ....
   a. Rp20.000,00 d. Rp34.000,00
   b. Rp26.000,00 e. Rp44.000,00
   c. Rp30.000,00

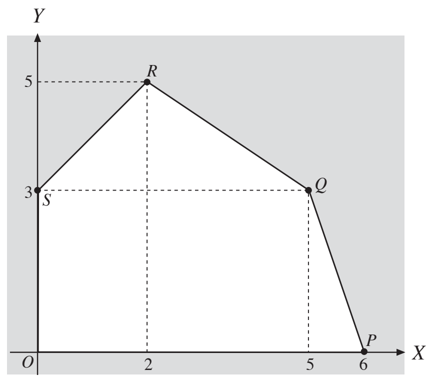
6. Diketahui sistem pertidaksamaan berikut.
   $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ x + y \geq 3 \\ 2 \leq x \leq 4, y \geq 0 \end{cases}$
   Nilai maksimum fungsi sasaran $z = 3x + 2y$ adalah ....
   a. 10 d. 16
   b. 12 e. 18
   c. 14

7. Diketahui sistem pertidaksamaan berikut.
   $\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ x + y \geq 9 \\ x \leq 2y \\ 2x \geq y \end{cases}$



Nilai maksimum fungsi sasaran $z = 3y - x$ terletak di titik ....
   a. P d. S
   b. Q e. T
   c. R

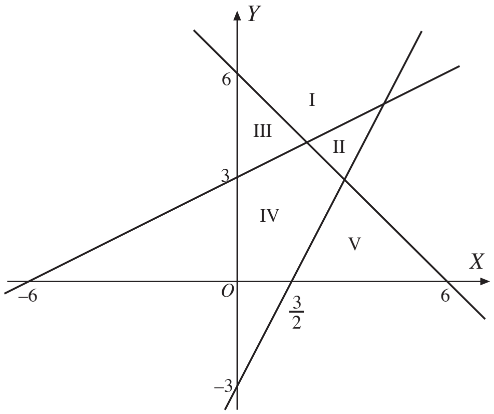
8. Perhatikan gambar berikut.



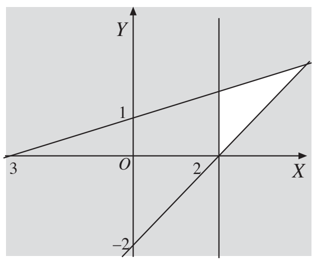
   Jika daerah segi lima tersebut merupakan himpunan penyelesaian dari suatu program linear, fungsi sasaran $z = x + 3y$ mencapai maksimum di titik ....
   a. P d. S
   b. Q e. O
   c. R

9. Nilai minimum $z = x + y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan
   $\begin{cases} 4x + y \geq 4 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ 4x + 3y \leq 12 \end{cases}$
   adalah ....
   a. $1\frac{4}{5}$ d. $2\frac{4}{5}$
   b. $2\frac{1}{5}$ e. $3\frac{1}{5}$
   c. $2\frac{3}{5}$

10. Seorang pemilik toko sepatu ingin mengisi tokonya dengan sepatu jenis *A* sekurang-kurangnya 100 pasang dan jenis sepatu *B* sekurang-kurangnya 150 pasang. Toko tersebut dapat memuat 400 pasang sepatu. Keuntungan yang diperoleh per pasang sepatu jenis *A* adalah Rp10.000,00 dan Rp5.000,00 untuk jenis *B*. Jika banyak sepatu jenis *A* tidak boleh melebihi 150 pasang, keuntungan terbesar yang dapat diperoleh toko tersebut adalah ...
    a. Rp2.750.000,00
    b. Rp3.000.000,00
    c. Rp3.250.000,00
    d. Rp3.500.000,00
    e. Rp3.750.000,00
11. Daerah yang memenuhi penyelesaian sistem pertidaksamaan
    $$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x - y \leq 3 \\ x - 2y + 6 \leq 0 \end{cases}$$
    adalah ....

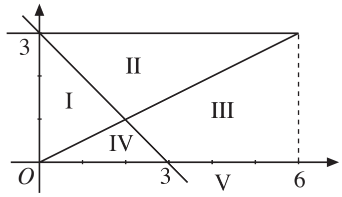


    a. I
    b. II
    c. III
    d. IV
    e. V
12. Seorang pedagang arloji membeli arloji merek *A* seharga Rp60.000,00 dan merek *B* seharga Rp240.000,00. Tas pedagang tersebut hanya mampu memuat tidak lebih dari 30 arloji. Modal pedagang tersebut sebesar Rp3.600.000,00. Jika keuntungan arloji merek *A* adalah Rp25.000,00 dan keuntungan arloji merek *B* adalah Rp75.000,00, jumlah keuntungan maksimum yang dapat diperoleh pedagang itu adalah ....
    a. Rp750.000,00
    b. Rp1.125.000,00
    c. Rp1.250.000,00
    d. Rp2.250.000,00
    e. Rp2.275.000,00
13. Nilai maksimum fungsi $z = 4x + 5y$, dengan syarat $x, y \geq 0$, $x + 2y \leq 10$, dan $x + y \leq 7$ adalah ....
    a. 34
    b. 33
    c. 32
    d. 31
    e. 30
14. Nilai minimum $z = x + y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan
    $$\begin{cases} 4x + y \geq 4 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ 4x + 3y \leq 12 \end{cases}$$
    adalah ....
    a. $1\frac{4}{5}$
    b. $2\frac{1}{5}$
    c. $2\frac{3}{5}$
    d. $2\frac{4}{5}$
    e. $3\frac{1}{5}$
15. Perhatikan gambar berikut.



    Jika daerah yang tidak diarsir adalah himpunan penyelesaian dari suatu program linear, nilai maksimum fungsi sasaran $z = x - y$ terletak pada titik ....
    a. (3, 1)
    b. (4, 1)
    c. $\left(2, \frac{5}{3}\right)$
    d. (3, 2)
    e. $\left(4, \frac{5}{2}\right)$

16. Penyelesaian sistem pertidaksamaan linear
$$\begin{cases} y - 3 < 0 \\ x - 2y < 0 \\ x + y > 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$
pada gambar di bawah adalah ....



a. I
b. II
c. III
d. IV
e. V

17. Seorang anak diharuskan mengonsumsi dua jenis tablet setiap hari. Tablet pertama mengandung 5 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B, sedangkan tablet kedua mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin B. Dalam satu hari, anak itu memerlukan 20 unit vitamin A dan 5 unit vitamin B. Jika harga tablet pertama Rp400,00 per biji dan tablet kedua Rp800,00 per biji, pengeluaran minimum untuk membeli tablet per hari adalah ....
a. Rp1.200,00
b. Rp1.400,00
c. Rp1.600,00
d. Rp1.800,00
e. Rp2.000,00

18. Jika $z = x + 2y$ adalah fungsi sasaran untuk sistem pertidaksamaan linear
$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 5x + 2y \geq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$
nilai maksimum z adalah ....
a. 3
b. 7
c. 11
d. 16
e. tidak ada

19. Dalam himpunan penyelesaian pertidaksamaan
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 2 \\ x + y \leq 6 \\ 2x + 3y \leq 15, \end{cases}$$
nilai minimum dari $3x + 4y$ adalah .... (*UMPTN 1998*)
a. 9
b. 10
c. 11
d. 12
e. 13

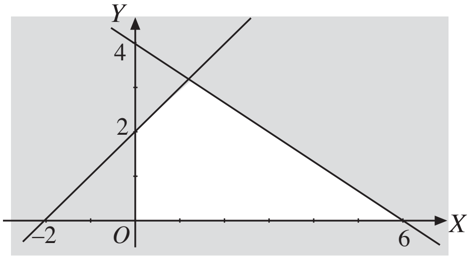
20. Nilai maksimum dari $x + y - 6$ yang memenuhi syarat $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 8y \leq 340$, dan $7x + 4y \leq 280$ adalah .... (*SPMB, 2002*)
a. 52
b. 51
c. 50
d. 49
e. 48

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Gambarlah daerah yang menunjukkan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut.
$$\begin{cases} 7x + 5y \geq 35 \\ 2x + 9y \geq 18 \\ x \leq 9, y \leq 5 \end{cases}$$

2. Tentukan nilai maksimum fungsi sasaran $z = 40x + 10y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear berikut.
$$\begin{cases} 2x + y \geq 12 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

3. Perhatikan gambar berikut.



Tentukan sistem pertidaksamaan linear yang himpunan penyelesaiannya ditunjukkan oleh daerah yang tidak diarsir (bersih).

4. Untuk membuat satu paket roti *A*, diperlukan 50 gram mentega dan 60 gram tepung, sedangkan satu paket roti *B* memerlukan 100 gram mentega dan 20 gram tepung. Jika tersedia 3,5 kilogram mentega dan 2,2 kilogram tepung, tentukan
   a. model matematikanya;
   b. banyaknya masing-masing roti maksimum yang dapat dibuat.

5. Berdasarkan soal nomor 4, jika harga satu paket roti *A* dan *B* masing-masing Rp20.000,00 dan Rp25.000,00, tentukan jumlah uang maksimum yang diperoleh dari penjualan roti tersebut.

Bab III Matriks

Sumber: *Ensiklopedia Pelajar,* 1999

Motivasi

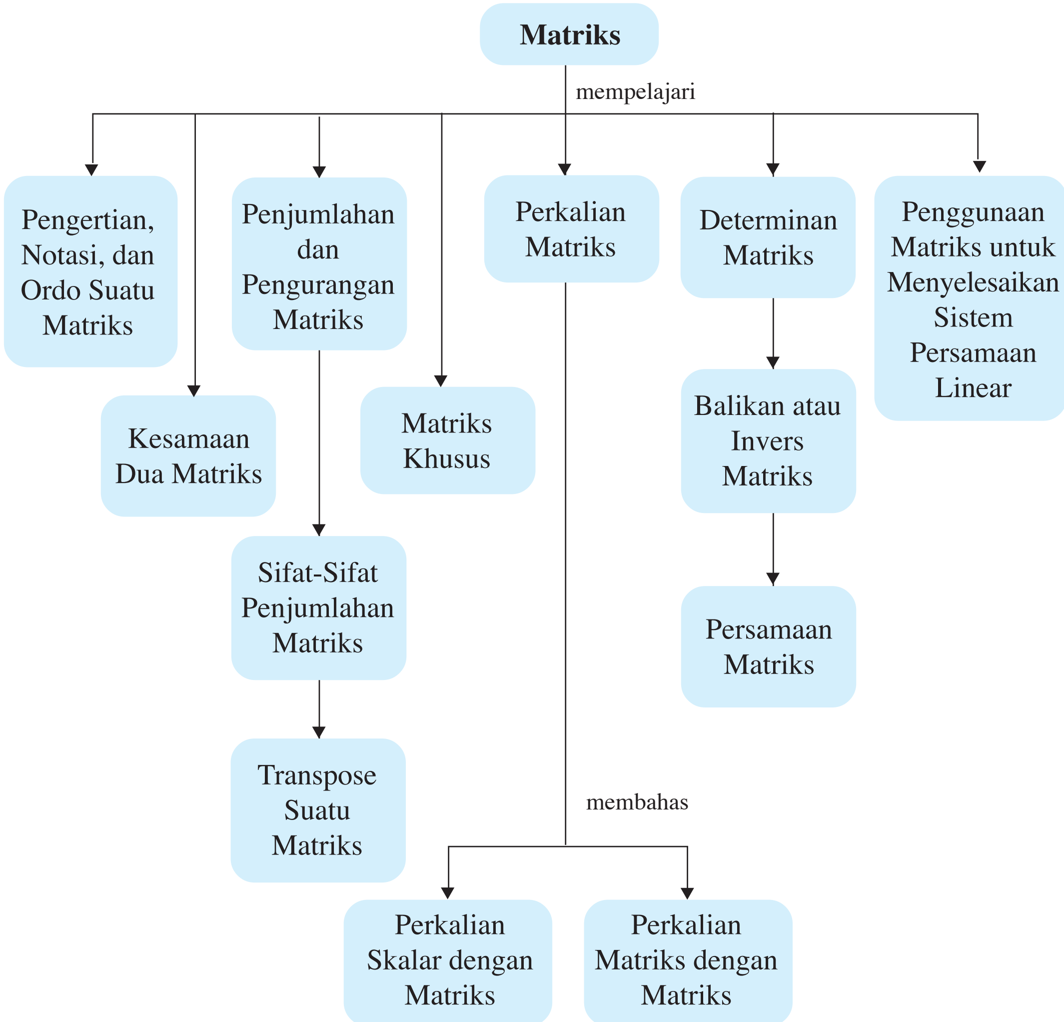
Secara umum matriks merupakan suatu daftar yang berisi angka-angka dan ditulis di dalam tanda kurung. Daftar-daftar yang dapat ditulis dalam bentuk matriks, misalnya perolehan medali dalam suatu permainan olahraga, daftar gaji pegawai, dan daftar nilai siswa.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

1. menjelaskan ciri suatu matriks;
2. menuliskan informasi dalam bentuk matriks;
3. melakukan operasi aljabar atas dua matriks;
4. menentukan determinan matriks persegi ordo 2 dan kaitannya dengan matriks mempunyai invers;
5. menentukan invers matriks persegi ordo 2;
6. membuktikan rumus invers matriks ordo 2;
7. menjelaskan sifat-sifat operasi matriks;
8. menjelaskan sifat-sifat matriks yang digunakan dalam menentukan penyelesaian sistem persamaan linear;
9. menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan invers matriks;
10. menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan determinan.

Peta Konsep



Kata Kunci

- elemen matriks
- matriks
- matriks baris
- matriks diagonal
- matriks identitas
- matriks kolom
- matriks nol
- ordo
- *transpose*

Matriks merupakan bentuk penulisan yang sering kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari, yaitu berupa isi di setiap baris dan kolomnya. Misalnya, pada daftar gaji pegawai, data absensi siswa, dan daftar nilai siswa. Pembahasan matriks pada bab ini meliputi pengertian, notasi, dan ordo suatu matriks, kesamaan dua matriks, penjumlahan dan pengurangan matriks, perkalian bilangan real (skalar) dengan matriks, perkalian matriks, balikan atau invers matriks, dan penggunaan matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua dan tiga variabel.

Sebelum lebih jauh mempelajari bab ini, coba jawablah soal berikut.

Uji Prasyarat — *Kerjakan di buku tugas*

Diketahui sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

$ax + by + cz = p$

$dx + ey + fz = q$

$gx + hy + iz = r$

Susunlah koefisien-koefisien pada sistem persamaan itu dalam tabel berikut.

Tabel 3.1

	Koefisien x	Koefisien y	Koefisien z
Persamaan 1	....	....	....
Persamaan 2	....	....	....
Persamaan 3	....	....	....

Jelaskan arti (makna) angka-angka (elemen) pada tabel itu.

Setelah kalian mampu menjawab permasalahan di atas, mari kita lanjutkan ke materi berikut.

A. Pengertian Dasar tentang Matriks

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak keterangan atau informasi yang disajikan dalam bentuk daftar berisi angka-angka yang disusun menurut baris dan kolom. Misalnya, harga karcis masuk suatu tempat wisata disajikan dalam bentuk daftar seperti berikut.

Tabel 3.2

Pengunjung	Hari Biasa	Hari Minggu
Dewasa	5.000	8.500
Anak-Anak	2.500	3.750

Daftar di atas dapat disusun lebih sederhana dengan menghilangkan judul baris dan judul kolom sehingga tampak sebagai berikut.

5.000	8.500
2.500	3.750

Jika susunan bilangan-bilangan tersebut ditulis di antara dua tanda kurung (bukan kurung kurawal), diperoleh suatu susunan bilangan sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 5.000 & 8.500 \\ 2.500 & 3.750 \end{pmatrix}$$

Susunan bilangan yang demikian disebut *matriks*. Secara umum, matriks dapat didefinisikan sebagai berikut.

> *Matriks* adalah susunan berbentuk persegi panjang dari bilangan-bilangan menurut baris dan kolom serta ditempatkan dalam tanda kurung (kurung biasa atau kurung siku).

Pada matriks di atas 8.000 adalah elemen (unsur) matriks pada baris pertama dan kolom pertama, ditulis $a_{11} = 5.000$. Elemen-elemen yang lain, yaitu 8.500, 2.500, dan 3.750 berturut-turut menunjukkan elemen-elemen matriks pada baris pertama kolom kedua, baris kedua kolom pertama, dan baris kedua kolom kedua. Selanjutnya, ditulis $a_{12} = 8.500$, $a_{21} = 2.500$, dan $a_{22} = 3.750$.

Suatu matriks dinyatakan dengan huruf kapital A, B, C, dan seterusnya. Bilangan-bilangan yang terdapat di dalam matriks dinamakan *elemen matriks*. Adapun bentuk umum matriks A yang mempunyai m baris dan n kolom adalah

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{baris ke-1} \\ \leftarrow \text{baris ke-2} \\ \\ \leftarrow \text{baris ke-}m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{kolom ke-1} & \text{kolom ke-2} & \text{kolom ke-}n \end{array}$$

Keterangan:

a_{ij} adalah elemen pada baris ke-i kolom ke-j matriks A.
$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\mathrm{j}}$ adalah elemen-elemen baris ke-1.
$a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{\mathrm{i}1}$ adalah elemen-elemen kolom ke-1.

Bentuk umum matriks A tersebut ditulis secara singkat menjadi $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Contoh:

1. Hasil ulangan harian (UH) Matematika dari lima orang siswa adalah sebagai berikut.

Tabel 3.3

No.	Nama Siswa	UH 1	UH 2	UH 3
1.	Anik	6	7	7
2.	Nia	5	6	5
3.	Hesti	8	7	8
4.	Ardi	7	7	8
5.	Danar	6	8	7

a. Susunlah data di atas dalam bentuk matriks dengan notasi A.
b. Berapa banyak baris pada matriks A?
c. Sebutkan elemen-elemen pada baris pertama.
d. Berapa banyak kolom pada matriks A?
e. Sebutkan elemen-elemen pada kolom kedua.

Penyelesaian:

a. $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

b. Banyak baris pada matriks A adalah 5.
c. Elemen-elemen baris pertama adalah 6, 7, dan 7.
d. Banyak kolom pada matriks A adalah 3.
e. Elemen-elemen kolom kedua adalah 7, 6, 7, 7, dan 8.

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Tentukan berikut ini.
a. Elemen-elemen pada baris ke-1.
b. Elemen-elemen kolom ke-3.
c. Elemen pada baris ke-1 kolom ke-3.
d. Elemen pada baris ke-2 kolom ke-1.

Penyelesaian:

a. Elemen-elemen pada baris ke-1 adalah 2, 0, dan 1.
b. Elemen-elemen pada kolom ke-3 adalah 1 dan 2.
c. Elemen pada baris ke-1 kolom ke-3 adalah 1.
d. Elemen pada baris ke-2 kolom ke-1 adalah 4.

1. Ordo Matriks

Jika suatu matriks A mempunyai m baris dan n kolom, dikatakan bahwa ordo matriks A adalah $m \times n$, ditulis dengan notasi $A_{m \times n}$. Perhatikan matriks R dan S di bawah ini.

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks R mempunyai ukuran 3 baris dan 2 kolom sehingga dapat dikatakan bahwa matriks R berordo 3×2 dan ditulis $R_{3 \times 2}$. Adapun matriks S mempunyai 1 baris dan 3 kolom sehingga dikatakan bahwa matriks S berordo 1×3 dan ditulis $S_{1 \times 3}$. Secara umum, ordo suatu matriks dapat didefinisikan sebagai berikut.

Ordo suatu matriks adalah ukuran matriks tersebut yang dinyatakan dengan banyak baris kali banyak kolom.

Tugas Observasi **Kerjakan di buku tugas**

Carilah data tentang jumlah penghuni rumah kalian dan susunlah dalam bentuk tabel seperti berikut.

Penghuni	Laki-Laki	Perempuan
Orang tua	....	....
Anak	....	....
PRT	....	....
Famili	....	....

Dari tabel itu, nyatakan dalam sebuah matriks. Ada berapa matriks yang terbentuk? Kemudian, dengan bahasa kalian sendiri, jelaskan arti angka-angka dari setiap elemen matriks yang terbentuk.

2. Transpose Suatu Matriks

Transpose dari matriks A adalah suatu matriks yang diperoleh dengan cara menukar setiap elemen baris matriks A dengan elemen kolom matriks transposenya. Transpose suatu matriks A ditulis dengan lambang A^t atau A'.

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Tentukan transpose dari matriks A dan B.

Penyelesaian:

Berdasarkan pengertian transpose suatu matriks, baris ke-1 matriks A menjadi kolom ke-1 matriks A^t, sedangkan baris ke-2 matriks A menjadi kolom ke-2 matriks A^t. Dengan demikian, diperoleh $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Dengan cara yang sama, jika $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, matriks transposenya adalah $B^t = (-3 \ \ 2 \ \ -5)$.

Tugas Berpikir Kritis **Kerjakan di buku tugas**

Coba cari tahu tentang pengertian matriks simetris. Apakah matriks $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ merupakan matriks simetris? Mengapa?

3. Matriks-Matriks Khusus

a. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah suatu matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya. Jika banyaknya baris pada matriks persegi A adalah n, banyaknya kolom matriks A juga n sehingga ordo matriks A adalah $n \times n$. Secara singkat, matriks A dapat disebut *matriks persegi ordo n*. Elemen $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ disebut *elemen-elemen diagonal utama (pertama)*.

Misalnya:

$A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ merupakan matriks persegi ordo 2, dapat ditulis $A_{2\times 2}$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ merupakan matriks persegi ordo 3, dapat ditulis $B_{3\times 3}$.

Elemen-elemen diagonal utama pada matriks A adalah p dan s, sedangkan elemen-elemen diagonal utama pada matriks B adalah 1, 5, dan 9.

b. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang hanya terdiri atas satu baris.

Misalnya:

$D = (-1 \quad 3)$

$E = (0 \quad 2 \quad -4)$

c. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang hanya terdiri atas satu kolom.

Misalnya:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah suatu matriks persegi dengan setiap elemen yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol.

Misalnya:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e. Matriks Satuan

Matriks satuan adalah suatu matriks diagonal dengan setiap elemen diagonal utama adalah 1. Matriks identitas biasanya dilambangkan dengan I atau I_n, untuk n bilangan asli.

Misalnya:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f. Matriks Nol

Matriks nol adalah suatu matriks yang setiap elemennya nol. Matriks nol berordo $m \times n$ dinotasikan dengan $O_{m \times n}$.

Diskusi

Berpikir Kritis

Kalian tentu mengenal matriks persegi ordo 1. Adakah matriks identitas ordo 1? Jika ada, seperti apakah? Jika tidak ada, berikan alasan seperlunya.

Misalnya:

$$O_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ O_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ O_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

g. Lawan Suatu Matriks

Lawan suatu matriks adalah suatu matriks yang elemen-elemennya merupakan lawan elemen dari matriks semula. Lawan dari suatu matriks A dinotasikan dengan $-A$.
Misalnya:

$$\text{Lawan matriks } A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -7 & -10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ adalah } -A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Diskusi Mengomunikasikan gagasan

Menurutmu, apa keunggulan penyajian suatu data dengan menggunakan matriks? Apakah semua jenis data dapat disajikan dengan matriks? Berikan contoh dan alasan kalian.

Uji Kompetensi 1 Kerjakan di buku tugas

1. Hasil perolehan medali sementara pada suatu Pekan Olahraga Nasional adalah sebagai berikut.

Tabel 3.4

No.	Kontingen	Emas	Perak	Perunggu
1.	Jawa Timur	18	7	6
2.	Jawa Barat	5	9	7
3.	DKI Jakarta	5	4	8
4.	Lampung	4	5	3
5.	DI Yogyakarta	2	3	2

a. Susunlah data di atas dalam bentuk matriks dengan notasi A.
b. Berapa banyak baris dan kolom pada matriks A?
c. Sebutkan elemen-elemen pada baris keempat.
d. Sebutkan elemen-elemen pada kolom pertama.
e. Sebutkan elemen pada baris kedua kolom ketiga.
f. Sebutkan elemen pada baris kelima kolom pertama.

2. Diketahui matriks $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Tentukan ordo matriks B.
b. Tentukan elemen baris kedua kolom keempat.
c. Tentukan elemen baris ketiga kolom ketiga.
d. Tentukan transpose matriks B.

3. Tulislah koefisien dan konstanta sistem persamaan linear dua variabel berikut dalam bentuk matriks lengkap, dengan ordo 2×3.

a. $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 2y - 4x = 6 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4x = 0 \\ 3y = 9 \end{cases}$

4. Matriks $A = (a_{ij})$ ditentukan oleh $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Tentukan ordo matriks A.
b. Hitunglah nilai $a_{22} + a_{32}$, $a_{11} - a_{31}$, dan $a_{22} + a_{12}$.
c. Jika $k = a_{21}$, tentukan nilai $k - k^2 + 6$.
d. Tentukan transpose matriks A.

5. Diketahui matriks $B = (b_{ij})$ ditentukan oleh $B = \begin{pmatrix} u & 3 & 1 \\ -2 & v & 4 \end{pmatrix}$.

Tentukan nilai u dan v jika
a. $3b_{11} = 6b_{23}$ dan $2b_{22} = 4b_{21}$;
b. $2b_{11} - 4b_{22} = 6$ dan $b_{22} = b_{13}$.

B. Kesamaan Dua Matriks

Amatilah matriks-matriks A, B, dan C berikut ini.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 1 \\ 0 & 1+2 \end{pmatrix},\ \text{dan } C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Apa yang dapat kalian katakan tentang matriks-matriks tersebut? Apakah matriks $A = B$? Apakah $A = C$? Mengapa?

Dari ketiga matriks tersebut, tampak bahwa matriks A = matriks B karena ordonya sama dan elemen-elemen yang seletak nilainya sama, sedangkan matriks A tidak sama dengan matriks C karena meskipun ordonya sama, tetapi elemen-elemen yang seletak nilainya tidak sama.

Dua matriks A dan B dikatakan sama, ditulis $A = B$ jika kedua matriks itu ordonya sama dan elemen-elemen yang seletak bernilai sama.

Contoh:

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 3b \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$ adalah dua matriks yang sama. Tentukan nilai a, b, dan c.

Penyelesaian:

Diketahui $A = B$, berarti $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3b \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$.

Berdasarkan sifat kesamaan dua matriks, diperoleh

$a = 1$ $\qquad 2 = 3b \Leftrightarrow b = \frac{2}{3}$

$0 = 0$ $\qquad c = 2a \Leftrightarrow c = 2 \times 1 = 2.$

Oleh karena itu, diperoleh $a = 1$, $b = \frac{2}{3}$, dan $c = 2$.

Uji Kompetensi 2 — **Kerjakan di buku tugas**

1. Tentukan nilai x dan y jika diketahui persamaan matriks berikut.

   a. $\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 3x & -5 \\ y & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ 5x \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 10x - y - 9 \\ 7x + 2y + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 4y + 10 \\ 2x + 6y + 9 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 6 & 3 - x \\ y + 1 & 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & y \\ 2 & 4x \end{pmatrix}$

   e. $\begin{pmatrix} x & -6 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   f. $\begin{pmatrix} x & x + y \\ x - y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

   g. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3}x & 5 & 2 \\ -6 & \frac{3}{4}y & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 2 \\ -6 & 12 & -3 \end{pmatrix}$

   h. $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ x & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 2y & 2 \\ 4 & y \end{pmatrix}$

2. Tentukan nilai a, b, dan c jika diketahui persamaan matriks berikut.

   a. $\begin{pmatrix} 5 & b \\ 7 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a + c \\ a - c & -2 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} a - 2 & 4 \\ b + c & a - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + 7 & c + 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$

3. Tentukan nilai a dan b jika matriks $P = Q^t$.

a. $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2a & b \end{pmatrix}$

b. $P = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 3a & 2b \\ b+2 & 4 \end{pmatrix}$

c. $P = \begin{pmatrix} -a & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -6 \\ -2 & a+b & 4 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} -3 & 2b & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

C. Operasi pada Matriks dan Sifat-Sifatnya

Seperti halnya pada bilangan, matriks juga dapat dioperasikan. Misalnya, dijumlahkan, dikurangkan, dikalikan dengan skalar, dan dikalikan dengan matriks dengan aturan tertentu. Namun, matriks tidak dapat dibagi dengan matriks lain.

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Jumlah matriks A dan B, ditulis $A + B$ adalah suatu matriks baru C yang elemen-elemennya diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen yang seletak dari matriks A dan B. Dengan demikian, syarat agar dua matriks atau lebih dapat dijumlahkan adalah *ordo matriks-matriks itu harus sama*.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Diketahui:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Jika C adalah invers dari $(3A + B)$ maka nilai b sama dengan ....

a. 3 d. 6
b. 4 e. 7
c. 5

Soal SPMB, 2003

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dan $D = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 3 & 3d \end{pmatrix}$.

Tentukan a. $A + B$; b. $B + C$; c. $C + D$.

Penyelesaian:

a. $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1+(-2) & -2+(-4) & 4+0 \\ 2+5 & 3+(-1) & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b. $B + C = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tidak dapat dijumlahkan karena ordonya tidak sama.

c. $$\begin{aligned} C + D &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 3 & 3d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + 2a & b + 0 \\ c + 3 & d + 3d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3a & b \\ c + 3 & 4d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bagaimana dengan pengurangan terhadap matriks? Pengurangan matriks dapat dikerjakan dengan menggunakan sifat seperti pada pengurangan bilangan real, yaitu jika a dan b dua bilangan real maka $a - b = a + (-b)$. Oleh karena itu, untuk dua matriks A dan B, berlaku

$$A - B = A + (-B)$$

dengan $-B$ adalah lawan matriks B. Syarat pengurangan matriks adalah ordo kedua matriks itu harus sama.

Contoh:

1. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Tentukan $A - B$.

   Penyelesaian:

   $$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Carilah matriks X jika $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

   Penyelesaian:

   $$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sifat-Sifat Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Untuk mendapatkan sifat-sifat penjumlahan matriks, lakukan kegiatan berikut.

Kegiatan

Kerjakan di buku tugas

Tujuan:
Menyelidiki sifat-sifat yang berlaku pada penjumlahan dan pengurangan matriks.

Permasalahan:
Sifat apakah yang berlaku pada operasi penjumlahan dan pengurangan matriks?

Langkah-Langkah:

Kerjakan persoalan-persoalan berikut.

1. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, dan

   $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

   Selidiki hasil penjumlahan berikut ini, kemudian simpulkan.
   a. $A + B$
   b. $B + A$
   c. $(A + B) + C$
   d. $A + (B + C)$

2. Diketahui $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

   Apakah $O + P = P + O$?

3. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ dan $-A = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

   Tentukan
   a. $A + (-A)$;
   b. $-A + A$;
   c. Apakah $A + (-A) = -A + A$?

Kesimpulan:
Dari soal 1, 2, dan 3 kalian akan memperoleh sifat-sifat penjumlahan dan pengurangan matriks.

Jika melakukan kegiatan di atas dengan benar, kalian akan memperoleh sifat-sifat berikut.

Jika A, B, dan C adalah matriks-matriks yang berordo sama, pada penjumlahan matriks berlaku sifat-sifat berikut:

a. komutatif sehingga $A + B = B + A$;
b. asosiatif sehingga $(A + B) + C = A + (B + C)$;
c. unsur identitasnya O sehingga $A + O = O + A = A$;
d. invers penjumlahan A adalah $-A$ sehingga $A + (-A) = -A + A = O$.

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

Sifat-sifat di atas dapat kalian buktikan dengan mudah. Coba kalian buktikan sifat-sifat di atas dengan mengambil matriks $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, dan $O = (o_{ij})$, untuk $o_{ij} = 0$. Ingat matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dapat ditulis $A = (a_{ij})$;
$i = 1, 2, ..., m$
$j = 1, 2, ..., n$

Apakah pada pengurangan matriks berlaku sifat komutatif dan sifat asosiatif? Adakah unsur identitasnya? Coba kalian selidiki dengan mengambil beberapa matriks yang dapat dijumlahkan atau dikurangkan. Kemukakan hasilnya.

Uji Kompetensi 3

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

   Tentukan hasil operasi berikut.

   a. $A + B$
   b. $A + C - B$
   c. $A - (B + C)$
   d. $(A - B) + (B - C)$
   e. $C - B - A$
   f. $-B - C - (A + B)$

2. Diketahui $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, dan $R = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

   Tentukan hasil operasi berikut.

   a. $P + Q^t$
   b. $R^t - P + Q$
   c. $P^t + (Q^t - R)$
   d. $(R - P) - Q^t$
   e. $(P + R) - (Q + Q^t)$
   f. $(P - P^t) + (R - R^t)$

3. Diketahui $U = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ dan $V = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 8 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Tentukan hasil operasi berikut.

a. $(U + V)^t$

b. $U^t + V^t$

c. $(U - V)^t$

d. $U^t - V^t$

4. Tentukan matriks A yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} + A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

b. $A + \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$

5. Tentukan nilai x, y, dan z yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\begin{pmatrix} -1 & y \\ x & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & z \\ y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} x & z \\ y & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 1 \\ -3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ x & z \end{pmatrix}$

6. Tentukan nilai a, b, dan c yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\begin{pmatrix} 6 & b & 3 \\ c & a & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & c & a \\ 1 & 7 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ b & -5 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -b \\ a & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 3 \\ c & c \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & b \\ -2 & -5 \\ -1 & a \end{pmatrix}$

Soal Terbuka — *Kerjakan di buku tugas*

1. Tentukan nilai x, y, z, dan u yang memenuhi persamaan

$$\begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & x+y \\ z+u & 3z \end{pmatrix}.$$

2. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 & 0 \\ 5 & -1 & -5 & 4 \\ -7 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ dan

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tentukan matriks X jika $(B - A)^t = X + B^t$.

3. Perkalian Suatu Skalar dengan Matriks

Kita telah mengetahui bahwa penjumlahan bilangan real (skalar) secara berulang dapat dinyatakan sebagai suatu perkalian. Misalnya, $a + a = 2a$, $a + a + a = 3a$, dan seterusnya. Hal tersebut berlaku juga pada operasi matriks. Misalkan diketahui matriks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Oleh karena itu, $A + A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 2A.$

Jadi, perkalian matriks A dengan suatu bilangan asli k adalah penjumlahan berulang matriks A sebanyak k kali. Dengan kata lain, pengertian ini dapat ditulis sebagai berikut. Jika k bilangan real dan A matriks berordo $m \times n$ maka kA didefinisikan dengan

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Tentukan

a. $2A + 5B$;

b. $3A - 2B$.

Penyelesaian:

a. $$\begin{aligned} 2A + 5B &= 2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -10 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 25 & 35 \\ -15 & 20 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 19 & 39 \\ -25 & 24 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 3A - 2B &= 3A + (-2B) \\ &= 3\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \left(-2\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 \\ -15 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -10 & -14 \\ 6 & -8 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -19 & -8 \\ -9 & -2 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Sifat-Sifat Perkalian Skalar

Jika A dan B adalah matriks-matriks berordo $m \times n$, sedangkan k_1 dan k_2 adalah skalar, berlaku sifat-sifat berikut.

a. $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$

b. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

c. $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

Jika A matriks persegi maka berlaku

d. $I \times A = A \times I = A$

e. $(-I)A = -A$

Matriks identitas I merupakan matriks persegi.

Bukti:

Pembuktian sifat-sifat di atas sangat mudah. Untuk itu, di sini akan dibuktikan sifat a saja. Selebihnya dapat kalian kerjakan sebagai bahan latihan.

Misalkan k_1 skalar,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ dan } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$k_1\,(A + B) = k_1 \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}\right]$$

$$= k_1 \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1(a_{11} + b_{11}) & k_1(a_{12} + b_{12}) & \cdots & k_1(a_{1n} + b_{1n}) \\ k_1(a_{21} + b_{21}) & k_1(a_{22} + b_{22}) & \cdots & k_1(a_{2n} + b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1(a_{m1} + b_{m1}) & k_1(a_{m2} + b_{m2}) & \cdots & k_1(a_{mn} + b_{mn}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1a_{11} + k_1b_{11} & k_1a_{12} + k_1b_{12} & \cdots & k_1a_{1n} + k_1b_{1n} \\ k_1a_{21} + k_1b_{21} & k_1a_{22} + k_1b_{22} & \cdots & k_1a_{2n} + k_1b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1a_{m1} + k_1b_{m1} & k_1a_{m2} + k_1b_{m2} & \cdots & k_1a_{mn} + k_1b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1a_{11} & k_1a_{12} & \dots & k_1a_{1n} \\ k_1a_{21} & k_1a_{22} & \dots & k_1a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_1a_{m1} & k_1a_{m2} & \dots & k_1a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1b_{11} & k_1b_{12} & \dots & k_1b_{1n} \\ k_1b_{21} & k_1b_{22} & \dots & k_1b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_1b_{m1} & k_1b_{m2} & \dots & k_1b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= k_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$= k_1 A + k_1 B$ .... (terbukti)

Uji Kompetensi 4

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil perkalian skalar berikut.

   a. $3P$

   b. $-2P$

   c. $-2P^t$

   d. $5P^t$

2. Jika $Q = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$, tentukan hasil perkalian skalar berikut.

   a. $4Q$

   b. $-\frac{1}{2}Q^t$

   c. $\frac{1}{2}(Q + Q^t)$

   d. $\frac{1}{2}(5(Q + Q^t))$

3. Tentukan matriks X yang memenuhi persamaan berikut.

   a. $4X = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$

   b. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 10 & 8 & 6 \end{pmatrix} = X$

   c. $\frac{1}{3}X = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -12 \\ -15 & -3 \end{pmatrix}$

   d. $2\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = X$

4. Tentukan matriks A yang memenuhi persamaan berikut.

   a. $2A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 8 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

   b. $3A^t = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ 3 & 12 & -9 \end{pmatrix}$

   c. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & 10 & 8 \end{pmatrix} = A^t$

   d. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix} = A^t$

5. Tentukan nilai a, b, c, dan d yang memenuhi persamaan berikut.

a. $5\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ c & d \end{pmatrix}$

b. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} b & a \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ d & 1 \end{pmatrix}$

c. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -d & a \\ b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

d. $2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a \\ 16 & b \end{pmatrix}$

5. Perkalian Antarmatriks

Suatu ketika Rini dan Nita membeli alat tulis di koperasi sekolah. Rini membeli 3 buku tulis dan sebatang pensil, sedangkan Nita membeli 2 buku tulis dan 2 pensil. Harga sebuah buku tulis adalah Rp1.000,00 dan harga satu pensil Rp500,00. Berapakah jumlah uang yang harus dibayar Rini dan Nita?

Untuk menyelesaikan permasalahan di atas, kita dapat langsung mengalikan jumlah barang yang dibeli dengan harga satuan. Jumlah uang yang harus dibayar Rini adalah
$(3 \times 1.000) + (1 \times 500) = 3.500$,
sedangkan jumlah uang yang harus dibayar Nita adalah
$(2 \times 1.000) + (2 \times 500) = 3.000$.
Di samping itu, persoalan di atas dapat disajikan dalam bentuk tabel seperti terlihat berikut ini.

Tabel 3.5
Pembelian Barang

	Buku Tulis	Pensil
Rini	3	1
Nita	2	2

Tabel 3.6
Daftar Harga Barang

Nama Barang	Harga Satuan
Buku tulis	1.000
Pensil	500

Jika keperluan Rini kita tulis dalam bentuk matriks baris dan harga satuan barang dalam bentuk matriks kolom, jumlah uang yang harus dibayar Rini dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks berikut.

$$(3 \times 1.000) + (1 \times 500) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.000 \\ 500 \end{pmatrix} = 3.500$$

Dengan cara yang sama, jumlah uang yang harus dibayar Nita dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks.

$$(2 \times 1.000) + (2 \times 500) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.000 \\ 500 \end{pmatrix} = 3.000$$

Hasil perhitungan di atas diperoleh dengan cara mengalikan setiap elemen matriks berordo 1×2 dengan matriks berordo 2×1 yang hasilnya adalah matriks baru berordo 1×1. Untuk mudah dalam mengingatnya, perhatikan bagan berikut.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Perkalian matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ p & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 0$$

mempunyai akar positif x_1 dan x_2. Jika $x_1 = 4x_2$ maka konstanta p =

a. –6
b. –4
c. –2
d. 4
e. 6

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2006

Ordo hasil kali

$$(1 \times 2)(2 \times 1) = (1 \times 1)$$

sama

Jika matriks $A = (a \quad b)$ dikalikan dengan matriks $B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$,

hasilnya adalah $A \times B = (a \quad b)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = (ap + bq)$.

Oleh karena itu, jumlah uang yang harus dibayar Rini dan Nita dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.000 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 \times 1.000) + (1 \times 500) \\ (2 \times 1.000) + (2 \times 500) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.500 \\ 3.000 \end{pmatrix}$$

Pada perkalian matriks di atas, matriks yang dikalikan (matriks yang terletak di sebelah kiri) berordo 2×2, matriks pengalinya (matriks yang terletak di sebelah kanan) berordo 2×1.

Ordo hasil kali

$$(2 \times 2)(2 \times 1) = (2 \times 1)$$

sama

a. Perkalian Matriks Ordo *m* x *q* dengan Matriks Ordo *q* x *n*

Berdasarkan uraian di atas, syarat agar dua matriks A dan B dapat dikalikan adalah banyak kolom matriks A harus sama dengan banyak baris matriks B. Adapun cara mengalikan kedua matriks itu adalah sebagai berikut.

Jika A adalah matriks berordo $m \times q$ dan B adalah matriks berordo $q \times n$, maka $A \times B$ adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ berordo $m \times n$ yang elemen-elemennya diperoleh dari penjumlahan hasil kali elemen-elemen pada baris ke-i matriks A dengan elemen-elemen pada kolom ke-j matriks B yang bersesuaian, dengan $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ -7 & 12 \end{pmatrix}$$

maka $a + b$ = ...

a. 5
b. 4
c. 3
d. 2
e. 1

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2001

Contoh:

Diketahui $A = (2 \;\; 3)$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, dan $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil perkalian matriks berikut.

a. $A \times B$ b. $C \times D$ c. $D \times C$

Penyelesaian:

a. $A \times B = (2 \;\; 3)\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = ((2 \times (-2) + 3 \times 5)) = (11)$

b. $C \times D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ tidak dapat dikalikan karena banyak kolom matriks C tidak sama dengan banyak baris matriks D.

c. $D \times C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (3 \times 1) + (1 \times 6) & (3 \times 4) + (1 \times 3) \\ (2 \times 1) + (0 \times 6) & (2 \times 4) + (0 \times 3) \\ (7 \times 1) + (5 \times 6) & (7 \times 4) + (5 \times 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 2 & 8 \\ 37 & 43 \end{pmatrix}$$

b. Pengertian Dikalikan dari Kiri dan Dikalikan dari Kanan

Pada uraian sebelumnya, kita pelajari bahwa dua matriks A dan B dapat dikalikan jika banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B. Selanjutnya, jika terdapat perkalian dua matriks $A \times B$, dapat dikatakan

a. matriks B dikalikan dari kiri pada matriks A;
b. matriks A dikalikan dari kanan pada matriks B.

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Tentukan hasil perkalian matriks berikut ini.

a. Matriks A dikalikan dari kiri pada matriks B.
b. Matriks A dikalikan dari kanan pada matriks B.

Penyelesaian:

a. Matriks A dikalikan dari kiri pada matriks B, berarti

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

b. Matriks A dikalikan dari kanan pada matriks B, berarti

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dari contoh tersebut, tampak bahwa $AB \neq BA$. Dari hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa perkalian matriks (pada umumnya) tidak bersifat komutatif.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

dan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka

$A^2 - 6A + 3I = ...$

a. $-8A$

b. $-10A$

c. $2A$

d. $4A$

e. $10A$

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2006

c. Perkalian dengan Matriks Satuan dan Sifatnya

Pada pembahasan sebelumnya, dijelaskan bahwa matriks satuan adalah suatu matriks diagonal dengan setiap elemen diagonal utamanya 1. Jika suatu matriks dikalikan dari kiri atau dari kanan dengan matriks satuan, hasilnya adalah matriks itu sendiri. Oleh karena itu, perkalian suatu matriks A dengan matriks satuan memiliki sifat

$$IA = AI = A$$

Dengan demikian, matriks satuan disebut juga *matriks identitas*.

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Tentukan AI dan IA. Bagaimana hasil perkalian itu?

Penyelesaian:

$$AI = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Dengan memerhatikan hasil perkalian di atas, tampak bahwa $AI = IA = A$. Coba kalian selidiki, bagaimana jika A bukan matriks persegi? Apakah $AI = IA = A$? Mengapa?

d. Perpangkatan Matriks Persegi

Seperti halnya pada bilangan real, perpangkatan matriks persegi A didefinisikan sebagai berikut.

Dari pengertian di atas, jika A suatu matriks persegi berordo m,
$A^2 = A \times A$,
$A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A$, dan seterusnya.

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Tentukan

a. A^2;

b. $2A^2 - 3A$.

Penyelesaian:

a. $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

b. $$2A^2 - 3A = 2\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -6 & 16 \\ -16 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 10 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$$

Sekarang, coba kalian selidiki, apakah $A^2 \times A = A \times A^2 = A^3$?
Selidiki pula, apakah $A^3 \times A = A \times A^3 = A^2 \times A^2 = A^4$?

Diskusi Berpikir Kritis

Misalkan diberikan matriks A berordo $m \times n$, dengan $m \neq n$ dan m, n bilangan asli.
Untuk A^k, k bilangan asli, dapatkah ditentukan nilainya? Mengapa?

6. Sifat-Sifat Perkalian Matriks

Untuk memahami sifat-sifat perkalian matriks, perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh:

1. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   a. Tentukan $A \times B$, $B \times C$, dan $A \times C$.
   b. Apakah $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$?
   c. Apakah $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$?

Penyelesaian:

a. $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

$B \times C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

$A \times C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

b. $A \times (B \times C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 16 & -11 \end{pmatrix}$

$(A \times B) \times C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 16 & -11 \end{pmatrix}$

Ternyata $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$. Berarti, perkalian matriks bersifat asosiatif.

c. $A \times (B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

$A \times B + A \times C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

Ternyata $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ berarti perkalian matriks bersifat distributif kanan. Dengan menggunakan contoh di atas, dapat ditunjukkan bahwa perkalian matriks juga bersifat distributif kiri, yaitu $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$.

2. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ dan $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tentukan OA dan AO.

$OA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AO = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dengan demikian, $OA = AO = O$.

3. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   Tentukan hasil perkalian matriks berikut ini.

   a. $(3A)B$
   b. $3(AB)$
   c. $A(3B)$

   Penyelesaian:

   a. $(3A)B = \left[3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 9 \\ 24 & 12 \end{pmatrix}$

   b. $3(AB) = 3\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]$

   $= 3\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 9 \\ 24 & 12 \end{pmatrix}$

   c. $A(3B) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\left[3\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]$

   $= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 9 \\ 24 & 12 \end{pmatrix}$

   Dari hasil perkalian tersebut, tampak bahwa $(3A)B = 3(AB) = A(3B)$. Apakah $3(AB) = (AB)3$? Apakah hal ini termasuk sifat asosiatif? Kemukakan alasan kalian.

Berdasarkan contoh-contoh di atas dan pembahasan sebelumnya, untuk setiap matriks A, B, dan C yang dapat dikalikan atau dijumlahkan, dengan k adalah suatu skalar anggota himpunan bilangan real, pada perkalian matriks berlaku sifat-sifat berikut:

a. Tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$
b. Asosiatif, yaitu $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
c. Distributif kanan, yaitu $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$
d. Distributif kiri, $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$
e. Perkalian dengan skalar k, yaitu $(kA) \times B = k(A \times B)$.
f. Jika perkalian hanya memuat matriks-matriks persegi, terdapat unsur identitas, yaitu I sehingga $AI = IA = A$
g. Perkalian dengan matriks O, yaitu $AO = OA = O$.

Tugas Investigasi **Kerjakan di buku tugas**

Misalkan A, B, C, dan D matriks. Apakah berlaku sifat-sifat berikut?

a. Jika $AB = AC$ dan A bukan matriks nol maka $B = C$.

b. Jika AD matriks nol maka A atau D matriks nol.

Jika ”ya”, buktikan. Jika ’tidak”, carilah contoh matriks A, B, C, dan D sehingga

a. $AB = BC$ dan A bukan matriks, tetapi $B \neq C$.

b. AD matriks nol, tetapi A dan D bukan matriks nol.

Uji Kompetensi 5

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Tentukan hasil perkalian berikut.

   a. $A \times B$
   b. $B \times C$
   c. $A \times C$
   d. $C^t \times A$
   e. $C^t \times B$
   f. $C^t \times A^t$

2. Diketahui $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, dan $R = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Tentukan hasil perkalian berikut.

   a. $P \times (Q \times R)$
   b. $(Q \times R) \times P$
   c. $(P + Q) \times \mathrm{R}$
   d. $Q^t \times R$
   e. $P \times Q^t$
   f. $P \times Q^t \times R^t$

3. Tentukan nilai a dan b yang memenuhi persamaan berikut.

   a. $\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 8 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

   e. $\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 23 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$

4. Tentukan matriks persegi X ordo 2 yang memenuhi persamaan berikut.

   a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

5. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil operasi berikut.
   a. A^2
   b. $A \times A^2$
   c. $A^2 \times A$
   d. A^4

6. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil operasi berikut.
   a. $(A + B)^2$
   b. $A^2 + 2AB + B^2$
   c. $(B - A)^2$
   d. $B^2 - 2BA + A^2$

Soal Terbuka — **Kerjakan di buku tugas**

1. Jika $X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ dan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Tunjukkan bahwa $X^2 + 2X + I = 4\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Selidiki apakah $(X - I)^2 = X^2 - 2X + I$.

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   Tentukan hasil operasi berikut.
   a. A^2
   b. B^2
   c. $A \times B$
   d. $(A - B) \times (A + B)$
   e. $A \times (B + B^t)$
   f. $A^t \times (A^t + B^t)$

D. Balikan atau Invers Matriks

Kalian tentu tahu bahwa balikan (invers) dari 2 adalah 2^{-1} atau $\frac{1}{2}$, invers dari 3 adalah 3^{-1} atau $\frac{1}{3}$, dan seterusnya. Jika kalian cermati, $2 \times 2^{-1} = 1$, $3 \times 3^{-1} = 1$, dan seterusnya. Angka 1 merupakan identitas terhadap perkalian. Operasi invers juga berlaku pada matriks.

Sebelum lebih lanjut mempelajari tentang invers suatu matriks, terlebih dahulu coba kalian pelajari determinan. Untuk lebih mudahnya, determinan yang dipelajari adalah determinan matriks ordo 2 × 2. Mengapa determinan harus dipelajari terlebih dahulu? Karena invers suatu matriks dapat ditentukan jika determinannya diketahui dan determinan itu tidak sama dengan nol.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika matriks

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ maka nilai x yang memenuhi persamaan $|A - xI| = 0$ dengan I matriks satuan dan $|A - xI|$ determinan dari $A - xI$ adalah ....

a. 1 dan –5
b. –1 dan –5
c. –1 dan 5
d. –5 dan 0
e. 1 dan 0

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2001

1. Pengertian Determinan Matriks Ordo 2 x 2

Misalkan terdapat matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yang berordo 2×2.

Elemen a dan d pada matriks tersebut terletak pada diagonal utama (pertama), sedangkan b dan c terletak pada diagonal samping (kedua). *Determinan matriks A* (disingkat "det A") yang berordo 2×2 diperoleh dengan mengurangkan hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dengan hasil kali elemen-elemen pada diagonal kedua. Oleh karena itu, determinan matriks A adalah

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ketahuilah

Determinan suatu matriks ditulis dengan menggunakan garis lurus seperti pada rumus di atas, bukan kurung atau kurung siku seperti halnya pada penulisan matriks.

Contoh:

Tentukan determinan matriks-matriks berikut.

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

a. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (4 \times 1) = 6 - 4 = 2$

b. $\det B = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (6 \times 4) - (8 \times 3) = 24 - 24 = 0$

2. Pengertian Dua Matriks Saling Invers

Dua matriks dikatakan saling invers jika perkalian kedua matriks itu menghasilkan matriks identitas. Pengertian ini tertuang dalam definisi berikut.

Matriks A disebut *invers* dari matriks B jika
$A \times B = B \times A = I$, dengan I adalah matriks identitas.

Invers dari matriks B ditulis B^{-1}, sedangkan invers matriks A dituliskan dengan A^{-1}.

Perhatikan bahwa pada umumnya perkalian matriks tidak bersifat komutatif, tetapi ada yang bersifat komutatif, yaitu perkalian matriks persegi dengan inversnya dan perkalian matriks persegi dengan matriks identitasnya.

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Selidiki apakah A dan B saling invers.

Penyelesaian:

Matriks A dan B saling invers jika berlaku $A \times B = B \times A = I$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Karena $A \times B = B \times A = I$, matriks A dan B saling invers.

Diskusi Berpikir Kritis

Dengan mengingat definisi matriks persegi, invers suatu matriks, dan matriks identitas, serta sifat perkalian matriks, tunjukkan bahwa

a. perkalian matriks persegi dengan inversnya bersifat komutatif;

b. perkalian matriks persegi dengan matriks identitasnya bersifat komutatif.

3. Rumus Invers Matriks Persegi Berordo 2 x 2

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Jika matriks A dikalikan dari kiri dengan matriks $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, diperoleh

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

$$= (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jika hasil perkalian ini dikalikan dengan $\frac{1}{ad - bc}$, untuk $ad - bc \neq 0$, diperoleh

$$\frac{1}{ad - bc}\left[(ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$. Dengan demikian, jika

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Diberikan matriks A, dengan $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; a, b tidak keduanya nol. Jika A^t dan A^{-1} masing-masing menyatakan transpose dan invers dari A, dan $A^t = A^{-1}$ maka a dan b memenuhi ...

a. $a^2 - b^2 = 0$

b. $-a^2 + b^2 = 0$

c. $a^2 - 2b = 1$

d. $a^2 - b^2 = 1$

e. $a^2 + b^2 = 1$

Soal SPMB, Kemampuan IPA, 2004

matriks A dikalikan dari kiri dengan matriks $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, untuk $ad - bc \neq 0$, diperoleh

$$\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Dengan cara yang sama, jika matriks A dikalikan dari kanan dengan matriks $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ untuk $ad - bc \neq 0$, diperoleh

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Berdasarkan pengertian invers suatu matriks, jika hasil kali dua matriks adalah matriks identitas maka matriks yang satu merupakan invers matriks yang lain. Dengan demikian, invers matriks berordo 2×2 dapat dirumuskan sebagai berikut.

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dengan $ad - bc \neq 0$ maka invers matriks A, ditulis A^{-1} adalah

$$A^{-1} = \left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\det\ A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Berdasarkan pengertian di atas, matriks A mempunyai invers jika dan hanya jika $\det A \neq 0$. Matriks semacam ini disebut *matriks nonsingular*. Adapun matriks yang nilai determinannya nol disebut *matriks singular*.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dan $A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ maka matriks B adalah ....

a. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2004

Diskusi

Investigasi

Misalkan A dan B matriks persegi berordo 2×2, apakah berlaku sifat:

a. $\det (AB) = \det A \,.\, \det B$?

b. $\det (A + B) = \det A + \det B$?

Contoh:

Diketahui $Q = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tentukan Q^{-1}.

Penyelesaian:

$\det Q = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (4 \times 2) - (3 \times 1) = 5 \neq 0$. Berarti, Q mempunyai invers.

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Uji Kompetensi 6

Kerjakan di buku tugas

1. Pasangan matriks-matriks manakah yang saling invers?

   a. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

2. Tentukan determinan matriks-matriks berikut.

   a. $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$

   e. $\begin{pmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 3x+1 \end{pmatrix}$

   f. $\begin{pmatrix} -x & 1 \\ x & 2 \end{pmatrix}$

3. Manakah di antara matriks-matriks di bawah ini yang merupakan matriks nonsingular?

   a. $\begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 18 & 9 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

4. Tentukan nilai a pada persamaan berikut.

   a. $\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ a & -4 \end{vmatrix} = 9$

   b. $\begin{vmatrix} a & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -12$

   c. $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 23$

   d. $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -3 & a \end{vmatrix} = -13$

   e. $\begin{vmatrix} a & -3 \\ -a & a \end{vmatrix} = -2$

   f. $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 13 & a^2 \end{vmatrix} = -15$

5. Tentukan invers matriks berikut.

   a. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} -16 & 19 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

6. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$.

   Tentukan
   a. $A^{-1}B^{-1}$
   b. $B^{-1}A^{-1}$
   c. $(AB)^{-1}$
   d. $(BA)^{-1}$

7. Jika $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, tentukan $(A^{-1})^{-1}$.

8. Jika $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, tentukan
   a. $(A^t)^{-1}$
   b. $(A^{-1})^t$

4. Determinan dan Invers Matriks Ordo 3 × 3 (Pengayaan)

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Determinan matriks A dapat ditentukan dengan menggunakan *aturan Sarrus*.

$$\det A = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

$$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \qquad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Selain menggunakan aturan Sarrus, determinan matriks A juga dapat dicari menggunakan rumus berikut.

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

dengan $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ disebut minor elemen a_{11}, $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ disebut minor elemen a_{12}, dan $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ disebut minor elemen a_{13}.

Coba kalian buktikan bahwa rumus yang kedua sama dengan rumus yang pertama.

Secara umum, jika elemen-elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dihilangkan maka diperoleh submatriks berukuran 2×2. Determinan submatriks ini disebut minor elemen a_{ij} ditulis M_{ij}, sedangkan $(-1)^{1+j} M_{ij}$ disebut kofaktor elemen a_{ij} ditulis K_{ij}. Dengan menggunakan beberapa pengertian tersebut, rumus determinan matriks A sebagai berikut.

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} K_{ij} \text{ dengan } i = 1, 2, 3, \text{ atau}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} K_{ij} \text{ dengan } j = 1, 2, 3.$$

Coba kalian tuliskan rumus-rumus determinan matriks A tanpa menggunakan notasi sigma. Bukti rumus ini akan dipelajari di jenjang pendidikan yang lebih tinggi.

5. Rumus Invers Matriks Persegi Ordo 3 × 3 Menggunakan Adjoin

Invers matriks persegi berordo 3×3 dapat ditentukan menggunakan beberapa cara. Pada pembahasan kali ini, akan kita pergunakan dua cara, yaitu mengunakan adjoin dan *transformasi baris elementer*. Namun, kali ini kita hanya akan menggunakan cara adjoin saja. Cara-cara menentukan invers berordo 3×3 dapat diperluas untuk matriks yang ordonya 4×4, 5×5, 6×6, dan seterusnya.

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Untuk menentukan invers matriks A dengan menggunakan adjoin, selain beberapa pengertian yang sudah kalian pelajari sebelumnya ada pengertian yang harus kalian pahami, yaitu tentang kofaktor dari matriks A dan adjoin matriks A.

Kofaktor dari matriks A ditulis

$$\text{kof}(A) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix},$$

sedangkan adjoin dari matriks A ditulis adj(A) adalah transpose dari kof (A)

$$[\text{kof}(A)]^t = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{pmatrix}.$$

Terlebih dahulu, kita tentukan nilai minor M_{ij}.

Dari matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, diperoleh

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Leftrightarrow K_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Dengan cara serupa, diperoleh

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \Leftrightarrow K_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \Leftrightarrow K_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Coba, kalian tentukan K_{21}, K_{22}, K_{23}, K_{31}, K_{32}, dan K_{33}.
Jika kalian telah menentukan kofaktor-kofaktor itu, diperoleh

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Jadi, invers matriks A yang berordo 3×3, yaitu A^{-1} ditentukan dengan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } (A)$$

Bukti rumus ini akan kalian pelajari di jenjang pendidikan yang lebih tinggi.

Contoh:

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. Tentukan berikut ini.

a. $\det A$ b. $\mathrm{adj}(A)$ c. A^{-1}

Penyelesaian:

a. *Cara 1:*

(Dengan menggunakan aturan Sarrus)

$$\begin{aligned}\det A &= 1 \times 6 \times 4 + 3 \times 2 \times 5 + 2 \times 2 \times 9 - 5 \times 6 \times 2 - 9 \times 2 \times 1 - 4 \times 3 \times 2 \\ &= 24 + 30 + 36 - 60 - 18 - 24 \\ &= -12\end{aligned}$$

Cara 2:

(Dengan cara minor-kofaktor untuk baris pertama)

$$\det A = 1\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1(6) - 3(-2) + 2(-12) \\ &= -12\end{aligned}$$

Cobalah dengan cara baris atau kolom yang lain. Apakah hasilnya sama?

b. $K_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 18 = 6$

$K_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 10) = 2$

$K_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 30 = -12$

Coba kalian cari K_{21}, K_{22}, K_{23}, K_{31}, K_{32}, dan K_{33}.

Jika sudah menentukan kofaktor-kofaktor itu, kalian akan memperoleh matriks kofaktor A.

$$\mathrm{kof}(A) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -12 \\ 6 & -6 & 6 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Karena $\mathrm{adj}(A) = [\mathrm{kof}(A)]^t$ maka diperoleh $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -6 \\ 2 & -6 & 2 \\ -12 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

c. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det\ A}\ \text{adj}(A)$

$= -\dfrac{1}{12}\ \text{adj}(A)$

$= -\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 6 & -6 \\ 2 & -6 & 2 \\ -12 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

6. Penyelesaian Persamaan Matriks yang Berbentuk $AX = B$ dan $XA = B$

Misalkan A, B, dan X adalah matriks-matriks persegi berordo 2×2, dengan matriks A dan B sudah diketahui elemen-elemennya. Matriks X yang memenuhi persamaan $AX = B$ dan $XA = B$ dapat ditentukan jika A merupakan matriks nonsingular ($\det A \neq 0$).

Cara menyelesaikan persamaan matriks $AX = B$ dan $XA = B$ adalah sebagai berikut.

Langkah 1: Tentukan invers matriks A, yaitu A^{-1}.

Langkah 2: Kalikan ruas kiri dan ruas kanan persamaan tersebut dengan A^{-1} dari kiri ke kanan.

(Ingat: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ dan $IX = XI = X$).

a. Untuk menyelesaikan persamaan $AX = B$, kalikan kedua ruas persamaan itu dengan A^{-1} dari kiri sehingga diperoleh

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow IX = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$

b. Untuk menyelesaikan persamaan $XA = B$, kalikan kedua ruas persamaan itu dengan A^{-1} dari kanan sehingga diperoleh

$(XA)A^{-1} = BA^{-1}$

$\Leftrightarrow X(AA^{-1}) = BA^{-1}$

$\Leftrightarrow XI = BA^{-1}$

$\Leftrightarrow X = BA^{-1}$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa penyelesaian persamaan $AX = B$ dan $XA = B$, dapat ditentukan dengan rumus berikut.

Penyelesaian persamaan matriks $AX = B$ adalah $X = A^{-1}B$.
Penyelesaian persamaan matriks $XA = B$ adalah $X = BA^{-1}$.

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Tentukan matriks X yang memenuhi persamaan berikut.

a. $AX = B$

b. $XA = B$

Penyelesaian:

Karena $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ maka $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$.

Oleh karena itu, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Karena $AX = B$ maka $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 39 \\ 3 & -22 \end{pmatrix}$.

b. Karena $XA = B$ maka $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 9 & -25 \end{pmatrix}$.

Uji Kompetensi 7

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan determinan dan adjoin matriks-matriks berikut.

   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

   b. $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   c. $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

   d. $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Manakah yang merupakan matriks nonsingular?

   a. $P = \begin{pmatrix} 11 & -4 & 2 \\ -12 & 0 & 0 \\ 16 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

   b. $Q = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 12 \end{pmatrix}$

   c. $R = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -14 \\ 3 & 10 & -6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

   d. $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Tentukan nilai *a* yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ a & 5 & 2 \end{vmatrix} = -6$

b. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & a \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8$

c. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ a & 10 & 3 \end{vmatrix} = 9$

d. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ a & 3 & -4 \\ -3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 12$

4. Tentukan invers matriks-matriks berikut.

a. $K = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

b. $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c. $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d. $N = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

5. Tentukan matriks *X* jika diketahui persamaan berikut.

a. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & -20 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$

c. $X \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 23 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

d. $X \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = (12 \quad 36)$

E. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear

Di awal bab ini, kalian telah dipancing dengan soal prasyarat, bagaimana cara menyajikan koefisien-koefisien sistem persamaan linear ke dalam suatu tabel. Dari tabel itu, tentu kalian akan dapat menyusun sebuah matriks yang berhubungan dengan koefisien-koefisien sistem persamaan linear. Sekarang, mari kita lanjutkan dengan cara menyelesaikan sistem persamaan linear dengan cara matriks.

1. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Sistem persamaan linear dua variabel dapat juga diselesaikan menggunakan matriks. Misalkan terdapat sistem persamaan linear dengan variabel *x* dan *y* sebagai berikut.

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad \text{......} \quad (1)$$

Sistem persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ .... (2)}$$

Persamaan (2) merupakan bentuk persamaan matriks $AX = B$ dengan elemen matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dan $B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Persamaan ini dapat diselesaikan dengan mengalikan matriks A^{-1} dari kiri, seperti yang telah kita pelajari pada pembahasan sebelumnya.

$$\begin{aligned} & A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ \Leftrightarrow\ & (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\ \Leftrightarrow\ & IX = A^{-1}B \\ \Leftrightarrow\ & X = A^{-1}B \end{aligned}$$

Karena $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Karena $B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, matriks $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dapat ditentukan dengan rumus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Jika sistem persamaan tersebut ditulis dalam bentuk matriks, diperoleh

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Persamaan matriks di atas dapat ditulis menjadi $AX = B$, dengan $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dan $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \text{ dan } A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Oleh karena itu,

$$X = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {(–1, 6)}.

2. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (Pengayaan)

Misalkan terdapat sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases} \quad \text{.......................} \quad (1)$$

Sistem persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \text{.......................} \quad (2)$$

Persamaan (2) merupakan bentuk persamaan matriks $AX = B$, dengan

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ dan } B = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \text{.......................} \quad (3)$$

Analog dengan pembahasan pada penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel, persamaan matriks tersebut dapat diselesaikan dengan mengalikan A^{-1} dari kiri sebagai berikut.

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$
$$\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$\Leftrightarrow IX = A^{-1}B$$
$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Dalam hal ini, karena A adalah matriks berordo 3×3 maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A).$$

Oleh karena itu,

$$X = \left(\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)\right)B = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)B$$

Contoh:

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + 2y - 3z = -1 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Sistem persamaan linear di atas dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dari bentuk persamaan matriks tersebut, diperoleh

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 6 + 1) - (4 + 3 - 2) = -6$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ .... (Coba kalian buktikan)}$$

Oleh karena itu,

$$X = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Jadi, penyelesaian dari sistem persamaan linear di atas adalah $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$, dan $z = \frac{3}{2}$.

Soal Terbuka — *Kerjakan di buku tugas*

1. Seorang anak membeli 4 buku tulis dan 3 pensil. Ia harus membayar Rp19.500,00. Jika anak itu membeli 2 buku tulis dan 4 pensil maka anak itu harus membayar Rp16.000,00. Dengan menggunakan invers matriks, tentukan harga sebuah buku tulis dan harga sebuah pensil.
2. Sebuah kios menjual bermacam-macam buah di antaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 2 kg apel, 3 kg salak, dan 1 kg jeruk harus membayar Rp33.000,00. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak, dan 1 kg apel harus membayar Rp23.500,00. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak, dan 3 kg apel harus membayar Rp36.500,00. Dengan menggunakan matriks, tentukan harga masing-masing buah per kg-nya.

3. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan Metode Determinan (Pengayaan)

Kalian telah mempelajari determinan matriks berordo 2 × 2 dan 3 × 3. Sekarang kita akan menggunakan determinan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua dan tiga variabel. Perhatikan sistem persamaan linear berikut.

1. $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$

2. $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = p \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = q \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = r \end{cases}$

Sistem persamaan linear dua variabel di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks $AX = B$, dengan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dan $B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Untuk mendapatkan penyelesaiannya, terlebih dahulu tentukan D, D_x, dan D_y, dengan

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ adalah determinan dari matriks koefisien variabel x dan y.

$D_x = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}$ adalah determinan D, dengan elemen-elemen pada kolom pertama diganti elemen-elemen matriks B, yaitu p dan q.

$D_y = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$ adalah determinan D, dengan elemen-elemen pada kolom kedua diganti elemen-elemen matriks B, yaitu p dan q.

Setelah D, D_x, dan D_y ditentukan, nilai x dan y dapat diperoleh dengan

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ dan } y = \frac{D_y}{D}$$

Dengan cara yang sama, sistem persamaan linear tiga variabel dapat diselesaikan dengan cara berikut.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & p & a_{13} \\ a_{21} & q & a_{23} \\ a_{31} & r & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} p & a_{12} & a_{13} \\ q & a_{22} & a_{23} \\ r & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & p \\ a_{21} & a_{22} & q \\ a_{31} & a_{32} & r \end{vmatrix}$$

Nilai x, y, dan z diperoleh dari

$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D}, \text{ dan } z = \frac{D_z}{D}.$$

Agar kalian dapat memahaminya, perhatikan contoh berikut. Dalam hal ini, diberikan contoh sistem persamaan linear tiga variabel. Jika kalian memahami contoh ini, tentunya kalian akan lebih mudah memahami penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan cara determinan.

Contoh:

Tentukan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan cara determinan.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - y - 2z = -1 \\ 3x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Sistem persaman linear di atas dapat diubah dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, kita dapat menentukan D, D_x, D_y, dan D_z.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (1 - 6 - 8) - (-6 - 2 + 4) = -9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (4 - 6 + 4) - (-6 + 1 + 16) = -9$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1 - 24 + 12) - (-6 - 8 - 6) = 9$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-3 - 3 - 16) - (-12 + 6 + 2) = -18$$

Nilai x, y, dan z ditentukan dengan

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-9}{-9} = 1;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{9}{-9} = -1;\ z = \frac{D_x}{D} = \frac{-18}{-9} = 2$$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan linear tersebut adalah $x = 1$, $y = -1$, dan $z = 2$.

Untuk melatih kalian agar menguasai materi ini, kerjakan Uji Kompetensi 8 nomor 1 dan 2 dengan metode determinan.

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

1. Tentukan penyelesaian sistem persamaan linear berikut.

   a. $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 7x - y = -10 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

2. Tentukan nilai $a + b + c$ jika $\{(a, b, c)\}$ adalah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut.

   a. $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 5x + y + 2z = -1 \\ 3x + 2y + 3z = 8 \end{cases}$

Uji Kompetensi 8

Kerjakan di buku tugas

1. Dengan menggunakan matriks, tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut.

   a. $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$

   d. $\begin{cases} x + 6y = -1 \\ 2x + 3y = -11 \end{cases}$

   e. $\begin{cases} -2x + 4y = 4 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$

   f. $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 5x - 3y = -5 \end{cases}$

   g. $\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 5x + 3y = -6 \end{cases}$

   h. $\begin{cases} -x + 3y = 7 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$

   i. $\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ 2x - 5y = -2 \end{cases}$

   j. $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$

2. Dengan menggunakan matriks, tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut.

   a. $\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ x + 2y - 3z = 7 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x - 2y - z = -3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 26 \\ -2x + 5y + z = -15 \\ x - 3y - 4z = -5 \end{cases}$

   d. $\begin{cases} 5x + y + 3z = 9 \\ x - y - z = -1 \\ -2x + 3y + z = 2 \end{cases}$

   e. $\begin{cases} x + 6y - 4z = 15 \\ -3x + 2y - 5z = -8 \\ 6x - 3y + 2z = 25 \end{cases}$

   f. $\begin{cases} -x + 8y + 2z = 54 \\ 4x - y + 2z = -21 \\ x + 5y - 4z = 3 \end{cases}$

3. Tentukan penyelesaian sistem persamaan berikut.
   (**Petunjuk**: Gunakan pemisalan variabel yang sesuai)

   a. $\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ |x| - |y| = 1 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 21 \\ 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 21 \end{cases}$

4. Misalnya keliling suatu persegi panjang adalah 50 cm dan 5 kali panjangnya dikurangi 3 kali lebarnya sama dengan 45 cm. Buatlah sistem persamaan linearnya. Kemudian, dari sistem persamaan itu, tentukan panjang dan lebar persegi panjang itu dengan menggunakan matriks.

5. Sepuluh tahun lalu umur seorang ayah sama dengan 4 kali umur anaknya. Misalkan jumlah 2 kali umur ayah dan 3 kali umur anaknya sekarang 140 tahun. Buatlah sistem persamaan linear kasus itu, kemudian tentukan umur ayah dan anak sekarang dengan menggunakan matriks.

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

Tiga orang A, B, dan C berbelanja gula, beras, dan telur secara bersamaan. A membeli 2 kg gula, 3 kg beras, dan 1 kg telur; B membeli 1 kg gula, 2 kg beras, dan 2 kg telur; sedangkan C membeli 3 kg gula, 1 kg beras, dan 1 kg telur. Uang yang dibayarkan A, B, dan C berturut-turut adalah Rp17.000,00, Rp18.500,00, dan Rp15.500,00. Buatlah sistem persamaan linearnya, kemudian dengan menggunakan matriks, tentukan harga gula, beras, dan telur per kilogramnya.

Refleksi

Coba ingat kembali materi matriks yang baru saja kalian pelajari. Ternyata kalian menemukan cara yang mudah dalam penyusunan angka-angka dengan cara yang ringkas. Menurut kalian, apakah materi ini dapat diterapkan dalam praktik nyata? Berikan alasan kalian.

Rangkuman

1. Matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang berbentuk persegi panjang dan disusun menurut aturan baris dan aturan kolom.
2. Jika suatu matriks mempunyai m baris dan n kolom, matriks tersebut dikatakan mempunyai ordo $m \times n$.
3. Transpose dari matriks A adalah suatu matriks yang diperoleh dengan cara menukarkan setiap elemen baris matriks A menjadi elemen kolom matriks transposenya.
4. Jika A dan B dua matriks yang ordonya sama, pada penjumlahan berlaku
   $A - B = A + (-B)$.
5. Jika A, B, dan C adalah matriks-matriks yang ordonya sama, pada penjumlahan matriks berlaku
   a. sifat komutatif, yaitu $A + B = B + A$;
   b. sifat asosiatif, yaitu $(A + B) + C = A + (B + C)$;
   c. terdapat unsur identitas, yaitu matriks nol sehingga $A + O = O + A = A$;
   d. setiap matriks A mempunyai invers penjumlahan, yaitu $-A$ sehingga
   $$A + (-A) = -A + A = O.$$
   Pada pengurangan matriks tidak berlaku sifat komutatif, tidak asosiatif, dan tidak terdapat unsur identitas.
6. Jika A, B, dan C adalah tiga matriks yang dapat dijumlahkan atau dikalikan dan k suatu skalar anggota himpunan bilangan real, pada perkalian matriks berlaku sifat-sifat berikut:
   a. tidak komutatif $AB \neq BA$;
   b. asosiatif, yaitu $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;
   c. distributif kiri, yaitu $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$;

d. distributif kanan, yaitu $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$;
e. perkalian dengan skalar k, yaitu $(kA) \times B = k\,(A \times B)$;
f. jika perkalian hanya memuat matriks-matriks persegi, terdapat unsur identitas, yaitu I sehingga $AI = IA = A$;
g. perkalian dengan matriks O, yaitu $AO = OA = O$.

7. Jika k bilangan bulat positif dan A matriks persegi, $A^k = A \times A \times A \times \ldots \times A$ (sebanyak k faktor).
8. Matriks A saling invers dengan matriks B jika $AB = BA = I$, dengan I matriks identitas.
9. Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka invers matriks A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix};\ ad - bc \neq 0.$$ Nilai $ab - bc$ disebut determinan matriks A, disingkat dengan det A. Jika det $A = 0$, matriks A tidak mempunyai invers dan disebut matriks singular, sedangkan jika det $A \neq 0$, matriks A disebut matriks nonsingular.

Latihan Ulangan Harian III

Kerjakan di buku tugas

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Nilai x yang memenuhi persamaan matriks

$$\begin{pmatrix} x-y & 2x+1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 & 9 \\ 4y-3 & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 50 \\ 94 & 60 \end{pmatrix}$$

adalah ....
a. – 25
b. – 20
c. 10
d. 20
e. 25

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Nilai $x + y$ yang memenuhi persamaan $AB - 2B = C$ adalah ....
a. 0
b. 2
c. 6
d. 8
e. 10

3. Jika $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ maka $A^2 - A = ...$

a. $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
e. $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ dan $A^2 = mA + nI$, dengan I matriks identitas ordo 2×2, nilai m dan n berturut-turut adalah ....
a. – 5 dan 10
b. – 5 dan –10
c. 5 dan –10
d. 5 dan 10
e. 10 dan 5

5. Diketahui persamaan matriks $A = 2B^t$, dengan $A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2c-3b & 2a+1 \\ a & b+7 \end{pmatrix}$. Nilai c = ...
   a. 2
   b. 3
   c. 5
   d. 8
   e. 10

6. Jika $\begin{pmatrix} 4 & x-2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -11 & -6 \end{pmatrix}$
   $= 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
   maka nilai x = ...
   a. 0
   b. 10
   c. 13
   d. 14
   e. 25

7. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.
   Jika det A + det B + n det $C = -6$, nilai n = ...
   a. – 2
   b. – 4
   c. 2
   d. 4
   e. – 1

8. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ maka $A^{-1}B$ = ...
   a. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
   d. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
   e. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

9. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ adalah invers dari matriks $B = \begin{pmatrix} x+4 & 1 \\ 6 & 2x+y \end{pmatrix}$, nilai y = ...
   a. – 1
   b. – 2
   c. 3
   d. 4
   e. 5

10. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix}$.
    Nilai n yang memenuhi persamaan det $A - n$ det $B = 30$ adalah ....
    a. 2
    b. – 2
    c. 4
    d. – 4
    e. $\frac{3}{2}$

11. Matriks A yang memenuhi persamaan $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$ adalah ....
    a. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
    c. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
    d. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
    e. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

12. Invers dari matriks $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ adalah ....

a. $\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -7 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} -7 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. Diketahui persamaan linear yang dinyatakan dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Nilai y = ...

a. 26

b. $\frac{13}{7}$

c. $\frac{-13}{7}$

d. $\frac{-26}{7}$

e. $\frac{-13}{14}$

14. Jika $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ penyelesaian dari persamaan

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ maka $\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ =

....

a. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

15. Jika X adalah penyelesaian dari persamaan $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}$ maka matriks X = ...

a. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Tentukan
   a. A^2;
   b. det A.
   c. $A^2 \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   d. $\dfrac{1}{\det A} A^2 \times \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan det A = det B jika

   $A = \begin{pmatrix} 5+x & x \\ 5 & 3x \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 9 & -x \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, tentukan
   a. $A^{-1}B$;
   b. BA^{-1};
   c. AB^{-1};
   d. $B^{-1}A$.

4. Diketahui sistem persamaan linear bentuk matriks berikut.

   a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.200 \\ 6.800 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

   Tentukan nilai $x + 2y + 3a + 4b$.

5. Diketahui sistem persamaan linear dalam bentuk matriks berikut.

   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

   Tentukan nilai $x + y - 10z$.

Latihan Ulangan Umum Semester 1

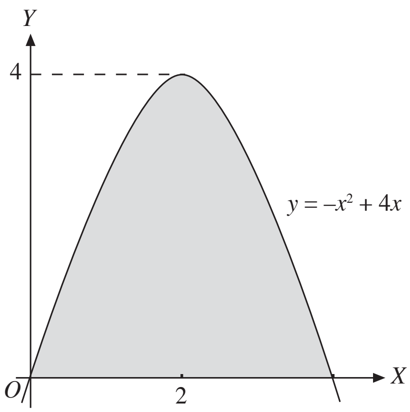
Kerjakan di buku tugas

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Jika $f(x) = x(x + 1)^2$ maka $\int f(x)dx$ adalah ….
   a. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c$
   b. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$
   c. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + -\frac{1}{2}x^2 + c$
   d. $\frac{1}{4}x^4 + -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c$
   e. $\frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c$

2. Nilai dari $\int_0^3 4x(x-1)^2\,dx$ adalah ….
   a. 17
   b. 27
   c. 72
   d. 75
   e. 82

3. Luas daerah yang diarsir berikut ini adalah ....



   a. $6\frac{2}{3}$
   b. $11\frac{2}{3}$
   c. $10\frac{1}{3}$
   d. $10\frac{2}{3}$
   e. $12\frac{1}{3}$

4. Hasil dari $\int (1-x)\sqrt{x}\,dx$ adalah ....
   a. $\frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}} - 5x\sqrt{x} + c$
   b. $\frac{1}{4}x\sqrt{x} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c$
   c. $\frac{1}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}{}^{3}\sqrt{x} + c$
   d. $2x\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} + c$
   e. $3x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$

5. Misalkan $b > 0$ memenuhi
   $\int_1^b (2x-3)dx = 12$. Nilai b = ...
   a. 3
   b. 4
   c. 5
   d. 6
   e. 7

6. Luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - 3x - 4$, sumbu X, garis $x = 2$, dan $x = 6$ adalah ....
   a. $20\frac{5}{6}$ satuan luas
   b. $12\frac{2}{3}$ satuan luas
   c. $5\frac{1}{3}$ satuan luas
   d. 20 satuan luas
   e. $7\frac{1}{3}$ satuan luas

7. Gradien garis singgung grafik fungsi $y = f(x)$ di setiap titik $P(x, y)$ sama dengan dua kali absis titik tersebut. Jika grafik melalui titik (0, 1) $f(x)$ = ...
   a. $-x^2 + x - 1$
   b. $-x^2$
   c. $x^2 + 1$
   d. $x^2 + x - 1$
   e. x^2

8. Diketahui $\frac{df(x)}{dx} = \sqrt[3]{x}$. Jika $f(4) = 19$ maka $f(1) = ...$
   a. 2
   b. 3
   c. 4
   d. 5
   e. 6

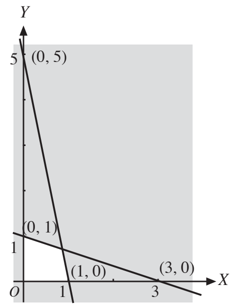
9. Luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $y = 6x - x^2$ dan $y = x^2 - 2x$. Pada interval $0 \le x \le 5$ sama dengan ....
   a. 30 satuan luas
   b. 26 satuan luas
   c. $\frac{64}{3}$ satuan luas
   d. $\frac{50}{3}$ satuan luas
   e. $\frac{14}{3}$ satuan luas

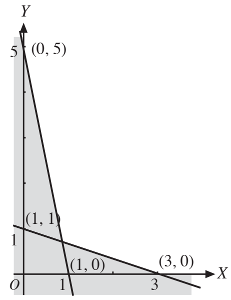
10. Luas daerah tertutup yang dibatasi oleh busur parabola $y = 4x^2$ dan $y^2 = 2x$ adalah ....
   a. $\frac{1}{6}$
   b. $\frac{1}{4}$
   c. $\frac{1}{3}$
   d. $\frac{1}{2}$
   e. 1

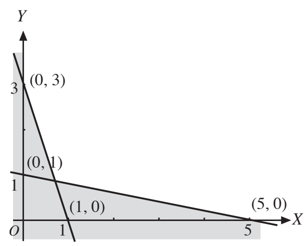
11. Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan
   $2x + y \le 40$
   $x + 2y \le 40$
   $x \ge 0; y \ge 0$
   terletak pada daerah berbentuk ....
   a. trapesium
   b. persegi panjang
   c. segitiga
   d. segi empat
   e. segi lima

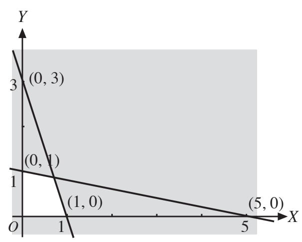
Pada soal berikut, daerah himpunan penyelesaian adalah daerah yang tidak diarsir.

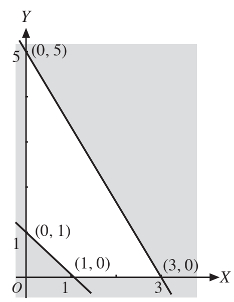
12. Himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $3x + y \le 6$, $2x + 3y \le 12$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ berbentuk bidang ....
   a. segitiga
   b. jajargenjang
   c. segi empat
   d. persegi panjang
   e. segi lima

13. Himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear $5x + y \ge 5$, $3y + x \ge 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ adalah ....
   a.


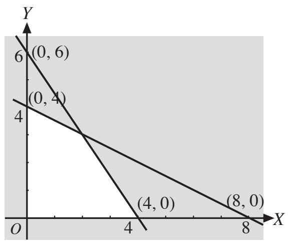
   b.


   c.


   d.


   e.


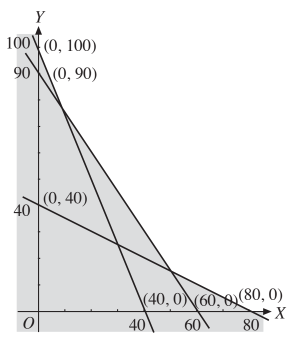
14. Daerah yang tidak diarsir pada gambar berikut menunjukkan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan ....



a. $2x + y \le 8, 3x + 2y \le 12, x \ge 0, y \ge 0$
b. $x + 2y \le 8, 3x + 2y \le 12, x \ge 0, y \ge 0$
c. $x + 2y \le 8, 3x + 2y \le 12, x \ge 0, y \ge 0$
d. $x + 2y \ge 8, 3x + 2y \ge 12, x \ge 0, y \ge 0$
e. $2x + y \le 8, 2x + 3y \le 12, x \ge 0, y \ge 0$

15. Nilai maksimum dari $z = 4x + 3y$, dengan syarat $x + y \le 30, 4x + y \le 60, x \ge 0, y \ge 0$ adalah ....
a. 60
b. 70
c. 80
d. 90
e. 100

16. Daerah yang tidak diarsir pada gambar berikut merupakan himpunan penyelesaian dari ....



a. $x - 2y \ge 80, 3x - 2y \ge 189,$
$5x + 2y \ge 200, x \ge 0, y \ge 0$
b. $x + 2y \ge 80, 3x + 2y \ge 180,$
$5x + 2y \ge 200, x \ge 0, y \ge 0$
c. $x + 2y \ge 0, 3x + 2y \le 180,$
$5x + 2y \ge 200, x \ge 0, y \ge 0$
d. $x - 2y \ge 80, 3x + 2y \ge 180,$
$5x + 2y \ge 200, x \ge 0, y \ge 0$
e. $x - 2y \ge 80, 3x - 2y \ge 180,$
$5x - 2y \ge 200, x \ge 0, y \ge 0$

17. Seorang pemborong akan membangun jembatan dalam dua tipe. Dengan modal Rp120.000.000,00 dia sanggup membangun 35 jembatan. Biaya untuk membangun jembatan tipe I Rp4.000,000,00 dan jembatan tipe II Rp3.000.000,00. Keuntungan yang diperoleh dari jembatan tipe I Rp300.000,00 dan tipe II Rp250.000,00 untuk setiap jembatan. Pemborong ingin mendapatkan keuntungan maksimal. Model matematika dari permasalahan tersebut adalah ....
a. Menentukan nilai maksimum
$z = 300.000x + 250.000y$
Kendala: $x + y \le 35, 4x + 3y \le 120,$
$x, y \ge 0$
b. Menentukan nilai maksimum
$x = 300.000x + 250.000y$
Kendala: $x + y \le 35, 3x + 4y \le 120,$
$x, y \ge 0$
c. Menentukan nilai maksimum
$z = 300.000,00x + 250.000y$
Kendala: $x + y \ge 35, 4x + 3y \ge 120,$
$x, y \ge 0$
d. Menentukan nilai maksimum
$z = 300.000x + 250.000y$
Kendala: $x + y \ge 35, 3x + 4y \ge 120,$
$x, y \ge 0$
e. Menentukan nilai maksimum
$z = 300.000x + 250.000y$
Kendala: $x + y \ge 35, 4x + 3y \le 120,$
$x, y \ge 0$

18. Banyaknya jembatan tipe I dan tipe II yang dibangun oleh pemborong pada soal nomor 11 agar diperoleh keuntungan maksimum berturut-turut adalah ....
a. 20 dan 15
b. 15 dan 20
c. 25 dan 10
d. 10 dan 25
e. 30 dan 5

19. Keuntungan maksimum yang diperoleh pada soal nomor 11 adalah ....
a. Rp5.000.000,00
b. Rp7.000.000,00
c. Rp9.500.000,00
d. Rp10.000.000,00
e. Rp10.500.000,00

20. Tanah seluas 10.000 m^2 akan dibangun rumah tipe A dan tipe B. Untuk rumah tipe A diperlukan 100 m^2 dan tipe B diperlukan 75 m^2. Jumlah rumah yang dibangun paling banyak 125 unit. Keuntungan rumah tipe A adalah Rp6.000.000,00/unit dan tipe B adalah Rp4.000.000,00/unit. Keuntungan maksimum yang dapat diperoleh dari penjualan rumah tersebut adalah ....
    a. Rp550.000.000,00
    b. Rp600.000.000,00
    c. Rp700.000.000,00
    d. Rp800.000.000,00
    e. Rp900.000.000,00

21. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$, dan

    $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

    Nilai $x + y$ yang memenuhi persamaan $AB - 2B = C$ adalah .... *(UMPTN 1998)*
    a. 0 d. 8
    b. 2 e. 10
    c. 6

22. Jika $\begin{pmatrix} 4^{x+2y} & 0 \\ 2 & 3x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

    maka $x + y = ...$
    a. $-\frac{15}{4}$ d. $\frac{15}{4}$
    b. $-\frac{9}{4}$ e. $\frac{21}{4}$
    c. $\frac{9}{4}$

23. $A = \begin{pmatrix} p-1 & p+q \\ p & 2s \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & t \end{pmatrix}$,

    $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Jika $A + B = C^2$

    maka $q + 2t = ...$
    a. –3 d. 0
    b. –2 e. 1
    c. –1

24. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ dan A^T adalah transpose dari matriks A maka baris pertama dari A^TA adalah .... *(UMPTN 1997)*
    a. $\begin{pmatrix} 10 & 1 & 12 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{pmatrix} 10 & 1 & -12 \end{pmatrix}$
    c. $\begin{pmatrix} 10 & -1 & 14 \end{pmatrix}$
    d. $\begin{pmatrix} 10 & -1 & 12 \end{pmatrix}$
    e. $\begin{pmatrix} 10 & -1 & -12 \end{pmatrix}$

25. Ditentukan matriks

    $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & x \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} \frac{x}{3} & -2 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

    Jika $A^{-1} = B^T$ dengan B^T transpose dari B maka nilai $x = ...$
    a. 2 d. 5
    b. 3 e. 6
    c. 4

26. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 5+x & x \\ 5 & 3x \end{pmatrix}$ dan

    $B = \begin{pmatrix} 9 & -x \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$. Jika determinan A dan determinan B sama maka harga x yang memenuhi adalah ....
    a. 3 atau 4
    b. –3 atau 4
    c. 3 atau –4
    d. –4 atau 5
    e. 3 atau –5

27. Hasil kali matriks $(BA)(B + A^{-1})B^{-1} = ...$
    a. $AB + I$
    b. $BA + I$
    c. $A + B^{-1}$
    d. $A^{-1} + B$
    e. $AB + A$

28. Persamaan matriks:

    $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ merupakan persamaan dua garis lurus yang berpotongan di titik yang jumah absis dan ordinatnya sama dengan ....

    a. 0 d. 4
    b. 2 e. 5
    c. 3

29. Hasil kali matriks

    $A \times \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 30 \\ 35 & 27 \end{pmatrix}$.

    Matriks A adalah .... *(UM-UGM 2004)*

    a. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

    b. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

    c. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

30. Transpose dari matriks P adalah P^T. Jika matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}$, dan

    $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ memenuhi $A - B^T = C$ maka $x + y = ...$ *(SPMB 2004)*

    a. –2 d. 1
    b. –1 e. 2
    c. 0

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Tentukan hasil integral-integral berikut.
   a. $\int (2x-3)^3\, dx$
   b. $\int (1-(2x+1)^2)^3\, dx$
2. Diketahui persamaan parabola $y = 4x - x^2$ dan garis $y = 2x - 3$.
   a. Gambarkan sketsa parabola dan garis tersebut.
   b. Tentukan koordinat titik potong parabola dan garis.
   c. Nyatakan luas daerah yang dibatasi parabola dan garis dengan integral tentu.
   d. Hitunglah luas tersebut.
3. Andaikan A adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = -x + 3x$, dan sumbu X.
   a. Gambarkan sketsa dari A dan B tersebut;
   b. Tentukan luas A.
4. Seorang pemilik toko sepatu ingin mengisi tokonya dengan sepatu jenis A sekurang-kurangnya 100 pasang dan jenis sepatu B sekurang-kurangnya 150 pasang. Toko tersebut dapat memuat 400 pasang sepatu. Keuntungan yang diperoleh per pasang sepatu jenis A adalah Rp10.000,00 dan Rp5.000,00 untuk jenis B. Jika banyak sepatu jenis A tidak boleh melebihi 150 pasangan, tentukan keuntungan terbesar yang dapat diperoleh toko tersebut.
5. Diketahui:

   $B = \begin{pmatrix} x+y & x \\ -1 & x-y \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{2} \\ -2y & 3 \end{pmatrix}$

   dan matriks A merupakan transpose matriks B. Jika $A = C$, tentukan nilai $x - 2xy + y$.

Bab IV

Barisan dan Deret

Sumber: *Ensiklopedia Pelajar*, 1999

Motivasi

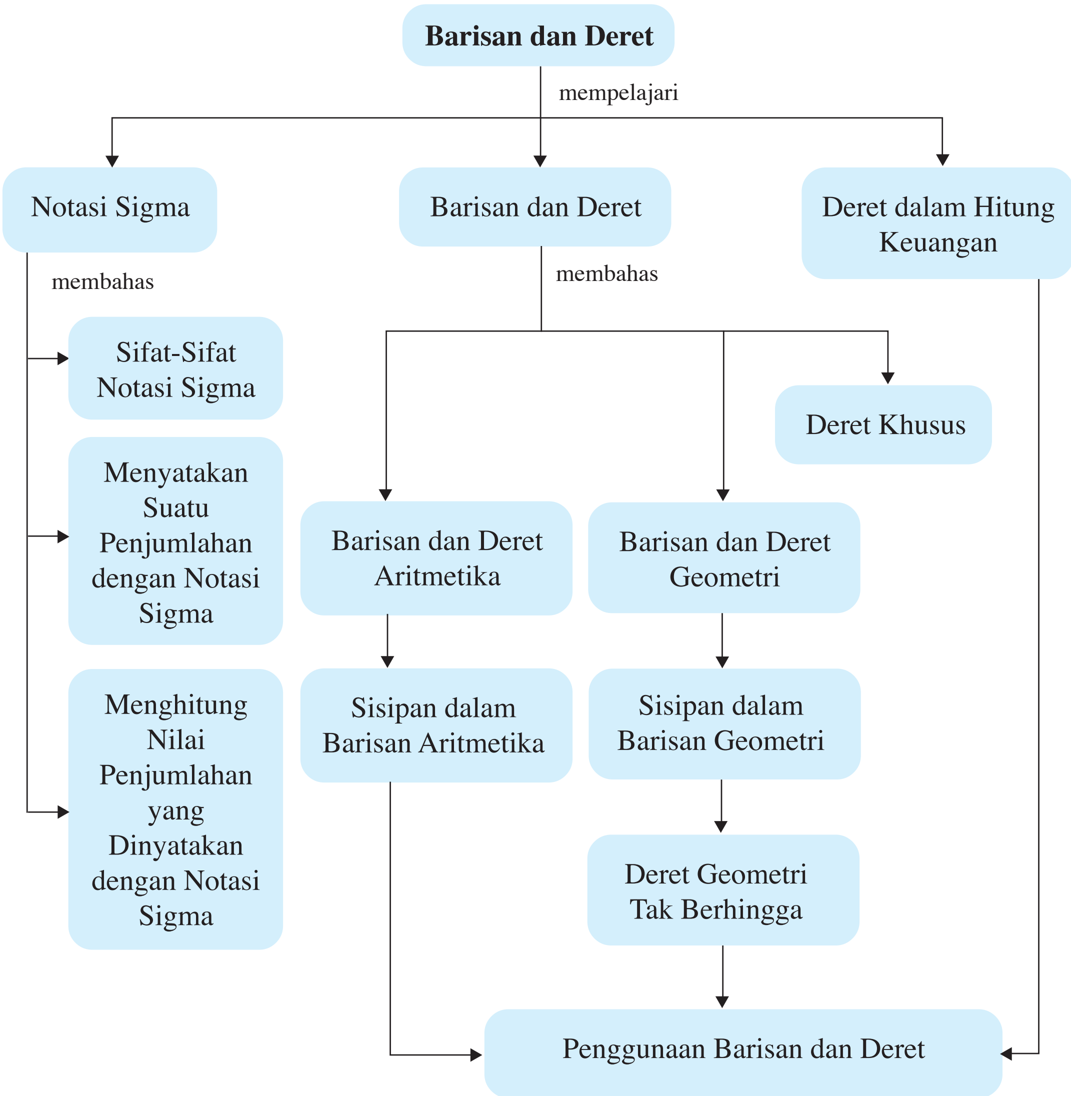
Pernahkah kalian merenungkan keteraturan yang terjadi di alam ini? Munculnya matahari setiap pagi, datangnya musim penghujan dan kemarau pada masa tertentu, pertumbuhan populasi manusia, populasi rusa, serta populasi tumbuhan adalah beberapa contoh keteraturan yang terjadi di alam ini. Para ahli menganalisis peristiwa-peristiwa tersebut dengan suatu barisan atau deret tertentu. Dapatkah kalian memberikan contoh keteraturan lain di alam ini?

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

1. menjelaskan ciri barisan aritmetika dan baris geometri;
2. merumuskan suku ke-n dan jumlah n suku deret aritmetika dan deret geometri;
3. menentukan suku ke-n dan jumlah n suku deret aritmetika dan deret geometri;
4. menjelaskan ciri deret geometri tak hingga yang mempunyai jumlah;
5. menghitung jumlah deret geometri tak hingga;
6. menuliskan suatu deret aritmetika dan geometri dengan notasi sigma;
7. menjelaskan karakteristik masalah yang model matematikanya berbentuk deret aritmetika atau geometri;
8. merumuskan deret yang merupakan model matematika dari masalah;
9. menentukan penyelesaian dari model matematika;
10. memberikan tafsiran terhadap solusi (hasil yang diperoleh) dari masalah;
11. menjelaskan rumus-rumus dalam hitung keuangan dengan deret aritmetika atau geometri;
12. menentukan bunga tunggal, bunga majemuk, dan anuitas.

Peta Konsep



Kata Kunci

- barisan bilangan
- barisan berhingga
- barisan tak berhingga
- barisan aritmetika
- barisan geometri
- beda
- deret
- sigma
- suku

Pada pokok bahasan ini, kita akan mempelajari notasi sigma sebagai penyederhanaan bentuk penjumlahan yang memuat banyak suku yang memiliki pola (keteraturan) tertentu. Kemudian, kita lanjutkan dengan membahas pengertian barisan dan deret bilangan yang meliputi barisan dan deret aritmetika, barisan dan deret geometri, serta deret-deret khusus seperti deret bilangan asli dan deret kuadrat bilangan asli.

Sebelum lebih jauh mempelajari bab ini, ada baiknya kalian jawab soal-soal berikut.

Uji Prasyarat — ***Kerjakan di buku tugas***

1. Apakah yang disebut barisan dan deret?
2. Tunjukkan, mana yang merupakan barisan? Berilah alasan.
   a. 1, 2, 3, 4, 5, ...
   b. 1, 1, 1, 1, 1, ...
   c. 4, 3, 5, 2, 6, 7, 9, ...
3. Di SMP, kalian telah mempelajari bunga, baik bunga tunggal maupun bunga majemuk. Apakah bunga itu? Apa pula bunga tunggal dan bunga majemuk itu? Berikan gambarannya.

Setelah kalian mampu menjawab soal-soal di atas, mari lanjutkan ke materi berikut.

A. Notasi Sigma

Matematika sering disebut sebagai bahasa lambang atau bahasa simbol. Hal ini disebabkan di dalam matematika banyak digunakan lambang-lambang atau simbol-simbol untuk menyatakan suatu pernyataan yang lebih singkat dan lebih jelas. Di antara penggunaan lambang ini adalah pada bentuk penjumlahan suku-suku yang memiliki pola (keteraturan) tertentu. Lambang yang digunakan untuk menuliskan bentuk penjumlahan suku-suku seperti ini adalah notasi "Σ" (dibaca: sigma). Simbol ini diambil dari abjad Yunani "*S*" yang merupakan huruf pertama kata "Sum" yang berarti jumlah.

Dalam penggunaannya, notasi Σ selalu diikuti dengan indeks atau variabel yang menentukan batas bawah dan batas atas penjumlahan tersebut. Indeks penjumlahan ini dapat dipilih sembarang huruf kecil. Daerah penjumlahan dapat berhingga (terbatas) dan dapat pula tak terhingga (tak terbatas).

1. Menyatakan Suatu Penjumlahan dengan Notasi Sigma

Misalkan terdapat penjumlahan bilangan asli dari 1 sampai dengan 100, yaitu $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$. Jika semua sukunya ditulis, bentuk penjumlahan tersebut menjadi sangat panjang. Dengan menggunakan notasi sigma, penulisan ini dapat dipersingkat, yaitu sebagai berikut.

$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \sum_{n=1}^{100} n$ (Dibaca: sigma n, untuk $n = 1$ sampai dengan 100).

Pada penulisan tersebut, variabel yang digunakan adalah n, sedangkan batas bawahnya $n = 1$ dan batas atasnya $n = 100$.

Contoh:

Nyatakan penjumlahan berikut ini dengan notasi sigma.

a. $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24$

b. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{11}{12}$

c. $xy^2 + x^2y^3 + x^2y^3 + x^3y^4 + \ldots + x^{11}y^{12}$

Penyelesaian:

a. $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 = \sum_{k=1}^{8} 3k$

b. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{11}{12} = \sum_{k=1}^{11} \frac{k}{k+1}$

c. $xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4 + \ldots + x^{11}y^{12} = \sum_{k=1}^{11} x^k y^{k+1}$

2. Nilai Penjumlahan dalam Notasi Sigma

Untuk menghitung nilai penjumlahan yang dinyatakan dengan notasi sigma, bentuk penjumlahan tersebut dinyatakan sebagai bentuk biasa terlebih dahulu, kemudian ditentukan hasilnya. Perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh:

Tentukan nilai penjumlahan yang dinyatakan dalam notasi sigma berikut.

a. $\sum_{z=5}^{15} z^2$

b. $\sum_{p=1}^{5} (2p + 3)$

Penyelesaian:

a. $\sum\limits_{z=5}^{15} z^2 = 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2$

$= 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 + 144 + 169 + 196 + 225 = 1.210$

b. $\sum\limits_{p=1}^{5} (2p+3) = (2(1) + 3) + (2(2) + 3) + (2(3) + 3) + (2(4) + 3) + (2(5) + 3)$

$= 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

$= 45$

Uji Kompetensi 1

Kerjakan di buku tugas

1. Nyatakan bentuk penjumlahan berikut dengan menggunakan notasi sigma.
   a. $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100$
   b. $4 + 8 + 12 + 16 + \dots + 1.000$
   c. $1 \times 3 + 4 \times 6 + 9 \times 11 + \dots + 100 \times 102$
   d. $2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6 + ... + 101 \times 103$
   e. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + ... + \frac{60}{3.601}$
   f. $\frac{4}{7} + \frac{5}{8} + \frac{6}{9} + \frac{7}{10} + ... + \frac{83}{86}$
   g. $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + ... + x_{100}^3$
   h. $xy^{n-1} + x^2y^{n-2} + ... + x^n$
2. Nyatakan notasi sigma berikut dalam bentuk penjumlahan biasa. Jika tidak memungkinkan untuk menulis seluruhnya, gunakan titik-titik seperti pada soal nomor 1.
   a. $\sum\limits_{k=1}^{8} (8k + 5)$
   b. $\sum\limits_{k=1}^{100} (k + 8)$
   c. $\sum\limits_{k=3}^{12} 6^k$
   d. $\sum\limits_{i=1}^{6} 3^i$
   e. $\sum\limits_{k=1}^{8} (k^2 + 2k + 6)$
   f. $\sum\limits_{i=1}^{5} (2i + 6)^2$
   g. $\sum\limits_{k=1}^{10} \frac{k}{k^2 + 3k + 6}$
   h. $\sum\limits_{p=1}^{10} \frac{p^2}{p+1}$
   i. $\sum\limits_{p=1}^{10} (p^2 - 1)$
   j. $\sum\limits_{n=1}^{10} (2n^2 - n + 1)$

3. Hitunglah nilai penjumlahan yang dinyatakan dengan notasi sigma berikut.

a. $\sum_{k=1}^{6}(2k+5)$

b. $\sum_{k=1}^{10}(k-6)^2$

c. $\sum_{p=1}^{5}(2p^2+5p+1)$

d. $\sum_{p=2}^{8}(p-1)^3$

e. $\sum_{p=1}^{4}(p^3-2p^2+3p+1)$

f. $\sum_{k=1}^{8}\frac{k}{k^2+2}$

g. $\sum_{p=1}^{3}\frac{p^2}{p^2+3p-2}$

h. $\sum_{p=1}^{10}p(p+1)^2$

i. $\sum_{p=3}^{12}p^2(p-2)$

j. $\sum_{n=1}^{10}(3n-7)n$

3. Sifat-Sifat Notasi Sigma

Coba pahami kembali notasi sigma di atas. Jika kalian telah menguasainya, tentu kalian akan dapat menemukan sifat-sifat yang berlaku pada notasi sigma. Sifat-sifat yang berlaku pada notasi sigma adalah sebagai berikut.

Jika $a, b \in$ himpunan bilangan bulat positif, sedangkan U_k dan V_k adalah rumus suku ke-k dari suatu notasi sigma maka berlaku sifat-sifat berikut.

1. $\sum_{k=a}^{b}(U_k+V_k)=\sum_{k=a}^{b}U_k+\sum_{k=a}^{b}V_k$

2. $\sum_{k=a}^{b}cU_k=c\sum_{k=a}^{b}U_k$, untuk $c \in R$

3. a. $\sum_{k=a}^{b}U_k=\sum_{k=a+p}^{b+p}U_{k-p}$ b. $\sum_{k=a}^{b}U_k=\sum_{k=a-p}^{b-p}U_{k+p}$

4. $\sum_{k=a}^{b}c=(b-a+1)c$

5. $\sum_{k=a}^{p-1}U_k+\sum_{k=p}^{b}U_k=\sum_{k=a}^{b}U_k$

6. $\sum_{k=a}^{a-1}U_k=0$

7. $$\sum_{k=a}^{b}(U_k+V_k)^2=\sum_{k=a}^{b}U_k^2+2\sum_{k=a}^{b}U_kV_k+\sum_{k=a}^{b}V_k^2$$

Bukti:

1. $$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b}(U_k+V_k) &= (U_a+V_a)+(U_{a+1}+V_{a+1})+\ldots+(U_b+V_b)\\ &= (U_a+U_{a+1}+\ldots+U_b)+(V_a+V_{a+1}+\ldots+V_b)\\ &= \sum_{k=a}^{b}U_k+\sum_{k=a}^{b}V_k \text{ .... (terbukti)}\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b}cU_k &= cU_a+cU_{a+1}+cU_{a+2}+\ldots+cU_b\\ &= c(U_a+U_{a+1}+U_{a+2}+\ldots+U_b)\\ &= c\sum_{k=a}^{b}U_k \text{ .... (terbukti)}\end{aligned}$$

3. a. $$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b}U_k &= U_a+U_{a+1}+U_{a+2}+\ldots+U_b\\ &= U_{(a+p)-p}+U_{(a+p)-p+1}+U_{(a+p)-p+2}+\ldots+U_{(b+p)-p}\\ &= \sum_{k=a+p}^{b+p}U_{k-p} \text{ .... (terbukti)}\end{aligned}$$

   b. Dengan cara serupa, tentu kalian dapat menunjukkan bahwa $\sum_{k=a}^{b}U_k=\sum_{k=a-p}^{b-p}U_{k+p}$.

4. $$\sum_{k=a}^{b}c=(b-a+1)c$$

   Bukti:

   $$\sum_{k=a}^{b}c=\underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{(b-a+1)suku}=(b-a+1)\,c \text{ .... (terbukti)}$$

6. $$\sum_{k=a}^{a-1}U_k=0$$

   Bukti:

   Dari sifat $\sum_{k=a}^{p-1}U_k+\sum_{k=p}^{b}U_k=\sum_{k=a}^{b}U_k$, diperoleh

   $$\sum_{k=a}^{p-1}U_k=\sum_{k=p}^{b}U_k-\sum_{k=a}^{b}U_k.$$

Jika $p = a$, diperoleh $\sum_{k=a}^{a-1} U_k = \sum_{k=a}^{b} U_k - \sum_{k=a}^{b} U_k = 0$ .. (terbukti)

Sifat (5) dan (7) mudah untuk dibuktikan. Coba kalian kerjakan sebagai latihan.

Contoh:

1. Tentukan nilai dari $\sum_{k=1}^{3}(k^2+3k)$.

Penyelesaian:

Cara 1:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(k^2+3k) &= ((1^2)+3(1))+(2^2+3(2))+(3^2+3(3))\\ &= 4+10+18=32\end{aligned}$$

Cara 2:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(k^2+3k) &= \sum_{k=1}^{3}k^2+\sum_{k=1}^{3}3k\\ &= (1^2+2^2+3^2)+(3(1)+3(2)+3(3))\\ &= ((1+4+9)+(3+6+9))\\ &= 32\end{aligned}$$

2. Buktikan bahwa $\sum_{p=2}^{n}5(5p+6)=\sum_{p=1}^{n-1}(5p+11)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\sum_{p=2}^{n}(5p+6) &= \sum_{p=1}^{n-1}(5(p+1)+6)\\ &= \sum_{p=1}^{n-1}(5p+5+6)\\ &= \sum_{p=1}^{n-1}(5p+11)\end{aligned}$$

.... (terbukti)

3. Dengan menggunakan sifat-sifat notasi sigma, buktikan bahwa

$$\sum_{p=1}^{n}(4p-1)^2=16\sum_{p=1}^{n}p^2-8\sum_{p=1}^{n}p+n\ .$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n}(4p-1)^2 &= \sum_{p=1}^{n}(16p^2-8p+1)\\ &= \sum_{p=1}^{n}16p^2-\sum_{p=1}^{n}8p+\sum_{p=1}^{n}1\\ &= 16\sum_{p=1}^{n}p^2-8\sum_{p=1}^{n}p+n\end{aligned}$$

.... (terbukti)

Uji Kompetensi 2

Kerjakan di buku tugas

1. Dengan menggunakan sifat-sifat notasi sigma, buktikan pernyataan-pernyataan berikut.

   a. $\sum_{k=1}^{n}(4k+1)^2 = 16\sum_{k=1}^{n}k^2 + 8\sum_{k=1}^{n}k + n$

   b. $\sum_{k=1}^{n}(k-12)^2 = \sum_{k=1}^{n}k^2 - 24\sum_{k=1}^{n}k + 144n$

   c. $\sum_{k=6}^{n}(3k+2) = 3\sum_{k=3}^{n-3}k + 11(n-5)$

   d. $\sum_{k=4}^{n}(k^2+5) = \sum_{k=3}^{n-3}k^2 + 6\sum_{k=1}^{n-3}k + 14(n-3)$

   e. $\sum_{k=3}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n-2}k^2 + 6\sum_{k=1}^{n-2}k + 9(n-2)$

   f. $\sum_{k=1}^{n}(2k+4) = 2\sum_{k=3}^{n+2}k$

2. Tulislah notasi sigma berikut dengan batas bawah 0.

   a. $\sum_{k=3}^{n}6k$

   b. $\sum_{k=2}^{n}(2k+3)$

   c. $\sum_{i=4}^{n}i(i+5)$

   d. $\sum_{k=3}^{n}(3k-1)^2$

   e. $\sum_{i=1}^{n}(i^2+3i-6)$

   f. $\sum_{i=5}^{n}\dfrac{(i+2)^2}{(i^2-2i+1)}$

3. Tulislah notasi sigma berikut dengan batas bawah 2.

   a. $\sum_{k=0}^{n}7k$

   b. $\sum_{k=1}^{n}(5k-6)$

   c. $\sum_{i=1}^{n}(i+6)(i-2)$

   d. $\sum_{k=0}^{n}(2k+7)^2$

   e. $\sum_{i=1}^{n}(i^2-4i+8)$

   f. $\sum_{i=0}^{n}\dfrac{(i+2)^2}{i^2+3i+5}$

B. Barisan dan Deret

Dalam kehidupan sehari-hari, kita dapat menjumpai bilangan-bilangan yang diurutkan dengan aturan tertentu. Perhatikan urutan bilangan-bilangan berikut.

1) 0, 2, 4, 6, 8, ...
2) 1, 3, 5, 7, 9, ...
3) 0, 1, 4, 9, 16, ...
4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

Bentuk-bentuk di atas dinamakan barisan bilangan. Jadi, *barisan bilangan* adalah susunan bilangan yang diurutkan menurut aturan tertentu. Bentuk umum barisan bilangan adalah $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Setiap bilangan yang terurut pada barisan bilangan di atas disebut *suku barisan*. Suku ke-n dari suatu barisan ditulis dengan simbol U_n (n bilangan asli). Dengan demikian, a_1 disebut suku pertama atau U_1, a_2 disebut suku kedua atau U_2, dan a_n disebut suku ke-n atau U_n. Di antara suku-suku barisan bilangan dan himpunan bilangan asli terdapat korespondensi satu-satu seperti terlihat dalam diagram berikut.

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots. & a_n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & \dots. & n \end{array}$$

Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa suku-suku suatu barisan bilangan merupakan suatu nilai fungsi f dari himpunan bilangan asli ke himpunan bilangan real dengan aturan $U_n = f(n)$. Dalam hal ini, $U_n = f(n)$ disebut rumus suku ke-n dari barisan bilangan tersebut.

Contoh:

1. Tentukan lima suku pertama dari barisan bilangan $U_n = n^2 - 1$.

   Penyelesaian:

   Karena rumus $U_n = n^2 - 1$, dapat ditentukan bahwa $U_1 = 1^2 - 1 = 0$, $U_2 = 2^2 - 1 = 3$, $U_3 = 3^2 - 1 = 8$, $U_4 = 4^2 - 1 = 15$, dan $U_5 = 5^2 - 1 = 24$.

   Jadi, lima suku pertamanya adalah 0, 3, 8, 15, 24.

2. Diketahui rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = n^2 + n$.
   a. Tentukan lima suku pertama dari barisan tersebut.
   b. Suku keberapa dari barisan tersebut yang bernilai 156?

   Penyelesaian:

   a. Karena $U_n = n^2 + n$, dapat ditentukan bahwa $U_1 = 1^2 + 1 = 2$, $U_2 = 2^2 + 2 = 6$, $U_3 = 3^2 + 3 = 12$, $U_4 = 4^2 + 4 = 20$, dan $U_5 = 5^2 + 5 = 30$.

      Jadi, 5 suku pertamanya adalah 2, 6, 12, 20, 30.

   b. Diketahui suku ke-n = 156. Berarti,

   $$\begin{aligned} & U_n = 156 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 + n = 156 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 + n - 156 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (n - 12)(n + 13) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n = 12 \text{ atau } n = -13 \text{ (dipilih nilai } n \text{ positif)} \end{aligned}$$

      Jadi, suku yang nilainya 156 adalah suku ke-12.

Misalkan suku ke-n dari suatu barisan tidak diketahui. Kita dapat menentukan rumus umum untuk mencari suku ke-n barisan bilangan tersebut dengan memerhatikan pola suku-suku barisan itu.

Contoh:

Tentukan rumus suku ke-n dari barisan-barisan berikut, kemudian tentukan nilai suku yang diminta di dalam tanda kurung.

a. 5, 10, 15, 20, 25, ... (U_{100})

b. 2, 5, 10, 17, 26, ... (U_{24})

Penyelesaian:

a. 5, 10, 15, 20, 25, ...

$U_1 = 5 \times 1$
$U_2 = 10 = 5 \times 2$
$U_3 = 15 = 5 \times 3$
$U_4 = 20 = 5 \times 4$
$U_5 = 25 = 5 \times 5$
...
$U_n = 5n$

Jadi, rumus suku ke-n dari barisan tersebut adalah $U_n = 5n$ dan $U_{100} = 5 \times 100 = 500$.

b. 2, 5, 10, 17, 26, ...

$U_1 = 2 = 1 + 1 = 1^2 + 1$
$U_2 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1$
$U_3 = 10 = 9 + 1 = 3^2 + 1$
$U_4 = 17 = 16 + 1 = 4^2 + 1$
$U_5 = 26 = 25 + 1 = 5^2 + 1$
...
$U_n = n^2 + 1$

Jadi, rumus suku ke-n barisan tersebut adalah $U_n = n^2 + 1$ dan $U_{24} = 24^2 + 1 = 577$.

Selain dengan memerhatikan pola suku-sukunya, suku-suku barisan bilangan dapat ditentukan dengan menggunakan rumus. Bagaimana caranya?

Perhatikan barisan bilangan berikut.

1. $a \quad a \quad a \quad a \quad a \ldots\ldots$ $\qquad U_n = a$, untuk a konstanta, $n = 1, 2, 3, \ldots$

2. $$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & - & a_2 & - & a_3 & - & a_4 & - & a_5 \ldots\ldots \\ & b & & b & & b & & b & \end{array}$$
$U_n = an + b$, untuk a dan b konstanta, $n = 1, 2, 3, \ldots$

3. $$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & - & a_2 & - & a_3 & - & a_4 & - & a_5 \ldots\ldots \\ & b_1 & - & b_2 & - & b_3 & - & b_4 & \ldots\ldots \\ & & c & & c & & c & & \end{array}$$
$U_n = an^2 + bn + c$, untuk a, b, c konstanta, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Catatan: pada kasus ini tanda ”–” kita baca ”berselisih”.

Pada kasus 1, suku-suku barisan selalu sama sehingga disebut barisan konstan. Pada kasus 2, selisih dua barisan yang berurutan selalu sama. Barisan rumus suku-sukunya ini memiliki bentuk persamaan linear. Barisan seperti ini nantinya akan kita sebut barisan aritmetika. Kasus 3 dapat kalian pahami dari bagan sehingga diperoleh selisih konstan.

Menentukan konstanta *a, b,* dan *c* pada kasus 3, yaitu $U_n = an^2 + bn + c$.

- Ambil 3 suku, misalnya U_1, U_2, dan U_3 sehingga diperoleh sistem persamaan linear tiga variabel, yaitu
  $U_1 = a(1^2) + b(1) + c \Leftrightarrow a + b + c = U_1$
  $U_2 = a(2^2) + b(2) + c \Leftrightarrow 4a + 2b + c = U_2$
  $U_3 = a(3^2) + b(3) + c \Leftrightarrow 9a + 3b + c = U_3$
- Selesaikan sistem persamaan tersebut sehingga diperoleh suku ke-*n*, yaitu $U_n = an^2 + bn + c$.

Contoh:

Tentukan suku ke-*n* barisan 2, 5, 9, 14, 20, ...

Penyelesaian:

2 5 9 14 20 ....
– – – –
3 4 5 6 ....
– – –
1 1 1 ....

Dari urutan barisan di atas, terlihat bahwa suku ke-*n* barisan tersebut sesuai dengan kasus 3, yaitu $U_n = an^2 + bn + c$.

Untuk menentukan *a, b,* dan *c*, ambil 3 suku, misalnya $U_1 = 2$, $U_2 = 5$, dan $U_3 = 9$. Dengan demikian, diperoleh

$U_1 = a(1^2) + b(1) + c \Leftrightarrow a + b + c = 2$
$U_2 = a(2^2) + b(2) + c \Leftrightarrow 4a + b + c = 5$
$U_3 = a(3^2) + b(3) + c \Leftrightarrow 9a + b + c = 9$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel tersebut, diperoleh nilai $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, dan $c = 0$.

Jadi, barisan tersebut adalah $U_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 0$ atau $U_n = \frac{1}{2}n(n + 3)$.

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

Coba, kalian tentukan rumus suku ke-*n* dari barisan-barisan berikut.

1. 5, 8, 11, 14, 17, ...
2. 7, 12, 20, 31, 45, ...
3. 9, 16, 28, 48,79, ...
4. 4, 5, 9, 18, 34, 59, ...

Berdasarkan banyaknya suku, barisan dapat dibedakan menjadi dua macam.

a. *Barisan berhingga*, yaitu barisan yang banyak suku-sukunya berhingga (tertentu).

Misalnya, barisan bilangan asli yang kurang dari 12, yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 dan barisan bilangan ganjil yang kurang dari 100, yaitu 1, 3, 5, 7, 9, …, 99.

b. *Barisan tak berhingga*, yaitu barisan yang banyak suku-sukunya tak berhingga.

Misalnya, barisan bilangan asli, yaitu 1, 2, 3, 4, … dan barisan bilangan bulat, yaitu …, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...

Jika suku-suku suatu barisan dijumlahkan maka terbentuklah suatu deret.

Misalkan $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ adalah suatu barisan bilangan. Deret bilangan didefinisikan dengan $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$.

Diskusi Berpikir Kritis

Diskusikan dengan teman-teman kalian, bagaimana rumus umum untuk menentukan suku-suku barisan berikut.

a. 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...
b. 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, ...
c. –1, 2, – 3, 4, – 5, ...
d. –1, 1, –2, 2, –3, 3, ...

Uji Kompetensi 3

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan lima suku pertama dari barisan bilangan berikut.
   a. $U_n = 3n - 5$
   b. $U_n = n^2$
   c. $U_n = n^2 + 4$
   d. $U_n = 3n^2$
   e. $U_n = n^2 - 3n$
   f. $U_n = \frac{1}{2}n + 6$
   g. $U_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{4}$
   h. $U_n = \frac{1}{4}n^2 + 2n - 1$
2. Diketahui rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 5n + 4$.
   a. Tentukan enam suku pertama dari barisan tersebut.
   b. Suku keberapa dari barisan tersebut yang bernilai 504?
3. Diketahui rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 2n^2 - 8$.
   a. Tentukan empat suku pertama dari barisan tersebut.
   b. Suku keberapa dari barisan tersebut yang bernilai 12.792?

4. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan-barisan berikut, kemudian tentukan nilai suku yang diminta di dalam kurung.
   a. 3, 6, 9, 12, ... (U_{16})
   b. 1, 4, 7, 10, ... (U_{20})
   c. 0, 3, 8, 15, ... (U_{12})
   d. 3, 10, 21, 36, ... (U_8)
   e. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots (U_{10})$
   f. $\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \ldots (U_{15})$
5. Tentukan suku ke-25 dan suku ke-30 dari barisan-barisan berikut.
   a. 3, 10, 17, 24, …
   b. 6, 11, 16, 21, …
   c. 12, 15, 18, 21, …
   d. –3, –6, –9, –12, …
   e. –4, 0, 4, 8, …
   f. $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$
6. Tentukan rumus suku ke-n barisan-barisan berikut.
   a. 1, 4, 9, 16, 25
   b. 4, 7, 12, 19, 28
   c. 6, 9, 14, 24, 31
   d. 1, 2, 6, 13, 23
   e. 2, 3, 7, 14, 24
7. Diketahui suku ke-n dari suatu barisan bilangan adalah $U_n = an + b$. Jika $U_2 = 11$ dan $U_3 = 12$, tentukan U_{100}.
8. Jika suku ke-n suatu barisan bilangan adalah $U_n = an^2 + \mathrm{b}$, $U_3 = 28$, dan $U_5 = 76$, tentukan nilai dari $U_{10} + U_{13}$.

Soal Terbuka — **Kerjakan di buku tugas**

Diketahui barisan bilangan dengan suku ke-n dirumuskan $U_n = an + b$.
Jika $U_2 + U_4 = 28$ dan $U_{12} - U_{10} = 6$, tentukan
a. U_n;
b. U_{100};
c. $U_n + U_{n+1}$.

1. Barisan dan Deret Aritmetika

Barisan dan deret ini sebenarnya telah kalian pelajari di SMP. Namun, kali ini kalian diajak untuk mempelajari lebih lanjut materi ini. Untuk itu, perhatikan **Tabel 4.1**.

a. Barisan Aritmetika

Jika kalian amati, pada **Tabel 4.1**, barisan mendatar memiliki selisih tetap, yaitu 1 dan barisan menurun juga memiliki selisih tetap, yaitu 8. Barisan-barisan seperti ini dinamakan barisan aritmetika.

Tabel 4.1

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32

Barisan aritmetika atau *barisan hitung* adalah suatu barisan bilangan, dengan setiap suku-suku yang berurutan memiliki selisih tetap (konstan). Selisih yang tetap ini disebut *beda* dan dilambangkan dengan b. Pada tabel di atas terdapat beberapa barisan aritmetika, di antaranya sebagai berikut.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots \qquad (b = 1)$$
$$+1 \quad +1 \quad +1 \quad +1$$

$$2 \quad 10 \quad 18 \quad 26 \qquad (b = 8)$$
$$+8 \quad +8 \quad +8$$

$$2 \quad 11 \quad 20 \quad 29 \qquad (b = 9)$$
$$+9 \quad +9 \quad +9$$

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Sisi-sisi sebuah segitiga siku-siku membentuk suatu barisan aritmetika. Jika kelilingnya 72 cm maka luas segitiga itu adalah ....

a. 108 cm^2
b. 135 cm^2
c. 162 cm^2
d. 216 cm^2
e. 270 cm^2

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2003

Secara umum, dapat dikatakan sebagai berikut.
Apabila U_n adalah rumus suku ke-n dari suatu barisan aritmetika, berlaku bahwa selisih suku ke-n dan suku ke-$(n - 1)$ selalu tetap, ditulis

$$U_n - U_{n-1} = b$$

b disebut beda.
Jika suku pertama dari barisan aritmetika (U_1) dinotasikan dengan a dan beda dinotasikan dengan b yang nilainya selalu tetap maka suku-suku barisan aritmetika tersebut dapat dituliskan sebagai berikut.

$U_1 = a$
$U_2 = a + b$
$U_3 = (a + b) + b = a + 2b$
$U_4 = (a + 2b) + b = a + 3b$
...
$U_n = a + (n - 1)b$

Oleh karena itu, diperoleh barisan aritmetika berikut.
$a, a + b, a + 2b, a + 3b, ..., a + (n - 1)b, ...$
Bentuk barisan ini dinamakan *barisan aritmetika baku* dengan rumus umum suku ke-n sebagai berikut.

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Keterangan:

U_n = suku ke-n $\qquad$ b = beda
a = suku pertama $\qquad$ n = banyak suku

Contoh:

1. Tentukan suku ke-7 dan suku ke-10 dari barisan-barisan berikut.
   a. 3, 7, 11, 15, ...
   b. $x + p, x + 6p, x + 11p, x + 16p, ...$

   Penyelesaian:

   a. 3, 7, 11, 15, ...
   Suku pertama barisan tersebut adalah $a = 3$ dan bedanya $b = 7 – 3 = 4$. Oleh karena itu, rumus umum suku ke-n barisan itu adalah $U_n = 3 + (n – 1)4$.
   Suku ke-7: $U_7 = 3 + (7 – 1)4 = 27$
   Suku ke-10: $U_{10} = 3 + (10 – 1)4 = 39$

   b. $x + p, x + 6p, x + 11p, x + 16p, ...$
   Suku pertama barisan tersebut $a = x + p$ dan bedanya $b = (x + 6p) – (x + p) = 5p$.
   Suku ke-7: $U_7 = (x + p) + (7 – 1)5p$
   $= x + 31p$
   Suku ke-10: $U_{10} = (x + p) + (10 – 1)5p$
   $= x + 46p$

2. Dari suatu barisan aritmetika, diketahui suku ke-3 dan suku ke-5 adalah 16 dan 20. Tentukan suku pertama, beda, dan suku ke-20 barisan tersebut.

   Penyelesaian:

   Rumus barisan aritmetika adalah $U_n = a + (n – 1)b$.
   Karena $U_3 = 16$ maka $a + 2b = 16$ .... (1)
   Karena $U_5 = 20$ maka $a + 4b = 26$ .... (2)
   Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh $a = 12$ dan $b = 2$.
   Berarti, $U_n = 12 + (n – 1)2$ dan $U_{20} = 12 + (20 – 1)^2 = 50$.

Problem Solving

Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan itu adalah 24 dan hasil kalinya adalah 384. Tentukan ketiga bilangan tersebut.

Penyelesaian:

Tiga bilangan yang membentuk barisan aritmetika dapat dimisalkan $a, a + b, a + 2b$, tetapi jika diambil pemisalan tersebut, penyelesaiannya agak panjang. Agar penyelesaiannya lebih mudah, ketiga bilangan itu dimisalkan $p – q, p$, dan $p + q$. (ingat: pemisahan kedua ini juga memiliki beda yang tetap, yaitu q).

Karena jumlahnya 24 maka

$(p – q) + p + (p + q) = 24$
$\Leftrightarrow 3p = 24$
$\Leftrightarrow p = 8$

Karena hasil kalinya 384 maka

$(p – q) \times p \times (p + q) = 384$
$\Leftrightarrow p(p^2 – q^2) = 384$

Untuk $p = 8$, diperoleh

$$8(64 - q^2) = 384$$
$$\Leftrightarrow 64 - q^2 = 48$$
$$\Leftrightarrow q^2 = 16 = \pm 4$$

Untuk $p = 8$ dan $q = 4$, ketiga bilangan tersebut adalah 4, 8, dan 12.
Untuk $p = 8$ dan $q = -4$, ketiga bilangan tersebut adalah 12, 8, dan 4.
Jadi, ketiga bilangan itu adalah 4, 8, dan 12.
Coba kalian selesaikan contoh 3 dengan menggunakan pemisalan a, $a + b$, dan $a + 2b$ (di sini a bilangan terkecil dan b beda). Apakah hasilnya sama?

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

1. Tunjukkan bahwa tiga bilangan terurut $a, b,$ dan c membentuk barisan aritmetika apabila memenuhi persamaan $2b = a + c$.
2. Tunjukkan bahwa empat bilangan terurut $a, b, c,$ dan d membentuk barisan aritmetika apabila memenuhi persamaan $b + c = a + d$.

b. Sisipan dalam Barisan Aritmetika (Pengayaan)

Pada suatu barisan aritmetika, dapat disisipkan beberapa suku di antara dua suku yang berurutan sehingga diperoleh barisan aritmetika yang baru. Perhatikan barisan aritmetika berikut.

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, ..., a + (n - 1)b$$

Apabila di antara setiap dua suku yang berurutan disisipkan k suku, diperoleh barisan aritmetika baru yang suku pertamanya sama dengan suku pertama barisan semula, yaitu a, beda b', dan banyaknya suku adalah n'. Besarnya nilai b' dan n' dapat ditentukan dengan cara berikut.

Tabel 4.2

Barisan Aritmetika Semula	U_1	U_2	$U_3 \ldots$
Barisan Aritmetika Baru	$\underbrace{U'_1\ U'_2\ U'_3\ \ldots\ U'_{k+1}}_{k \text{ suku}}$	$\underbrace{U'_{k+2} U'_{k+3} U'_{k+4}\ \ldots\ U'_{2k+2}}_{k \text{ suku}}$	$U'_{2k+3} \ldots$

Dari tabel di atas, diperoleh rumusan sebagai berikut.

a. Suku pertama barisan semula sama dengan suku pertama barisan yang baru, yaitu $U_1 = U_1' = a$.

b. Rumus suku ke-n barisan semula adalah $U_n = a + (n - 1)b$, rumus suku ke-n' barisan yang baru adalah $U'_{n'} = a + (n' - 1)b'$.

c. Suku ke-2 barisan yang baru bersesuaian dengan suku ke-$(k + 2)$ barisan yang lama, yaitu $U_2 = a + b$ .... (1)
dan $U_{k+2} = a + ((k + 2) - 1)b'$ .... (2)
Karena persamaan (1) dan (2) bersesuaian, diperoleh
$a + b = a + (k + 2 - 1)b'$
$\Leftrightarrow a + b = a + (k + 1)b'$
$\Leftrightarrow b = (k + 1)b'$
$\Leftrightarrow b' = \dfrac{b}{k+1}$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa apabila di antara setiap dua suku yang berurutan pada suatu barisan aritmetika disisipkan k suku, diperoleh barisan aritmetika baru yang suku pertamanya sama dengan suku pertama barisan aritmetika sebelumnya dan rumus umumnya adalah

$$U'_{n'} = a + (n' - 1)b'$$

dengan $n' = n + (n - 1)k$ dan $b' = \dfrac{b}{k+1}$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jumlah dari 33 suku pertama dari deret aritmetika adalah 891. Jika suku pertama deret adalah 7 maka suku ke-33 adalah ....
a. 41 d. 49
b. 45 e. 51
c. 47

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2004

Contoh:

Diketahui barisan aritmetika 3, 9, 15, 21, ... Di antara setiap dua suku yang berurutan pada barisan tersebut disisipkan dua suku sehingga diperoleh barisan aritmetika baru. Tentukan beda, suku ke-12, dan suku ke-37 barisan yang baru.

Penyelesaian:

Diketahui barisan: 3, 9, 15, 21, ... Berarti suku pertama $a = 3$ dan beda $b = 9 - 3 = 6$.
Banyak suku yang disisipkan adalah $k = 2$ sehingga beda barisan yang baru adalah

$b' = \dfrac{b}{k+1} = \dfrac{6}{2+1} = 2$. Oleh karena itu, rumus umum barisan aritmetika yang baru adalah

$$U'_{n'} = a' + (n' - 1)b'$$
$$= 3 + (n' - 1)2$$

Suku ke-12 dari barisan yang baru adalah $U'_{12} = 3 + (12 - 1)2 = 25$ dan suku ke-37 adalah $U'_{37} = 3 + (37 - 1)2 = 75$.
Jadi, beda barisan yang baru 2, suku ke-12 dan ke-37 barisan yang baru berturut-turut adalah 25 dan 75.

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui beda dan suku pertama dari suatu barisan aritmetika masing-masing adalah 6 dan –4. Di antara setiap dua suku yang berurutan disisipkan dua suku sehingga diperoleh barisan aritmetika baru. Tentukan suku ke-12 dan suku ke-15 dari barisan yang baru.
2. Di antara dua suku yang berurutan pada barisan 3, 18, 33, ... disisipkan 4 buah bilangan sehingga membentuk barisan aritmetika baru. Tentukan jumlah 7 suku pertama dari barisan aritmetika baru tersebut.

Uji Kompetensi 4

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui suku ke-6 dan suku ke-9 dari suatu barisan aritmetika masing-masing adalah 30 dan 45. Tentukan suku pertama, beda, dan suku ke-25 barisan tersebut.
2. Pada suku keberapakah dari barisan aritmetika 84, $80\frac{1}{2}$, 77, ... yang nilainya sama dengan 0?
3. Dalam suatu barisan aritmetika diketahui suku ke-3 adalah 9, sedangkan jumlah suku ke-5 dan ke-7 adalah 36. Tentukan suku ke-100 barisan tersebut.
4. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan itu 30 dan hasil kalinya 750. Tentukan ketiga bilangan tersebut.
5. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan itu 18 dan hasil kalinya 192. Tentukan ketiga bilangan tersebut.
6. Diketahui suatu barisan mempunyai urutan $k + 1$, $3k + 3$, $4k + 4$, ... Agar barisan tersebut merupakan barisan aritmetika, tentukan nilai k.
7. Misalkan U_n adalah suku ke-n suatu barisan aritmetika. Jika diketahui bahwa $U_1 + U_2 + U_3 = -9$ dan $U_3 + U_4 + U_5 = 15$, tentukan nilai $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5$.
8. Sebuah trapesium sisi-sisinya membentuk barisan aritmetika. Jika diketahui bahwa alas trapesium merupakan sisi terpanjang. Apabila sisi terpendeknya 10 cm, tingginya 2 cm, dan luasnya 50 cm^2, tentukan keliling trapesium itu.
9. Jika suku pertama suatu barisan aritmetika adalah 5, suku terakhirnya adalah 23, serta selisih antara suku ke-8 dan ke-3 adalah 10, tentukan banyak suku dari barisan aritmetika tersebut.
10. Diketahui barisan aritmetika 7, 11, 15, 19, ... Di antara setiap dua suku yang berurutan pada barisan tersebut disisipkan satu suku sehingga diperoleh barisan aritmetika baru. Tentukan beda, suku ke-24, dan suku ke-40 dari barisan yang baru.

c. Deret Aritmetika

Kalian telah mengetahui definisi barisan aritmetika. Jumlah seluruh suku-sukunya ditulis dalam bentuk penjumlahan dari suku pertama, suku kedua, dan seterusnya, bentuk ini dinamakan deret aritmetika. Jadi, *deret aritmetika* atau *deret hitung* adalah suatu deret yang diperoleh dengan cara menjumlahkan suku-suku barisan aritmetika. Jika a, $a + b$, $a + 2b$, ... , $a + (n - 1)b$ adalah barisan aritmetika baku maka $a + (a + b) + (a + 2b) + ... + (a + (n - 1)b)$ disebut *deret aritmetika baku*. Jumlah n suku deret aritmetika dinotasikan dengan S_n sehingga

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + ... + (a + (n - 1)b)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (a + (k - 1)b)$$

Rumus jumlah n suku dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{array}{rl} S_n = a & + (a + b) + (a + 2b) + ... + (a + (n - 1)b) \\ S_n = (a + (n - 1)b) & + (a + (n - 2)b) + (a + (n - 3)b) + ... + a \\ \hline 2S_n = & \underbrace{(2a + (n - 1)b) + (2a + (n - 1)b) + (2a + (n - 1)b) + ... + (2a + (n - 1)b)}_{\text{sebanyak } n \text{ suku}} \end{array} -$$

$$\Leftrightarrow 2S_n = n(2a + (n - 1)b)$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)b)$$

Karena rumus suku ke-n suatu deret aritmetika adalah

$U_n = a + (n - 1)b$ maka $S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$.

Jadi, rumus jumlah n suku suatu deret aritmetika adalah

$$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)b) \text{ atau } S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$

Keterangan:

S_n = jumlah n suku b = beda

a = suku pertama n = banyaknya suku

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Dari suatu deret aritmetika suku ke-5 adalah $5\sqrt{2} - 3$ dan suku ke-11 adalah $11\sqrt{2} + 9$. Jumlah 10 suku pertama adalah ....

a. $50\sqrt{2} + 45$
b. $50\sqrt{2} + 35$
c. $55\sqrt{2} + 40$
d. $55\sqrt{2} + 35$
e. $55\sqrt{2} + 45$

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar, 2001

Diskusi Kreativitas

Diskusikan dengan teman-teman kalian apakah benar bahwa:

$U_n = bn + (a - b)$

$S_n = \frac{1}{2}bn^2 + (a - \frac{1}{2}b)n$

Jika benar, apa yang dapat kalian katakan mengenai U_n dan S_n dipandang sebagai fungsi n?

Contoh:

1. Tentukan jumlah 20 suku pertama dari deret 2 + 5 + 8 + 11 + ...

Penyelesaian:

Diketahui deret 2 + 5 + 8 + 11 + ... Dari deret tersebut, diperoleh $a = 2$, $b = 3$, dan $n = 20$.

Cara 1:

Jumlah 20 suku pertama deret tersebut adalah

$$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)b)$$

$$S_{20} = \frac{1}{2}(20)(2(2) + (20 - 1)3) = 10(61) = 610$$

Cara 2:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_{20} = 2 + (20 - 1)3 = 59$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$

$$S_{20} = \frac{1}{2}(20)(2 + U_{20}) = 10(2 + 59) = 10(61) = 610$$

2. Tentukan jumlah bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 4.

Penyelesaian:

Bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 4 adalah 4, 8, 12, 16, ..., 96. Berarti, $a = 4$, $b = 8 - 4 = 4$, dan $U_n = 96$. Kita tentukan nilai n sebagai berikut.

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$\Leftrightarrow$ $96 = 4 + (n - 1)4$

$\Leftrightarrow$ $96 = 4n$

$\Leftrightarrow$ $n = 24$ (Barisan ini mempunyai 24 suku).

Jumlah bilangan-bilangan tersebut adalah

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n) \Leftrightarrow S_{24} = \frac{1}{2} \times 24(4 + 96) = 12\ (100) = 1.200.$$

3. Di antara setiap 2 suku berurutan pada deret 5 + 8 + 11 + 14 + ... disisipkan 5 suku sehingga terbentuk deret aritmetika yang baru. Tentukan suku ke-15 dan jumlah 20 suku pertama pada deret yang baru.

Penyelesaian:

Deret aritmetika semula 5 + 8 + 11 + 14 + ... berarti, $a = 5$ dan $b = 3$. Disisipkan 5 suku, berarti $k = 5$. Dengan demikian, pada deret aritmetika yang baru, diperoleh $a = 5$ dan $b' = \frac{b}{k+1} = \frac{3}{5+1} = \frac{1}{2}$. Suku ke-15 deret yang baru adalah $U'_{15} = 5 + (15 - 1)\frac{1}{2} = 5 + 7 = 12$, sedangkan jumlah 20 suku yang pertama adalah

$$S'_{20} = \frac{1}{2}(20)(2(5) + (20 - 1)\frac{1}{2}) = 10(10 + 9{,}5) = 195$$

Problem Solving

Suku ke-2 suatu deret aritmetika adalah 5, sedangkan jumlah suku ke-4 dan ke-6 adalah 28. Tentukan suku ke-9 dan jumlah dari 12 suku pertama deret tersebut.

Penyelesaian:

$U_2 = a + b = 5$ .... (1)

$U_4 + U_6 = 28 \Leftrightarrow (a + 3b) + (a + 5b) = 28$

$\Leftrightarrow 2a + 8b = 28$

$\Leftrightarrow a + 4b = 14$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh

$$\begin{array}{rl} a + b & = 5 \\ a + 4b & = 14 \\ \hline -3b & = -9 \end{array} \; - \quad \Leftrightarrow \; b = 3$$

Nilai $b = 3$ disubstitusikan ke persamaan (1) sehingga diperoleh $a = 2$.

Suku ke-9 adalah $U_9 = a + 8b = 2 + 8(3) = 26$.

$$S_{12} = \frac{1}{2}(12)\ (2(2) + (12 - 1)3) = 6\ (4 + 33) = 222.$$

Jadi, jumlah 12 suku yang pertama deret tersebut adalah 222.

Uji Kompetensi 5

1. Tentukan jumlah deret aritmetika berikut.
   a. $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots$ sampai dengan 20 suku.
   b. $3 + 9 + 15 + 31 + \ldots$ sampai dengan 18 suku.
   c. $1 + 6 + 11 + 16 + \ldots$ sampai dengan 16 suku.
   d. $60 + 56 + 52 + 48 + \ldots$ sampai dengan 12 suku.
   e. $-20 - 14 - 8 - 2 - \ldots$ sampai dengan 25 suku.
2. Tentukan banyak suku dan jumlah deret aritmetika berikut.
   a. $4 + 9 + 14 + 19 + \ldots + 104$
   b. $-12 - 8 - 4 - 0 - \ldots - 128$
   c. $72 + 66 + 60 + 54 + \ldots - 12$
   d. $-3 - 7 - 11 - 15 \ldots - 107$
3. Tentukan banyak suku dari deret berikut.
   a. $6 + 9 + 12 + 15 + \ldots = 756$
   b. $56 + 51 + 46 + 41 + \ldots = -36$
   c. $10 + 14 + 18 + 22 + \ldots = 640$
4. Tentukan nilai k pada deret berikut.
   a. $4 + 10 + 16 + 22 + \ldots + k = 444$
   b. $5 + 8 + 11 + 14 + \ldots + k = 440$
5. Dalam suatu deret aritmetika diketahui suku pertama adalah 3, suku ke-n = 87, serta jumlah suku ke-6 dan suku ke-7 adalah 39. Tentukan jumlah n suku pertama dari deret tersebut.
6. Dalam suatu deret aritmetika, diketahui suku ke-4 dan suku ke-8 masing-masing adalah 17 dan 58. Tentukan jumlah 25 suku pertama dari deret tersebut.

7. Tentukan jumlah 25 suku pertama dari deret berikut.
   a. $3 + 5 + 7 + \ldots$
   b. $-8 + (-4) + 0 + 4 + \ldots$
   c. $15 + 12 + 9 + \ldots$
   d. $18 + 15\frac{1}{2} + 13 + \ldots$
   e. $0 + x + 2x + 3x + \ldots$
8. Tentukan jumlah bilangan-bilangan antara 300 dan 700 yang habis dibagi 4.
9. Tentukan jumlah bilangan-bilangan antara 1.000 dan 2.000 yang habis dibagi 13.
10. Tentukan jumlah bilangan-bilangan antara 500 dan 1.000 yang habis dibagi 9.
11. Dalam suatu deret aritmetika yang terdiri atas 10 suku, diketahui suku pertama 0 dan beda 6. Di antara setiap dua suku yang berurutan disisipkan tiga bilangan sehingga terbentuk deret aritmetika baru.
12. Tentukan jumlah deret $\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \frac{n-3}{n} + \ldots.$

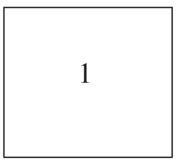
Soal Terbuka — *Kerjakan di buku tugas*

1. Pada suatu bimbingan belajar, murid baru yang mendaftar setiap bulannya bertambah dengan jumlah yang sama. Jumlah murid baru yang mendaftar pada bulan ke-2 dan ke-4 adalah 20 orang, sedangkan jumlah pendaftar pada bulan ke-5 dan ke-6 adalah 40 orang. Tentukan jumlah murid yang mendaftar sampai dengan bulan ke-10.
2. Tentukan nilai dari $\dfrac{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 91}{2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 92}$.

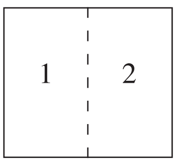
2. Barisan dan Deret Geometri

Seperti halnya barisan dan deret aritmetika, materi tentang barisan dan deret geometri ini juga pernah kalian pelajari di SMP. Mari kita perdalam lagi materi ini.

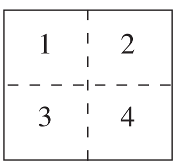
a. Barisan Geometri



1 Segi empat



2 Segi empat



4 Segi empat

Misalnya kalian memiliki selembar kertas berbentuk persegi. Dari kertas itu, kalian lipat sehingga lipatan satu dengan lipatan yang lainnya tepat saling menutupi. Jika lipatan dibuka maka akan terdapat 2 segi empat dengan sebagian sisinya berupa bekas lipatan. Setelah lipatan pertama, jika kalian melanjutkan melipatnya, kalian akan mendapatkan 4 segi empat dengan sisi-sisi sebagian segi empat berupa bekas lipatan. Jika kegiatan melipat diteruskan, diperoleh gambaran seperti di samping.

Barisan 1, 2, 3, 4, 8, ... dinamakan barisan geometri.

Sekarang perhatikan juga barisan 1, 3, 9, 27, 81, ... Pada barisan ini, suku kedua adalah tiga kalinya suku pertama, suku ketiga tiga kalinya suku kedua, demikian seterusnya. Barisan yang demikian juga dinamakan barisan geometri. Jadi, *barisan geometri* atau *barisan ukur* adalah suatu barisan bilangan yang setiap sukunya diperoleh dengan cara mengalikan suku di depannya dengan bilangan yang tetap (konstan). Bilangan yang tetap ini disebut *pembanding (rasio)* yang dinotasikan dengan r. Secara umum, dapat dikatakan sebagai berikut.

1	2
3	4
5	6
7	8

8 Segi empat

Suatu barisan $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ disebut barisan geometri apabila berlaku

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = r$$

Misalnya:

$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \; ... \quad (r = 3)$$
$$\times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$$

$$1 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{8} \; ... \quad (r = \tfrac{1}{2})$$
$$\times \tfrac{1}{2} \quad \times \tfrac{1}{2} \quad \times \tfrac{1}{2}$$

$$2 \quad -4 \quad 8 \quad -16 \; ... \quad (r = -2)$$
$$\times(-2) \quad \times(-2) \quad \times(-2)$$

Dari contoh-contoh di atas, tampak bahwa apabila suku-suku dari suatu barisan geometri positif semua atau negatif semua, rasio barisan itu positif. Namun, apabila suku-suku dari suatu barisan geometri bergantian tanda, rasio barisan itu negatif.

Apabila suku pertama (U_1) dari barisan geometri dinyatakan dengan a dan rasio r maka

$U_1 = a$
$U_2 = ar$
$U_3 = ar \times r = ar^2$
$U_4 = ar^2 \times r = ar^3$
...
$U_n = ar^{n-1}$

Dengan demikian, diperoleh barisan geometri $a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{n-1}, ...$

Barisan ini disebut *barisan geometri baku*. Rumus umum suku ke-n barisan itu adalah

$$U_n = ar^{n-1}$$

Keterangan:

U_n = suku ke-n $\qquad r$ = rasio
a = suku pertama $\qquad n$ = banyak suku

Tugas

Berpikir Kritis

Kerjakan di buku tugas

Ambil sembarang deret aritmetika yang banyaknya suku ganjil. Perhatikan bahwa suku tengah dari deret tersebut adalah

$U_t = \frac{s_n}{n}$ atau

$U_t = \frac{1}{2}(U_1 + U_n)$

$= \frac{1}{2}(U_2 + U_{n-1})$

$= \frac{1}{2}(U_3 + U_{n-2})$

$= \frac{1}{2}(U_4 + U_{n-3})$

...

demikian seterusnya.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Dalam suatu barisan geometri, $U_1 + U_3 = p$, dan $U_2 + U_4 = q$ maka U_4 = ...

a. $\frac{p^3}{p^2 + q^2}$

b. $\frac{q^3}{p^2 + q^2}$

c. $\frac{p^3 + q^3}{p^2 + q^2}$

d. $\frac{q^2}{q^2 + p^2}$

e. $\frac{p^2 + q^3}{p^2 + q^2}$

Soal UMPTN, 1996

Contoh:

Dari barisan-barisan geometri berikut, tentukan suku pertama, rasio, suku ke-5, dan suku ke-9.

a. 1, 2, 4, ...

b. 9, 3, 1, ...

Penyelesaian:

a. 1, 2, 4, ...

Dari barisan tersebut, diperoleh $a = 1$ dan $r = \frac{2}{1} = 2$. Oleh karena itu, suku ke-5 dan suku ke-9 masing-masing adalah

$U_5 = ar^{5-1} = 1(2^4) = 16$;

$U_9 = ar^{9-1} = 1(2^8) = 256$.

b. 9, 3, 1, ...

Dari barisan tersebut, nilai $a = 9$ dan $r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Oleh karena itu, suku ke-5 dan suku ke-9 masing-masing adalah

$U_5 = ar^{5-1} = 9(\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{9}$;

$U_9 = ar^{9-1} = 9(\frac{1}{3})^8 = 9(\frac{1}{6.561}) = \frac{1}{729}$.

Problem Solving

Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jumlah ketiga bilangan itu 26 dan hasil kalinya 216. Tentukan ketiga bilangan tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan ketiga bilangan tersebut adalah $\frac{a}{p}$, a, dan ap.

Jumlah ketiga bilangan itu 26 sehingga

$\frac{a}{p} + a + ap = 26$ .... (1)

Hasil kalinya 216 sehingga $\frac{a}{p} \times a \times ap = 216$ .... (2)

Dari persamaan (2), diperoleh $a^3 = 216$ atau $a = 6$. Jika nilai $a = 6$ disubstitusikan ke persamaan (1), diperoleh

$$\frac{6}{p} + 6 + 6p = 26$$

$\Leftrightarrow$ $6 + 6p + 6p^2 = 26p$
$\Leftrightarrow$ $6p^2 - 20p + 6 = 0$
$\Leftrightarrow$ $(3p - 1)(2p - 6) = 0$
$\Leftrightarrow$ $p = \frac{1}{3}$ atau $p = 3$

Untuk $a = 6$ dan $p = \frac{1}{3}$, ketiga bilangan tersebut adalah 18, 6, dan 2. Untuk $a = 6$ dan $p = 3$, ketiga bilangan tersebut adalah 2, 6, dan 18. Jadi, ketiga bilangan itu adalah 2, 6, dan 18. Dapatkah kalian menyelesaikan soal ini jika ketiga bilangan dimisalkan dengan *a, ap*, dan ap^2? Mana yang lebih mudah? Jelaskan.

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

1. Tunjukkan bahwa tiga bilangan terurut *a, b,* dan *c* membentuk barisan geometri apabila memenuhi persamaan $b^2 = ac$.
2. Tunjukkan bahwa empat bilangan terurut *a, b, c*, dan *d* membentuk barisan geometri apabila memenuhi persamaan $ad = bc$.

b. Sisipan dalam Barisan Geometri (Pengayaan)

Seperti pada barisan aritmetika, pada barisan geometri juga dapat disisipkan beberapa suku di antara setiap dua suku yang berurutan sehingga diperoleh barisan geometri yang baru. Perhatikan barisan geometri baku berikut.

$$a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{n-1}$$

Jika di antara setiap dua suku yang berurutan disisipkan *k* bilangan, diperoleh barisan geometri baru dengan suku pertama sama dengan suku pertama barisan geometri semula yaitu $U_1 = a$, rasio $= r'$, dan banyaknya suku yang baru adalah n'. Untuk mengetahui hubungan antara r' dan n' dengan r dan n, perhatikan tabel berikut.

Tabel 4.3

Barisan Geometri Semula	U_1	U_2	U_3
Barisan Geometri Baru	$U'_1 \underbrace{U'_2\, U'_3 \ldots U'_{k+1}}_{k \text{ suku}}\, U'_{k+2}$	$\underbrace{U'_{k+3}\, U'_{k+4}\, U'_{k+5} \ldots U'_{2k+2}}_{k \text{ suku}}$	U'_{2k+3}

Dari tabel tersebut, tampak adanya kesesuaian antara suku ke-2 barisan semula, yaitu $U_2 = ar$ dengan suku ke-(k + 2) pada barisan yang baru, yaitu $U'_{k+2} = a(r')^{k+1}$ sehingga diperoleh

$$ar = a(r')^{k+1}$$
$$\Leftrightarrow r = (r')^{k+1}$$
$$\Leftrightarrow r' = \sqrt[k+1]{r}$$

Dengan demikian, rumus suku ke-n pada barisan yang baru adalah

$$U_{n'} = a(r')^{n'-1}$$

dengan $n' = n + (n - 1)k$ dan $r' = \sqrt[k+1]{r}$

Contoh:

Diketahui barisan geometri 1, 9, 81, ... Di antara masing-masing suku yang berurutan disisipkan satu suku sehingga terbentuk barisan geometri yang baru. Tentukan rasio dan suku ke-8 dari barisan yang baru.

Penyelesaian:

Barisan geometri semula adalah 1, 9, 81, ... Berarti $a = 1$ dan $r = 9$. Di antara dua suku yang berurutan disisipkan 1 suku ($k = 1$) sehingga rasio barisan yang baru adalah

$r' = \sqrt[k+1]{r} = \sqrt[1+1]{9} = \sqrt{9} = 3$.

Oleh karena itu, suku ke-8 barisan yang baru adalah

$U_8 = a(r')^{8-1} = 1(\,3^7) = 2.187$

Uji Kompetensi 6

Kerjakan di buku tugas

1. Dari barisan-barisan geometri berikut, tentukan suku pertama, rasio, suku ke-12, dan suku ke-15.
   a. 2, 4, 8, 16, ...
   b. 4, 2, 1, ...
   c. 1, –2, 4, –8, ...
   d. 2, 6, 18, ...
   e. –3, 6, –12, ...
   f. 5, 15, 45, ...
2. Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jumlah ketiga bilangan itu adalah 35 dan hasil kalinya 1.000. Tentukan ketiga bilangan tersebut.
3. Bilangan $k - 2$, $k - 6$, dan $2k + 3$, untuk $k > 0$, membentuk tiga suku pertama dari deret geometri. Tentukan ketiga bilangan tersebut.
4. Jika $2k - 5$, $k - 4$, dan $\frac{1}{5}(k - 4)$ adalah tiga bilangan yang membentuk barisan geometri, tentukan nilai k.
5. Tiga buah bilangan membentuk suatu barisan geometri, dengan rasio lebih besar dari satu. Jika bilangan terakhir dikurangi 3, ketiga bilangan itu membentuk barisan aritmetika, sedangkan jika ketiga bilangan itu dijumlahkan, hasilnya adalah 54. Tentukan selisih bilangan ke-3 dan bilangan ke-1.
6. Jika suku pertama dan ke-3 dari barisan geometri masing-masing adalah $\sqrt[3]{m}$ dan m, untuk $m > 0$, tentukan suku ke-13 dan ke-15.
7. Sebuah tali dipotong menjadi 6 bagian. Panjang bagian yang satu dengan yang lain membentuk suatu barisan geometri. Jika potongan tali terpendek adalah 3 cm dan terpanjang adalah 96 cm, tentukan panjang tali semula.

8. Diketahui barisan geometri 1, 8, 64, ... Di antara masing-masing suku yang berurutan disisipkan dua suku sehingga terbentuk barisan geometri yang baru. Tentukan rasio dan suku ke-10 dari barisan geometri yang baru.

Soal Terbuka — **Kerjakan di buku tugas**

1. Diketahui p dan q adalah akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 + x + a = 0$. Jika p, q, dan $\frac{1}{2}pq$ membentuk barisan geometri, tentukan nilai a.
2. Tiga bilangan positif membentuk barisan geometri, dengan rasio $r > 1$. Jika suku tengah ditambah 4, terbentuk sebuah barisan aritmetika. Jika jumlah ketiga bilangan aritmetika itu 30, tentukan hasil kali ketiga bilangan itu.

c. Deret Geometri

Seperti halnya deret-deret lainnya yang diperoleh dengan menjumlahkan suku-sukunya, *deret geometri* atau *deret ukur* adalah suatu deret yang diperoleh dengan menjumlahkan suku-suku barisan geometri. Oleh karena itu, jika $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$ adalah barisan geometri baku, deret $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$ disebut *deret geometri baku*.

Jumlah n suku pertama dari deret geometri dinyatakan dengan S_n sehingga

$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$. Rumus jumlah n suku pertama dari deret geometri dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{array}{lcl} S_n & = & a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} \\ rS_n & = & \quad\;\; ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n \\ \hline \end{array} -$$

$$(1 - r)S_n = a - ar^n$$

$$\Leftrightarrow \quad S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Jadi, rumus jumlah n suku pertama suatu deret geometri adalah sebagai berikut.

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ untuk } r < 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \text{ untuk } r > 1$$

Apa yang terjadi jika $r = 1$?

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika r rasio (pembanding) suatu deret geometrik tak hingga yang konvergen dan S jumlah deret geometrik tak hingga

$\frac{1}{3+r} + \frac{1}{(3+r)^2} + \frac{1}{(3+r)^3} + ...$

maka ....

a. $\frac{1}{4} < S < \frac{1}{2}$

b. $\frac{3}{8} < S < \frac{3}{4}$

c. $\frac{1}{3} < S < 1$

d. $\frac{3}{4} < S < \frac{4}{3}$

e. $\frac{1}{5} < S < \frac{4}{5}$

Soal UMPTN, Kemampuan IPA, 1998

Tugas Inkuiri **Kerjakan di buku tugas**

Ambil sembarang deret geometri yang banyaknya suku ganjil. Perlihatkan bahwa suku tengah deret tersebut dalah $U_t = \sqrt{U_1 \cdot U_n} = \sqrt{U_2 \cdot U_{n-1}} = \sqrt{U_3 \cdot U_{n-2}} = \sqrt{U_4 \cdot U_{n-3}}$ demikian seterusnya.

Contoh:

1. Tentukan jumlah lima suku pertama dari deret 1 + 2 + 4 + 8 + ...

   Penyelesaian:

   1 + 2 + 4 + 8 + ..., berarti $a = 1$ dan $r = 2 > 1$.

   $$S_5 = \frac{1(2^5 - 1)}{2 - 1} = \frac{1(2^5 - 1)}{1} = 31$$

2. Suatu deret geometri dinyatakan dengan notasi sigma $S_n = \sum_{n=3}^{10} 3 \times 2^{n-2}$. Tentukan berikut ini.

   a. Suku pertama
   b. Rasio
   c. Rumus suku ke-n
   d. Rumus jumlah n suku pertama

   Penyelesaian:

   Perhatikan bentuk $\sum_{n=3}^{10} 3 \times 2^{n-2}$.

   Untuk $n = 3$, maka $3 \times 2^{n-2} = 3 \times 2^{3-2} = 3 \times 2 = 6$.
   Untuk $n = 4$, maka $3 \times 2^{n-2} = 3 \times 2^{4-2} = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$.
   Untuk $n = 5$, maka $3 \times 2^{n-2} = 3 \times 2^{5-2} = 3 \times 2^3 = 3 \times 8 = 24$.
   ⋮
   dan seterusnya.
   Untuk $n = 10$, maka $3 \times 2^{n-2} = 3 \times 2^{10-2} = 3 \times 2^8 = 3 \times 256 = 768$.
   Oleh karena itu, bentuk panjangnya adalah 6 + 12 + 24 + ... + 768.

   a. Tampak dari bentuk panjangnya bahwa suku pertamanya adalah 6.
   b. Rasio $(r) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{12}{6} = 2$.
   c. Rumus suku ke-n adalah $U_n = ar^{n-1} = 6 \times 2^{n-1} = 3 \times 2 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^n$.
   d. Rumus jumlah n suku pertama adalah $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{6(2^n - 1)}{2 - 1} = 6(2^n - 1)$.

Problem Solving

Diketahui deret geometri 10 + 40 + 160 + ... (sampai dengan 6 suku). Di antara setiap dua suku yang berurutan disisipkan satu suku sehingga terbentuk deret geometri baru.

a. Hitunglah jumlah deret geometri semula.
b. Hitunglah jumlah deret geometri yang baru.
c. Hitunglah jumlah suku-suku yang disisipkan.

Penyelesaian:

Suku pertama deret geometri yang diberikan adalah $a = 10$, rasionya $r = \frac{40}{10} = 4$, dan banyaknya suku $n = 6$.

a. Jumlah deret geometri semula adalah

$$S_6 = \frac{10(4^6 - 1)}{4 - 1} = \frac{10(4.096 - 1)}{3} = 13.650.$$

b. Di antara setiap dua suku yang berurutan disisipkan satu suku sehingga terbentuk deret geometri baru dengan $r' = \sqrt[1+1]{r} = \sqrt{4} = 2$ dan $n' = n + (n - 1)k = 6 + (6 - 1)1 = 11$. Berarti, jumlah deret geometri yang baru adalah

$$S_{11} = \frac{10(2^{11} - 1)}{2 - 1} = 10(2.048 - 1) = 20.470.$$

c. Jumlah suku-suku yang disisipkan
= jumlah deret geometri yang baru – jumlah deret geometri semula
= 20.470 – 13.650 = 6.850

Uji Kompetensi 7

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan jumlah 10 suku pertama dari deret geometri berikut.

   a. $1 + 4 + 16 + ...$
   b. $2 - 6 + 18 - ...$
   c. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + ...$
   d. $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - ...$
   e. $20 + 10 + 5 + ...$
   f. $-8 + 4 - 2 + ...$

2. Dalam satu deret geometri diketahui suku ke-9 dan suku ke-4 masing-masing adalah 128 dan –4. Tentukan suku ke-12 dan jumlah 10 suku pertama deret tersebut.
3. Dalam suatu deret geometri diketahui suku pertama dan suku ke-3 masing-masing adalah 64 dan 16. Tentukan suku ke-15 dan jumlah 15 suku pertama deret tersebut.
4. Bilangan $k - 2$, $k - 6$, dan $2k + 3$ membentuk deret geometri. Tentukan jumlah n suku pertama deret tersebut jika $U_1 = k - 2$.

5. Diketahui deret geometri $1+\frac{4}{9}+\frac{16}{81}+....$ Di antara dua suku yang berurutan disisipkan satu suku sehingga terbentuk deret geometri baru.Tentukan suku ke-8 dan jumlah 10 suku pertama dari deret geometri yang baru.
6. Diketahui deret geometri 2 + 16 + 128 + ... (sampai dengan 10 suku). Di antara setiap dua suku yang berurutan disisipkan dua suku sehingga terbentuk deret geometri baru.
   a. Hitunglah jumlah deret geometri semula.
   b. Hitunglah jumlah deret geometri yang baru.
   c. Hitunglah jumlah suku-suku yang disisipkan.

C. Deret Khusus dan Deret Geometri Tak Berhingga

Kalian telah mempelajari rumus suku ke-n dan jumlah n suku pertama deret aritmetika dan deret geometri. Sekarang, kita akan mempelajari rumus suku ke-n dan jumlah n suku pertama dari deret-deret khusus yang mungkin bukan merupakan deret aritmetika maupun deret geometri.

1. Deret Bilangan Asli

Himpunan bilangan asli adalah {1, 2, 3, ...} sehingga deret bilangan asli adalah 1 + 2 + 3 + ... Dengan demikian, jumlah n bilangan asli pertama dapat dinyatakan dengan notasi sigma $\sum_{k=1}^{n} k$.

Dengan memerhatikan pola suku-sukunya, dapat kita ketahui bahwa deret bilangan asli merupakan deret aritmetika, dengan suku pertama $a = 1$ dan beda $b = 1$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan sebagai berikut.

> Dalam suatu deret bilangan asli, berlaku
> - suku ke-n adalah $U_n = n$;
> - jumlah n suku pertama adalah
>
> $$S_n = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ atau } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Tugas

Inovasi

Kerjakan di buku tugas

Perhatikan rumus jumlah n suku deret geometri. Tunjukkan bahwa jumlah deret bilangan asli adalah

$S_n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

Contoh:

Pada deret bilangan asli, tentukan
a. Suku ke-5 dan suku ke-40.
b. Jumlah 5 suku pertama dan jumlah 40 suku pertama.

Penyelesaian:

a. Suku ke-5 adalah 5 dan suku ke-40 adalah 40.

b. Jumlah 5 suku pertama adalah $S_5 = \frac{1}{2} \times 5(1 + 5) = \frac{1}{2} \times 30 = 15$, sedangkan jumlah 40 suku pertama adalah $S_{40} = \frac{1}{2} \times 40(1 + 40) = \frac{1}{2} \times 1.640 = 820$.

2. Deret Kuadrat Bilangan Asli

Himpunan kuadrat bilangan asli adalah $\{1^2, 2^2, 3^2, ...\}$ sehingga deret kuadrat bilangan asli adalah $1^2 + 2^2 + 3^2 + ...$ Dengan demikian, jumlah n kuadrat bilangan asli pertama dapat dinyatakan dengan notasi sigma $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Selanjutnya, perhatikan bahwa

$S_1 = 1^2 = 1$
$S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$
$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$
$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
$\vdots$
dan seterusnya.
Tampak bahwa

$$S_1 = 1 = \frac{1}{6}(1)(1 + 1)(2\,(1) + 1))$$

$$S_2 = 5 = \frac{1}{6}(2)(2 + 1)(2\,(2) + 1))$$

$$S_3 = 14 = \frac{1}{6}(3)(3 + 1)(2\,(3) + 1))$$

$$S_4 = 30 = \frac{1}{6}(4)(4 + 1)(2\,(4) + 1))$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

Dengan memperhatikan pola suku-suku dari deret n kuadrat bilangan asli di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Dalam suatu deret kuadrat bilangan asli, berlaku
- rumus suku ke-n adalah $U_n = n^2$;
- jumlah n suku pertama adalah

$$S_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) \text{ atau } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Contoh:

Pada deret kuadrat bilangan asli, tentukan
a. suku ke-10 dan suku ke-45;
b. jumlah 10 suku pertama dan 45 suku pertama.

Penyelesaian:

a. Suku ke-10 adalah $U_{10} = 10^2 = 100$ dan suku ke-45 adalah $U_{45} = 45^2 = 2.025$.

b. Jumlah 10 suku pertama adalah $S_{10} = \frac{1}{6} \times 10(10 + 1)(2 \times 10 + 1) = 385$.

Jumlah 45 suku pertama adalah $S_{45} = \frac{1}{6} \times 45(45 + 1)(2 \times 45 + 1) = 31.395$.

3. Deret Kubik Bilangan Asli

Himpunan kubik (pangkat tiga) bilangan asli adalah $\{1^3, 2^3, 3^3, ...\}$ sehingga deret kubik bilangan asli adalah $1^3 + 2^3 + 3^3 + ...$ Dengan demikian, jumlah n kubik bilangan asli pertama dapat dinyatakan dalam notasi sigma $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$. Selanjutnya, perhatikan bahwa

$S_1 = 1^3 = 1$
$S_2 = 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$
$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$
$S_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$
$\vdots$

dan seterusnya.
Tampak bahwa

$$S_1 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$$

$$S_2 = 9 = \left(\frac{2(2+1)}{2}\right)^2$$

$$S_3 = 36 = \left(\frac{3(3+1)}{2}\right)^2$$

$$S_4 = 100 = \left(\frac{4(4+1)}{2}\right)^2$$

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Dengan memerhatikan suku-suku deret n kubik bilangan asli di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Dalam suatu deret kubik bilangan asli, berlaku
- rumus suku ke-n adalah $U_n = n^3$;
- jumlah n suku pertama adalah

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \text{ atau } \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Contoh:

Pada deret kubik bilangan asli, tentukan
a. suku ke-6 dan suku ke-30;
b. jumlah 6 suku pertama dan 30 suku pertama.

Penyelesaian:

a. Suku ke-6 adalah $U_6 = 6^3 = 216$ dan suku ke-30 = $U_{30} = 30^3 = 27.000$

b. Jumlah 6 suku pertama adalah $S_6 = \left(\frac{6(6 + 1)}{2}\right)^2 = 21^2 = 441$.

Jumlah 30 suku pertama adalah $S_{30} = \left(\frac{30(30 + 1)}{2}\right)^2 = 465^2 = 216.225$.

4. Deret Geometri Tak Berhingga

Pada awal pembahasan bab ini, telah dijelaskan bahwa berdasarkan banyaknya suku, suatu barisan dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu barisan berhingga dan barisan tak berhingga. Perhatikan barisan-barisan geometri berikut.

a. 1, 2, 4, 8, ...
b. 27, 9, 3, 1, ...
c. 5, –25, 125, –625, ...
d. –216, 72, –24, 8, ...

Barisan-barisan di atas merupakan contoh barisan tak hingga. Perhatikan barisan a dan c pada contoh di atas. Misalkan suku ke-n barisan itu adalah U_n. Makin besar nilai n pada barisan tersebut, harga mutlak suku-suku barisan a dan c makin besar. Barisan seperti itu dinamakan *barisan divergen*. Adapun barisan b dan d berlaku sebaliknya, makin besar nilai n, harga mutlak suku-sukunya makin kecil. Barisan seperti itu dinamakan *barisan konvergen*. Dengan kata lain, pengertian kedua barisan itu dapat ditulis sebagai berikut.

Misalkan r adalah rasio suatu barisan geometri tak berhingga, barisan itu disebut
a. barisan divergen jika $|r| > 1$, artinya $r < -1$ atau $r > 1$;
b. barisan konvergen jika $|r| < 1$, artinya $-1 < r < 1$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Deret geometri tak hingga $(x - 1)$, $(x - 1)^2$, $(x - 1)^3$, ... konvergen untuk
a. $-1 < x < 1$
b. $0 < x < 2$
c. $x > 2$
d. $x < 2$
e. semua x

Soal SKALU, 1978

Apabila suku-suku barisan yang konvergen dijumlahkan, diperoleh deret yang konvergen. Pada deret konvergen, jumlah suku-sukunya tidak akan melebihi suatu harga tertentu, tetapi terus-menerus mendekati harga tersebut. Harga tertentu ini disebut *jumlah tak berhingga suku* yang dinotasikan dengan S_∞. Harga S_∞ merupakan harga pendekatan (limit) jumlah semua suku (S_n), untuk n mendekati tak berhingga.

Dengan memperhatikan kenyataan bahwa untuk $-1 < r < 1$ jika dipangkatkan bilangan yang sangat besar maka hasilnya mendekati 0.

Misalnya $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{1}{2^{100}} \to 0, \left(\frac{1}{10}\right)^{1.000} = \frac{1}{10^{1.000}} \to 0$, dan seterusnya.

Oleh karena itu,

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n \text{ .... (dibaca: limit } S_n \text{ untuk } n \text{ mendekati tak berhingga)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ ...... (karena deret konvergen maka } |r| < 1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^n}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r} \text{ .... (karena } \lim_{n\to\infty} ar^n = 0)$$

Dengan demikian, rumus jumlah tak berhingga suku dari deret geometri yang konvergen adalah

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Contoh:

1. Tentukan jumlah tak berhingga suku dari deret berikut.

a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

b. $10^{2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots}$

Penyelesaian:

a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

Dari deret tersebut, diketahui $a = 1$ dan $r = \frac{1}{2}$ sehingga

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

b. $10^{2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots}$

Perhatikan deret $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$.

Dari deret tersebut, diperoleh $a = 2$ dan $r = \frac{1}{2}$.

Dengan demikian, $S_\infty = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4.$

Jadi, $10^{2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots} = 10^4 = 10.000$.

2. Diketahui suku ke-n dari deret geometri adalah $U_n = \frac{3}{2^n}$. Tentukan:

a. suku pertama;
b. rasio;
c. jumlah tak berhingga suku.

Penyelesaian:

a. Suku pertama adalah $U_1 = \frac{3}{2^1} = \frac{3}{2}$.

b. Suku ke-2 adalah $U_2 = \frac{3}{4}$ sehingga $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$.

c. Jumlah tak berhingga suku adalah

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Problem Solving

Tentukan nilai x agar deret $1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + \ldots$ konvergen.

Penyelesaian:

Rasio deret tersebut adalah $r = x - 1$. Syarat deret konvergen adalah $|r| < 1$ sehingga

$|r| < 1$

$\Leftrightarrow |x-1| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1$

$\Leftrightarrow 0 < x < 2$

Jadi, agar deret tersebut konvergen, nilai x terletak pada interval $0 < x < 2$.

Tugas Inovasi **Kerjakan di buku tugas**

Perhatikan deret geometri tak hingga yang konvergen $a + ar + ar^2 + ...$

a. Buktikan bahwa jumlah suku-suku pada kedudukan ganjil (S_{ganjil}) adalah $S_{ganjil} = \dfrac{a}{1+r^2}$.

b. Buktikan bahwa jumlah suku-suku pada kedudukan genap (S_{genap}) adalah $S_{genap} = \dfrac{ar}{1-r^2}$.

c. Buktikan bahwa $S_{genap} : S_{ganjil} = r$.

Kegiatan **Kerjakan di buku tugas**

Tujuan:
Menentukan jumlah suku-suku pada kedudukan nomor ganjil dan pada kedudukan nomor genap dari deret geometri tak berhingga $\dfrac{15}{100} + \dfrac{15}{10.000} + \dfrac{15}{1.000.000} + ...$

Permasalahan:
Bagaimana rumus jumlah suku-suku pada kedudukan nomor ganjil dan pada kedudukan nomor genap dari deret geometri tak berhingga tersebut?

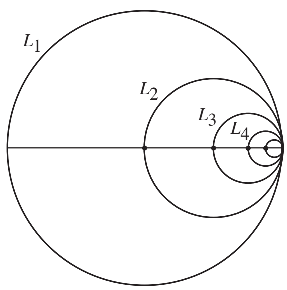
Langkah-Langkah:
1. Pisahkan deret suku-suku pada kedudukan nomor ganjil dan pada kedudukan nomor genap.
2. Dari masing-masing deret tersebut, tentukan suku pertama dan rasionya.
3. Dengan rumus deret geometri tak berhingga tentukan jumlah dua deret tersebut.

Kesimpulan:
Jumlah suku-suku pada kedudukan nomor ganjil adalah $\dfrac{1.500}{9.999}$, sedangkan jumlah suku-suku pada kedudukan nomor genap adalah $\dfrac{15}{9.999}$.

Uji Kompetensi 8

Kerjakan di buku tugas

1. Pada deret bilangan asli, tentukan berikut ini.
   a. Suku ke-15 dan ke-60
   b. Jumlah 15 suku pertama dan jumlah 60 suku pertama
2. Pada deret kuadrat bilangan asli, tentukan berikut ini.
   a. Suku ke-20 dan suku ke-35
   b. Jumlah 20 suku pertama dan 35 suku pertama.
3. Pada deret kubik bilangan asli, tentukan berikut ini.
   a. Suku ke-8 dan suku ke-40
   b. Jumlah 8 suku pertama dan 40 suku pertama.
4. Tentukan jumlah tak berhingga dari deret berikut.
   a. $2 + \sqrt{2} + 1 + \dots$
   b. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots$
   c. $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \dots$
   d. $\pm 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \pm \dots$
5. Diketahui suku ke-n dari deret geometri adalah $\frac{5}{2^n}$. Tentukan:
   a. suku pertama;
   b. rasio;
   c. jumlah tak berhingga suku.
6. Tentukan jumlah deret geometri tak berhingga jika diketahui suku pertama dan ke-3 masing-masing adalah $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{0{,}125}$.
7. Tentukan nilai dari
   a. $3^{8+4+2+1+\dots}$
   b. $3^{\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^4+\left(\frac{1}{x}\right)^6+\left(\frac{1}{x}\right)^8+\dots}$
   c. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots}}}}$ (**Petunjuk** : $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = ((2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{8}}$
8. Diketahui suatu deret geometri konvergen dengan suku pertama a dan jumlah seluruh suku-sukunya 2. Tentukan batas-batas a yang mungkin.
9. Tentukan batas-batas nilai x agar barisan geometri $3, 3(1-x), 3(1-x)^2, \dots$ konvergen. (**Petunjuk**: barisan geometri konvergen jika $-1 < r < 1$)
10. Perhatikan gambar lingkaran di samping.
    Luas $L_1 = a$ cm^2.
    Jika diameter $L_2 = \frac{1}{2}$ diameter L_1, diameter $L_3 = \frac{1}{2}$ diameter L_2, diamater $L_4 = \frac{1}{2}$ diameter L_3, dan seterusnya, tentukan jumlah luas seluruh lingkaran $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + \dots$ dalam a.



Gambar 4.1

D. Penggunaan Barisan dan Deret

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak persoalan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan kaidah barisan maupun deret, misalnya perhitungan bunga bank, perhitungan kenaikan produksi, dan laba suatu usaha. Untuk menyelesaikan persoalan tersebut, terlebih dahulu kita tentukan apakah masalah tersebut merupakan barisan aritmetika, barisan geometri, deret aritmetika, atau deret geometri. Kemudian, kita selesaikan dengan rumus-rumus yang berlaku untuk memperoleh jawaban dari persoalan yang dimaksud.

Contoh:

1. Suatu perusahaan sepatu mulai berproduksi pada awal tahun 1987, dengan jumlah produksi 10.000 pasang sepatu. Ternyata, setiap tahun produksinya berkurang 500 pasang sepatu. Pada tahun keberapa perusahaan tersebut tidak mampu berproduksi lagi?

   Penyelesaian:

   Produksi tahun pertama adalah 10.000 pasang sepatu, produksi tahun ke-2 adalah 9.500 pasang sepatu, tahun ke-3 adalah 9.000 pasang sepatu, dan seterusnya. Dari sini terlihat bahwa dari tahun ke tahun produksi sepatu perusahaan itu membentuk barisan aritmetika 10.000, 9.500, 9.000, ..., dengan $a = 10.000$ dan $b = -500$.

   Perusahaan tidak memproduksi lagi, berarti $U_n = 0$ sehingga

   $$\begin{aligned} U_n = 0 &\Leftrightarrow a + (n-1)b = 0 \\ &\Leftrightarrow 10.000 + (n-1)(-500) = 0 \\ &\Leftrightarrow 10.000 - 500n + 500 = 0 \\ &\Leftrightarrow 500n = 10.500 \\ &\Leftrightarrow n = 21 \end{aligned}$$

   Jadi, perusahaan tersebut tidak mampu lagi berproduksi pada tahun ke-21 atau tahun 2008.

2. Pada awal bulan Juni 2006, Yunita menyumbang Rp10.000,00 ke dalam sebuah kotak dana kemanusiaan. Sebulan kemudian, Yunita mengajak 10 orang temannya untuk menyumbang Rp10.000,00 ke dalam kota tersebut. Bulan berikutnya, setiap orang dari 10 orang yang diajak Yunita mengajak 10 orang lainnya untuk menyumbang Rp10.000,00 ke dalam kotak yang sama. Demikian seterusnya. Jika setiap orang hanya sekali menyumbang Rp10.000,00 ke dalam kotak dana kemanusiaan dan Yunita adalah orang pertama yang menyumbangkan dana ke dalam kotak itu, tentukan jumlah uang yang terkumpul hingga akhir bulan Maret 2007.

   Penyelesaian:

   - Uang yang terkumpul pada bulan Juni 2006 Rp10.000,00.
   - Uang yang terkumpul hingga bulan Juli Rp10.000,00 + 10(Rp10.000,00).
   - Uang yang terkumpul pada bulan Agustus Rp10.000,00 + 10(Rp10.000,00) + 10(10(10.000,00)).

- Uang yang terkumpul pada bulan September Rp10.000,00 + 10(Rp10.000,00) + 10(10(Rp10.000,00)) + 10(10(10(Rp10.000,00))).
- Dan seterusnya hingga Maret 2007.

Jumlah uang yang terkumpul setiap bulan dianggap sebagai jumlah bilangan berikut.
10.000 + 10(10.000) + 10(10(10.000,00)) + 10(10(10(10.000))) + ...

$$=10.000\,(\underbrace{1 + 10 + 100 + 1.000 + ...}_{\text{deret geometri}})$$

Jumlah tersebut mengikuti pola deret geometri dengan suku pertama 1 dan rasio 10.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

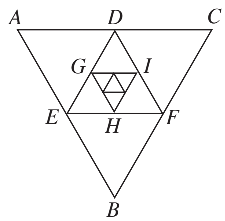
$$S_{10} = \frac{1(10^{10} - 1)}{10 - 1} = 1.111.111.111$$

Dengan demikian, jumlah uang yang terkumpul hingga bulan Maret 2007 adalah Rp10.000,00 × S_{10} = Rp10.000,00 × 1.111.111.111 = Rp11.111.111.110.000,00.

Uji Kompetensi 9

Kerjakan di buku tugas

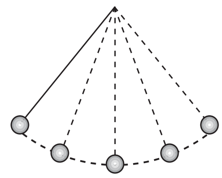
1. Suatu perusahaan sepatu mulai berproduksi pada tahun 1990 dengan jumlah produksi 5.000 pasang sepatu. Ternyata, setiap tahun produksinya bertambah 100 pasang sepatu. Pada tahun keberapa perusahaan tersebut mampu memproduksi 100.000 pasang sepatu?
2. Selama 5 tahun berturut-turut jumlah penduduk di Kota A membentuk deret geometri. Pada tahun terakhir, jumlah penduduknya 4 juta jiwa, sedangkan jumlah penduduk tahun pertama dan ke-3 adalah 1,25 juta jiwa. Tentukan jumlah penduduk Kota A pada tahun ke-4.
3. Perhatikan gambar segitiga sama sisi di samping. Panjang sisi segitiga itu adalah a. Di dalam segitiga itu dibuat segitiga sama sisi dengan titik sudut terletak di tengah-tengah sisi segitiga semula. Hal ini diulang terus-menerus. Tentukan jumlah ruas seluruh segitiga yang terbentuk. (Pada gambar di samping, jumlah ruas seluruh segitiga yang dimaksud adalah luas $\Delta\,ABC$ + luas $\Delta\,DEF$ + luas $\Delta\,GHI$ + ...)



Gambar 4.2

4. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 10 meter. Setiap kali sesudah bola terjatuh ke lantai, bola itu terpantul kembali hingga mencapai ketinggian $\frac{3}{4}$ dari tinggi sebelumnya. Tentukan panjang seluruh lintasan bola tersebut hingga berhenti. (Ingat: panjang lintasan meliputi lintasan naik dan lintasan turun)

5. Jarak melintang secara berurutan yang dilalui sebuah bandul adalah 36 cm, 24 cm, 16 cm, ...
   Tentukan total jarak yang dilalui bandul itu sebelum berhenti.



Gambar 4.3

E. Deret dalam Hitung Keuangan

Dalam hitung keuangan, deret sangat sering digunakan untuk penyelesaian kasus-kasus yang berhubungan dengan permodalan, bunga, dan pertumbuhan uang.

Pada pembahasan kali ini, kita akan membahas bunga tunggal, bunga majemuk, dan anuitas.

1. Bunga Tunggal

Dalam melakukan usaha, seseorang tentu menginginkan pertumbuhan dari modal usahanya. Misalkan modal yang digunakan dalam usaha sebesar Rp1.000.000,00. Setelah menjalankan usahanya, ternyata modalnya tumbuh dan menjadi Rp2.000.000,00. Selisih antara hasil usaha dan modal ini dinamakan *bunga*. Namun, pengertian bunga tidak sesempit itu. Misalkan seseorang meminjam uang sebesar Rp1.000.000,00 dan pada waktu tertentu harus mengembalikannya sebesar Rp1.450.000,00. Selisih antara jumlah uang yang dikembalikan dan jumlah uang yang dipinjam ini juga dapat dinamakan *bunga*.

Bunga juga dapat dinyatakan dalam persentase. Besarnya bunga bergantung pada *besar modal* yang dipinjam dan *tingkat suku bunganya*.

Bunga yang dibayarkan peminjam pada akhir periode peminjaman (tertentu), dengan besar peminjaman dijadikan dasar perhitungan dan bunga pada periode berikutnya selalu tetap, dinamakan *bunga tunggal*.

Misalkan diketahui uang sebesar Rp200.000,00 dibungakan atas dasar bunga tunggal dengan tingkat suku bunga 10%.

- Jumlah uang dan bunga sampai akhir bulan pertama adalah
  Rp200.000,00 + 10% × Rp200.000,00
  = Rp200.000,00 (1 + 10%).
- Jumlah uang dan bunga sampai akhir bulan kedua adalah
  Rp200.000,00 + 10% × Rp200.000,00
  + 10% × Rp200.000,00 = Rp200.000,00 (1 + 2 × 10%).
- Jumlah uang dan bunga sampai akhir bulan ketiga adalah
  Rp200.000,00 + 10% × Rp200.000,00
  + 10% × Rp200.000,00 + 10% × Rp200.000,00
  = Rp200.000,00 (1 + 3 × 10%)

Jumlah uang dan bunga sampai akhir bulan ke-t adalah Rp200.000,00 + 10% × Rp200.000,00 + ...
+ 10% × Rp200.000,00 = Rp200.000,00 (1 + t × 10%).

Misalkan modal sebesar M_0 dibungakan atas dasar bunga tunggal selama t periode waktu dengan tingkat suku bunga (persentase) r. Bunga (B) dan besar modal pada akhir periode (M_t) adalah

$$B = M_0 \times t \times r$$
$$M_t = M_0 (1 + t \times r)$$

Contoh:

Suatu bank perkreditan memberikan pinjaman kepada nasabahnya atas dasar bunga tunggal sebesar 3% per bulan. Jika seorang nasabah meminjam modal sebesar Rp6.000.000,00 dengan jangka waktu pengembalian 2 tahun, tentukan

a. besar bunga setiap bulannya;
b. besar uang yang harus dikembalikan sesuai jangka waktu yang ditentukan.

Penyelesaian:

Diketahui r = 3%, M_0 Rp6.000.000,00, dan t = 24 bulan.

a. Besar bunga setiap bulan adalah

$$\begin{aligned} B &= M_0 \times t \times r \\ &= \text{Rp}6.000.000,00 \times 1 \times 3\% \\ &= \text{Rp}180.000,00 \end{aligned}$$

b. Besar uang yang harus dikembalikan sesuai jangka 24 bulan adalah

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 (1 + t \times r) \\ M_{24} &= \text{Rp}6.000.000,00 (1 + 24 \times 3\%) \\ &= \text{Rp}6.000.000,00 (1,72) \\ &= \text{Rp}10.320.000,00 \end{aligned}$$

Dari contoh di atas, tentu kalian dapat menyatakan bahwa perhitungan bunga tunggal berhubungan erat dengan deret aritmetika. Coba jelaskan alasan kalian, mengapa demikian?

Problem Solving

Herman meminjam uang di Bank Jaya Bersama sebesar Rp4.000.000,00 dengan suku bunga tunggal 20% per tahun. Dalam waktu 90 hari, Herman sudah harus mengembalikan uang tersebut. Berapa bunga dan jumlah uang yang harus dikembalikannya? (Anggap 1 tahun 360 hari)

Penyelesaian:

Dari soal di atas diketahui M_0 = Rp4.000.000,00,

r = 20% per tahun, dan t = 90 hari = $\frac{1}{4}$ tahun.

a. Bunga: $B = M_0 \times t \times r$

$$= \text{Rp}4.000.000{,}00 \times \frac{1}{4} \times 20\%$$

$$= \text{Rp}200.000{,}00$$

b. Jumlah uang yang harus dikembalikan adalah

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 (1 + t \times r) \\ &= M_0 + M_0 \times t \times r \\ &= M_0 + B \\ &= \text{Rp}4.000.000{,}00 + \text{Rp}200.000{,}00 \\ &= \text{Rp}4.200.000{,}00 \end{aligned}$$

2. Bunga Majemuk

Tugas

Informasi Lebih Lanjut

Kerjakan di buku tugas

Coba kalian cari tahu dapat dipakai untuk masalah apa saja rumus bunga majemuk,

a) jika i > 0;

b) jika i < 0?

Pada pembahasan di depan, kalian telah mengetahui perhitungan bunga yang didasarkan atas bunga tunggal. Sekarang kita akan memahami bunga majemuk, yaitu bunga yang dihitung atas dasar jumlah modal yang digunakan ditambah dengan akumulasi bunga yang sebelumnya. Bunga ini disebut bunga berbunga. Perhitungan bunga berbunga semacam ini dapat kalian pahami melalui perhitungan deret geometri.

Misalkan modal sebesar M_0 dibungakan atas dasar bunga majemuk, dengan tingkat suku bunga i (dalam persentase) per periode waktu. Besar modal pada periode ke-t (M_t) dapat dihitung dengan cara berikut.

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0 + M_0 \times i = M_0 (1 + i) \\ M_2 &= M_1 (1 + i) = [M_0 (1 + i)] (1 + i) = M_0 (1 + i)^2 \\ M_3 &= M_2(1 + i) = [(M_0 (1 + i)^2] (1 + i) = M_0 (1 + i)^3 \\ &\vdots \\ M_t &= M_{t-1}(1 + i) = [M_0 (1 + i)^{t-1}](1 + i) = M_0(1 + i)^t \end{aligned}$$

Jadi, dapat kita katakan sebagai berikut.

Jika modal sebesar M_0 dibungakan atas dasar bunga majemuk dengan tingkat suku bunga i (dalam persen) per periode tertentu, besar modal pada periode ke-t (M_t) dapat ditentukan dengan rumus

$$M_t = M_0 (1 + i)^t$$

Contoh:

Suatu bank memberi pinjaman kepada nasabahnya atas dasar bunga majemuk 18% per tahun. Jika seorang nasabah meminjam modal sebesar Rp10.000.000,00 dan bank itu membungakan secara majemuk per bulan, berapakah modal yang harus dikembalikan setelah 2 tahun?

Penyelesaian:

Dari soal diketahui M_0 = Rp10.000.000,00, $i = \frac{18\%}{12}$ = 1,5%, dan t = 24 bulan.

Dengan demikian, modal yang harus dikembalikan setelah 2 tahun (24 bulan) adalah

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 (1 + i)^t \\ M_{24} &= \text{Rp}10.000.000,00\ (1 + 0,015)^{24} \\ &= \text{Rp}10.000.000,00\ (1,4295028) \\ &= \text{Rp}14.295.028,12 \end{aligned}$$

3. Anuitas

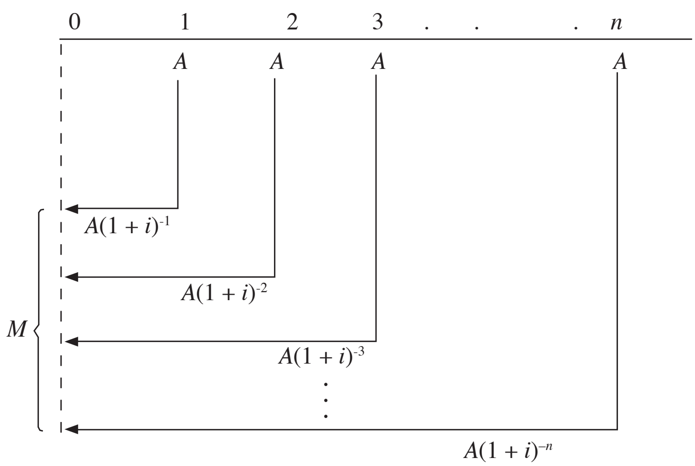
Kasus utang piutang penyelesaiannya dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu cara pembayarannya dapat dilakukan dengan anuitas di samping dengan cara-cara pembayaran yang telah kalian pelajari sebelumnya (dengan bunga). Pembayaran yang dilakukan dengan anuitas akan makin kecil karena bunga yang dibayarkan juga makin kecil. Hal ini berakibat pokok pinjaman juga makin kecil. Jadi, anuitas merupakan cara pembayaran maupun penerimaan yang secara urut dalam jumlah tetap dengan jangka waktu juga tetap.

Ada dua macam anuitas, yaitu anuitas pasti dan anuitas tidak pasti. Anuitas pasti mempunyai ciri khas tanggal mulai dan tanggal selesai tepat. Misalnya pembayaran utang. Pada anuitas tidak pasti, jangka pembayarannya disesuaikan keadaan. Misalnya, santunan asuransi kecelakaan. Pada kali ini, kita hanya akan membicarakan anuitas pasti.

Misalnya modal sebesar M dipinjamkan dengan pembayaran n kali anuitas. Jika suku bunga yang diberikan i (dalam persen) dan besar anuitas A, besar anuitas dapat ditentukan dengan cara berikut.

$$A = \frac{M}{\sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k}}$$

Perhatikan ilustrasi di samping.



Dari ilustrasi di atas dapat dijelaskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} M &= A(1+i)^{-1} + A(1+i)^{-2} + A(1+i)^{-3} + \ldots + A(1+i)^{-n} \\ &= A[((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-n}] \\ &= A\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\right] \end{aligned}$$

Bentuk terakhir merupakan deret geometri dengan suku awal

$a = \dfrac{1}{1+i}$ dan rasio $r = \dfrac{1}{1+i}$.

Oleh karena itu,

$$M = A\left[\frac{a(1-r^n)}{1-r}\right] = A\left[\frac{\frac{1}{1+i}\left(1-\frac{1}{(1+i)^n}\right)}{1-\frac{1}{1+i}}\right] = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right],$$

sehingga $A = \dfrac{Mi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = Mi\dfrac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$.

Jadi, besar anuitas dapat juga ditentukan dengan rumus

$$A = \frac{Mi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Contoh:

Pak Dani meminjam uang sebesar Rp10.000.000,00 pada suatu bank. Pelunasan dilakukan dengan cara anuitas sebanyak 10 kali. Anuitas pertama dilakukan sebulan setelah uang pinjaman diterima. Tentukan besar anuitasnya jika suku bunga yang ditetapkan bank 15% per tahun.

Penyelesaian :

Dari soal diketahui bahwa

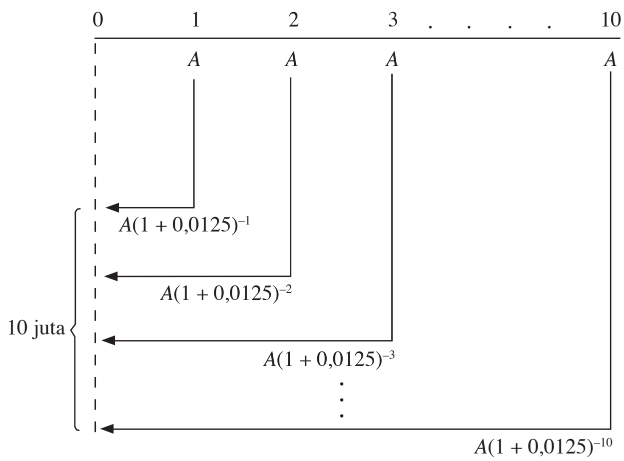
M = Rp10.000.000,00

$i = 15\%$ per tahun

$= \dfrac{15\%}{12}$

$= 1,25\%$ per bulan

$n = 10$



Dengan menggunakan rumus anuitas, diperoleh

$$A = \frac{Mi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$= \frac{10.000.000(0{,}0125)(1+0{,}0125)^{10}}{(1+0{,}0125)^{10} - 1}$$

$$= \frac{125.000(1.0125)^{10}}{(1{,}0125)^{10} - 1} = \frac{125.000(1{,}13227083)}{0{,}13227083} = 1.070.030{,}74$$

Jadi, anuitasnya sebesar Rp1.070.030,74. Artinya, Pak Dani setiap bulan harus membayar ke bank sebesar Rp1.070.030,74 selama 10 bulan (sebanyak 10 kali).

Problem Solving

Suatu pinjaman sebesar Rp20.000.000,00 harus dilunasi dengan 10 anuitas akhir tahunan. Jika suku bunga yang ditetapkan 5%, tentukan besar anuitas.

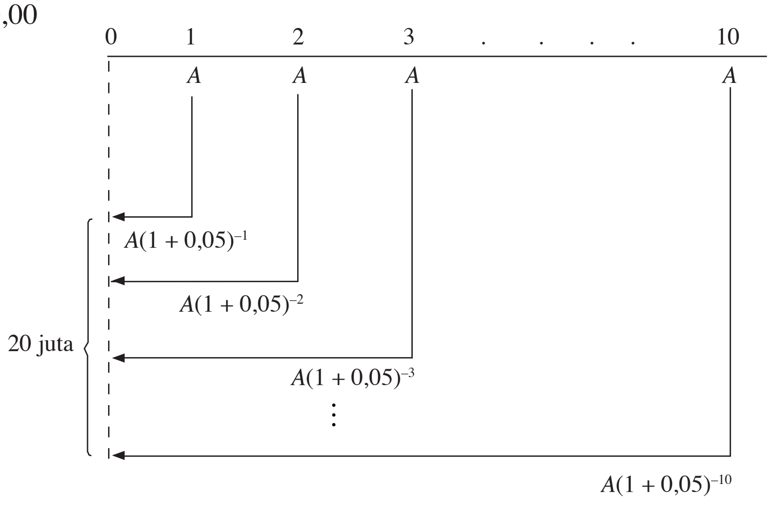
Penyelesaian:

Pada soal diketahui

M = Rp20.000.000,00

i = 5% = 0,05

n = 10



Dengan menggunakan rumus anuitas, diperoleh

$$A = \frac{M}{\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k}}$$

$$= \frac{\text{Rp}20.000.000{,}00}{\sum_{k=1}^{10}(1+0{,}05)^{-k}}$$

Nilai $\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{10}(1+0,05)^{-k}} = 0,12950457$ (diperoleh dari tabel)

Dengan demikian, besar anuitas adalah

$A = \text{Rp}20.000.000,00 \times 0,12950457 = \text{Rp}2.590.091,40$

Jadi, besarnya anuitas adalah Rp2.590.091,40. Artinya, peminjam setiap tahun harus membayar sebesar Rp2.590.091,40 selama 10 tahun (sebanyak 10 kali).

Lebih lanjut lagi, kalian dapat menyajikan tabel rencana angsuran yang berkaitan dengan anuitas ini. Adapun bentuknya adalah sebagai berikut.

Misalkan sisa pinjaman pada saat i adalah H_i, $i = 1$ sampai dengan n dan besar angsuran a_i, untuk $i = 1$ sampai n.

Tabel Rencana Angsuran

Akhir Periode	Sisa Pinjaman	Anuitas	Beban Bunga di Akhir Periode	Besar Angsuran
1	$H_1 = M$	A	iH_1	$a_1 = A - iH_1$
2	$H_2 = H_1 - a_1$	A	iH_2	$a_2 = A - iH_2$
3	$H_3 = H_2 - a_2$	A	iH_3	$a_3 = A - iH_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$H_n = H_{n-1} - a_{n-1}$	A	iH_n	$a_n = A - iH_n$

Jika dijabarkan lebih lanjut, besarnya angsuran tiap periode adalah

$a_1 = (A - iM)$

$a_2 = (A - iM)(1 + i)$

$a_3 = (a - iM)(1 + i)^2$

$\vdots$

$a_n = (a - iM)(1 + i)^{n-1}$ dan $H_n = 0$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Misalkan sebuah pinjaman sebesar Rp1.000.000,00 dilunasi dengan anuitas. Pinjaman itu akan dilunasi dengan 5 kali anuitas. Anuitas pertama dibayarkan sesudah 1 periode dengan suku bunga 15% per periode. Dari informasi ini, tentukan:

a. besar anuitas;
b. tabel rencana angsuran.

Penyelesaian:

a. Diketahui, $M = 1.000.000$
$n = 5$
$i = 15\%$

$$A = Mi\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$= 1.000.000 \times 0,15 \times \frac{(1+0,15)^5}{(1+0,15)^5 - 1}$$

$= 1.000.000$ x $0,29831555$
$= 298.315,55$

Jadi, besar anuitas Rp298.315,55.

b. Tabel rencana angsuran

Akhir Periode	Sisa Pinjaman	Anuitas	Beban Bunga di Akhir Periode	Besar Angsuran
1	Rp1.000.000,00	Rp298.315,55	Rp150.000,00	Rp148.315,55
2	Rp851.684,45	Rp298.315,55	Rp127.752,67	Rp170.562,88
3	Rp681.121,57	Rp298.315,55	Rp102.168,24	Rp196.147,31
4	Rp484.974,26	Rp298.315,55	Rp72.746,14	Rp225.569,41
5	Rp259.404,85	Rp298.315,55	Rp38.910,73	Rp259.404,85

Uji Kompetensi 10

Kerjakan di buku tugas

1. Pak Tohir meminjam uang sebesar Rp2.000.000,00 pada Koperasi Jaya. Koperasi menetapkan suku bunga tunggal 3% per bulan. Berapa jumlah uang yang harus dia kembalikan jika jangka pengembaliannya 1 tahun?
2. Bu Dani meminjam uang di Bank Lancar sebesar Rp15.000.000,00. Dalam satu bulan uang tersebut harus dikembalikan dengan jumlah Rp15.750.000,00. Tentukan:
   a. tingkat (suku) bunga tunggal;
   b. berapa jumlah uang yang harus dikembalikan Bu Dani jika dia meminjam selama satu tahun?
3. Bu Yanti menyimpan uang di suatu bank yang memberikan bunga majemuk dengan tingkat suku bunga 4% per tahun. Berapa jumlah uang Bu Yanti pada akhir tahun ke-6?
4. Pada setiap awal bulan, seorang anak menabung sebesar Rp25.000,00 di suatu bank. Setiap bulan ia mendapatkan bunga majemuk sebesar 8%. Pada akhir bulan ke-12, semua uangnya diambil. Berapakah jumlah uang yang diambilnya?

5. Nova menabung uangnya di bank Rp1.000.000,00 setiap tahun. Bank tersebut memberikan bunga dengan sistem bunga majemuk sebesar 12% per tahun. Berapakah jumlah uangnya setelah ditabung selama 25 tahun?
6. Suatu bank memberikan bunga 12% untuk tabungan dan menerima bunga dari pinjaman sebesar 15% per tahun dengan sistem bunga majemuk. Tentukan keuntungan bank itu dalam 15 tahun untuk setiap Rp10.000,00.
7. Pak Wayan meminjamkan uang Rp2.000.000,00 kepada seorang peminjam dengan perjanjian bunga majemuk. Jika suku bunga yang diberikan Pak Wayan 5,2% per tahun, tentukan uang yang harus dikembalikan peminjam selama jangka peminjaman 8 bulan.
8. Suatu modal sebesar Rp12.000.000,00 dipinjamkan dengan suku bunga 2,5% per bulan. Modal itu harus dilunasi dalam 10 anuitas. Anuitas pertama dilakukan sebulan setelah uang diterima peminjam. Tentukan besarnya anuitas. Buatlah tabel rencana angsuran.
9. Sebuah dealer sepeda motor mengkreditkan sebuah motor seharga Rp17.000.000,00 kepada Tuan Indra. Sepeda ini harus dilunasi dalam 24 anuitas bulanan. Jika suku bunga yang diberikan pihak dealer 3%, tentukan besar anuitasnya.
10. Sebuah pinjaman Rp1.000.000,00 akan dilunasi dengan anuitas. Besar anuitas Rp200.000,00 tiap akhir bulan.
    a. Sesudah berapa lama pinjaman akan lunas?
    b. Buatlah tabel rencana angsurannya.

Refleksi

Coba perhatikan kembali barisan dan deret yang telah kalian pelajari. Kemudian, bandingkan dengan deret hitung keuangan. Kesimpulan apakah yang kalian peroleh dengan adanya hubungan antara deret dan ilmu hitung keuangan? Manfaat apa yang kalian peroleh setelah mempelajari materi ini?

Rangkuman

1. Rumus umum barisan aritmetika baku adalah
   $U_n = a + (n - 1)b$, dengan U_n = suku ke-n, a = suku pertama, b = beda, dan n = nomor suku.
2. Jumlah n suku suatu deret aritmetika adalah
   $$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)b) \text{ atau } S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n).$$
3. Rumus umum suku ke-n barisan geometri adalah $U_n = ar^{n-1}$, dengan U_n = suku ke-n, a = suku pertama, r = rasio, dan n = nomor suku.
4. Rumus umum jumlah n suku pertama deret geometri adalah
   $$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ untuk } r < 1 \text{ atau } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \text{ untuk } r > 1.$$

Latihan Ulangan Harian IV

Kerjakan di buku tugas

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Di antara pernyataan-pernyataan berikut yang benar adalah ....
   a. $\sum_{i=1}^{n} A_iB_i = \sum_{i=1}^{n} A_i \times \sum_{i=4}^{n} B_i$
   b. $\sum_{i=1}^{n} (A_i + B_i) = \sum_{i=1}^{3} A_i + \sum_{i=4}^{n} B_i$
   c. $\sum_{i=1}^{n}(A_i + B_i)C_i = \sum_{i=1}^{n} A_iC_i + \sum_{i=1}^{n} B_iC_i$
   d. $\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{B_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} B_i}{\sum_{i=1}^{n} B_i}$
   e. $\sum_{i=1}^{n} 3^2 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2$
2. Diketahui barisan bilangan 5, 6, 9, 14, 21, ...
   Jumlah seluruh barisan itu dapat dinyatakan dengan ....
   a. $\sum_{k=1}^{n} (k+5)$
   b. $\sum_{k=1}^{n} (2k+5)$
   c. $\sum_{k=0}^{n} (k^2+5)$
   d. $\sum_{k=1}^{n} (k+5)^2$
   e. $\sum_{k=1}^{n} (k^2+5)$
3. Jika $\sum_{i=1}^{n} x_i = 10$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 25$, dan $\sum_{i=1}^{n} z_i = 20$, di antara berikut ini yang benar adalah ....
   a. $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{y_i} - z_i\right) = \frac{-98}{5}$
   b. $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i - z_i) = 15$
   c. $\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - z_i) = 230$
   d. $\sum_{i=1}^{n} x_iy_iz_i = 5.000$
   e. $\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = -90$
4. Diketahui suku ke-n suatu barisan adalah $U_n = n^2 - 8n$. Jika suku terakhir 20, banyaknya suku barisan itu adalah ....
   a. 7
   b. 10
   c. 12
   d. 15
   e. 17
5. Diketahui suku kedua suatu barisan adalah –3 dan suku kelimanya adalah 3. Jika suku ke-n barisan itu dirumuskan $U_n = an + b$, suku ke-15 adalah ....
   a. 25
   b. 24
   c. 23
   d. 20
   e. 15
6. Diketahui suatu barisan aritmetika dengan beda 3. Jika $U_{10} = 31$ maka U_{21} = ...
   a. 34
   b. 44
   c. 54
   d. 64
   e. 45
7. Jika U_{11} dan U_{41} dari suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 38 dan 128 maka U_{51} = ...
   a. 148
   b. 15
   c. 160
   d. 164
   e. 195
8. Di antara dua suku yang berurutan pada barisan 3, 18, 33, ... disisipkan 4 buah bilangan sehingga membentuk barisan aritmetika yang baru. Jumlah 7 suku pertama barisan aritmetika yang terbentuk adalah ....
   a. 78
   b. 81
   c. 84
   d. 87
   e. 91
9. Sisi-sisi sebuah segitiga siku-siku membentuk barisan aritmetika. Jika sisi terpendeknya 21 cm maka sisi terpanjangnya adalah ....
   a. 28 cm
   b. 30 cm
   c. 35 cm
   d. 36 cm
   e. 38 cm

10. Dari suatu deret aritmetika, diketahui $U_6 + U_9 + U_{12} + U_{15} = 20$. Jumlah 20 suku pertama deret tersebut adalah ....
    a. 50
    b. 80
    c. 100
    d. 230
    e. 200
11. Diketahui suku terakhir dari barisan aritmetika adalah 47, sedangkan jumlah keseluruhan suku-sukunya adalah 285. Jika suku pertama barisan itu –9, banyak suku barisan itu adalah ....
    a. 10 d. 20
    b. 12 e. 23
    c. 15
12. Jika barisan geometri dengan $U_1 = A$ dan $U_{11} = B$ maka $U_6 = ...$
    a. $A\sqrt{AB}$ d. $\dfrac{AB}{2}$
    b. $A\sqrt{\dfrac{A}{B}}$ e. $B\sqrt{\dfrac{A}{B}}$
    c. $A\sqrt{A}$
13. Diketahui $a + 1, a - 2, a + 3$ membentuk barisan geometri. Agar ketiga suku ini membentuk barisan aritmetika, suku ketiga harus ditambah dengan ....
    a. 8 d. –6
    b. 6 e. –8
    c. 5
14. Diketahui *a, b,* dan *c* membentuk deret geometri dengan jumlah 26. Jika suku tengah ditambah 4, akan membentuk deret aritmetika. Jumlah 10 suku pertama dari deret aritmetika yang terbentuk adalah ....
    a. 260
    b. 286
    c. 340
    d. 380
    e. 364
15. Jumlah penduduk suatu wilayah setiap 8 tahun bertambah 100%. Jika pada awal tahun 2006 jumlah penduduk mencapai 4.800.000 orang, pada awal tahun 1974 sudah mencapai ... orang.
    a. 150.000
    b. 200.000
    c. 300.000
    d. 400.000
    e. 600.000
16. Diketahui modal sebesar Rp30.000.000,00 dipinjamkan dengan suku bunga 2% per tahun dengan pembayaran 8 kali anuitas tahunan. Besar anuitas adalah ....
    a. Rp3.641.654,41
    b. Rp4.641.654,41
    c. Rp5.641.654,41
    d. Rp5.564.165,41
    e. Rp6.661.561,41
17. Pada tahun pertama seorang karyawan mendapat gaji Rp300.000,00 per bulan. Jika setiap tahun gaji pokoknya dinaikkan sebesar Rp25.000,00 maka jumlah gaji pokok karyawan itu selama 10 tahun adalah .... *(UAN SMK 2003)*
    a. Rp37.125.000,00
    b. Rp38.700.000,00
    c. Rp39.000.000,00
    d. Rp41.125.000,00
    e. Rp49.500.000,00
18. Suku ke-3 dan ke-5 suatu barisan geometri berturut-turut adalah 8 dan 32. Suku ke-7 barisan itu adalah ....
    a. 64
    b. 120
    c. 128
    d. 240
    e. 256
19. Di suatu daerah pemukiman baru tingkat pertumbuhan penduduk adalah 10% per tahun. Kenaikan jumlah penduduk dalam waktu 4 tahun adalah .... *(UMPTN 1998)*
    a. 40,0%
    b. 42,0%
    c. 43,8%
    d. 46,4%
    e. Rp61,6%

20. Seorang karyawan menabung dengan teratur setiap bulan. Uang yang ditabung setiap bulan selalu lebih besar dari bulan sebelumnya dengan selisih yang sama. Apabila jumlah seluruh tabungannya dalam 12 bulan pertama adalah 192 ribu rupiah dan dalam 20 bulan pertama adalah 48 ribu rupiah maka besar uang yang ditabung pada bulan kesepuluh adalah .... *(UMPTN 1998)*
    a. 47 ribu rupiah
    b. 28 ribu rupiah
    c. 23 ribu rupiah
    d. $\frac{177}{8}$ ribu rupiah
    e. $\frac{23}{2}$ ribu rupiah
21. Dari sebuah deret aritmetika diketahui bahwa jumlah 4 suku pertama, $S_4 = 17$ dan jumlah 8 suku pertama, $S_8 = 58$. Suku pertamanya adalah ....
    a. 1
    b. 2
    c. 3
    d. 4
    e. 5
22. Semua bilangan genap positif dikelompokkan seperti berikut
    (2), (4, 6), (8, 10, 12), (14, 16, 18, 20), ...
    Bilangan yang terdapat di tengah pada kelompok ke-15 adalah ....
    a. 170
    b. 198
    c. 226
    d. 258
    e. 290
23. Jumlah bilangan-bilangan bulat antara 250 dan 1.000 yang habis dibagi 7 adalah ....
    a. 45.692
    b. 54.396
    c. 66.661
    d. 73.775
    e. 80.129
24. Akar-akar dari $x^2 + kx + 8 = 0$ adalah x_1 dan x_2, dengan $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, dan $x_1 < x_2$. Agar x_1, x_2, $3x_1$ berturut-turut suku pertama, suku kedua, dan suku ketiga dari deret aritmetika maka nilai k = ...
    a. 6
    b. 4
    c. 2
    d. –2
    e. –4
25. Seorang pemilik kebun memetik jeruk dan mencatatnya setiap hari. Ternyata banyak jeruk yang dipetik pada hari ke-n memenuhi rumus $U_n = 80 + 20n$. Banyak jeruk yang dipetik selama 18 hari pertama adalah ....
    a. 4.840 buah
    b. 4.850 buah
    c. 4.860 buah
    d. 4.870 buah
    e. 4.880 buah

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan tepat.

1. Tiga buah bilangan membentuk deret aritmetika dengan jumlah 36 dan hasil kalinya 1.536. Tentukan bilangan terbesarnya.
2. Banyaknya suku suatu deret aritmetika adalah 15, suku terakhir adalah 47 dan jumlah deret tersebut sama dengan 285. Tentukan suku pertama deret ini.
3. Persamaan $2x^2 + x + k = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2. Jika x_1, x_2, $\frac{x_1x_2}{2}$ membentuk suatu deret geometri, tentukan suku ke-4 deret geometri tersebut.
4. Tentukan batas nilai suku pertama a dari suatu deret geometri tak berhingga agar deret tersebut konvergen dengan jumlah 2.
5. Modal sebesar Rp3.000.000,00 dibungakan atas dasar bunga majemuk 10% per tahun dengan penggabungan modal dan bunganya setiap triwulan. Modal dibungakan selama 6 tahun.
   Tentukan:
   a. besar suku bunga setiap periode bunga (3 bulan);
   b. banyaknya periode bunga.

Latihan Ujian Nasional

Kerjakan di buku tugas

Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 6x - k = 0$ adalah x_1 dan x_2. Jika $x_1^2 - x_2^2 = 15$, nilai $k =$ ....
   a. 10
   b. 8
   c. 6
   d. 8
   e. –10
2. Agar persamaan kuadrat $x^2 + ax + a = 0$ mempunyai akar-akar yang sama, nilai a yang memenuhi adalah ....
   a. $a = 0$ atau $a = 4$
   b. $0 \le a \le 4$
   c. $a < 0$ atau $a > 4$
   d. $0 < a < 4$
   e. $0 < a < 1$
3. Pertidaksamaan $x^2 - 2x - 8 \le 0$ mempunyai penyelesaian ....
   a. $x \le -2$ atau $x \ge 4$
   b. $x \le 2$ atau $x \ge 4$
   c. $-2 \le x \le 4$
   d. $x \le 4$ atau $x \ge 2$
   e. $-4 \le x \le 2$
4. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $|3x + 2| > 5$ adalah ....
   a. $\{x \mid x < -\frac{1}{3}$ atau $x > 0\}$
   b. $\{x \mid x < -\frac{7}{3}$ atau $x > 1\}$
   c. $\{x \mid x < -1$ atau $x > 1\}$
   d. $\{x \mid x < -\frac{1}{2}$ atau $x > 1\}$
   e. $\{x \mid x < -\frac{1}{4}$ atau $x > 0\}$
5. Jika $a = {}^7\log 2$ dan $b = {}^2\log 3$ maka ${}^6\log 98$ adalah ....
   a. $\dfrac{2+a}{a(b+1)}$
   b. $\dfrac{1+a}{(1+b)a}$
   c. $2a + b$
   d. $\dfrac{1}{a}(1+2b)$
   e. $\dfrac{1}{b}(a+2)$
6. Himpunan penyelesaian dari ${}^2\log (x^2 - 3x + 7) = {}^2\log (3x + 2)$ adalah ....
   a. {5, 2}
   b. {5, 1}
   c. {1, 2}
   d. {1, 1}
   e. {0, 7}
7. Fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ dirumuskan dengan $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ dan $g(x) = 2x + 4$. Nilai $(g \circ f)^{-1}(10)$ adalah ....
   a. 4
   b. 8
   c. 9
   d. 12
   e. 16
8. Jika $f(x) = 2x$ dan $(f \circ g)(x) = \dfrac{-x}{2} + 1$ maka $g(x) =$ ....
   a. $\frac{1}{2}x - 1$
   b. $\frac{1}{2}x + 1$
   c. $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$
   d. $\frac{1}{4}(x-2)$
   e. $-\frac{1}{4}(x+2)$
9. Fungsi f dan g adalah pemetaan dari R ke R. Jika $f(x) = 2x + 1$ dan $(f \circ g)(x) = 4x - 5$ maka nilai $g(-2)$ sama dengan ....
   a. –9
   b. –7
   c. –5
   d. 1
   e. 3
10. Misalkan fungsi f ditentukan dengan rumus $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x-1}$, dengan $x \ne \dfrac{1}{2}$. Fungsi invers dari $f(x)$ adalah $f^{-1}(x)$ ....
    a. $\dfrac{2x-1}{3x+4}$
    b. $\dfrac{x+4}{2x-3}$
    c. $\dfrac{3x-4}{2x+1}$
    d. $\dfrac{2x-3}{x+4}$
    e. $\dfrac{x+4}{2x+3}$

11. Misalkan fungsi $f(x) = \frac{x-1}{2x+2}$, dengan $x \neq -1$.
Fungsi inversnya adalah $f^{-1}(x) = ...$
a. $\frac{1-2x}{1+2x}$
b. $\frac{2x+1}{2x-1}$
c. $\frac{2x-1}{2x+1}$
d. $\frac{1+2x}{1-2x}$
e. $\frac{-2x+1}{2x+1}$

12. Fungsi-fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ masing-masing mempunyai fungsi invers $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ dan $g^{-1}(x) = \frac{2-x}{3}$. Nilai dari $(f \circ g)^{-1}(3)$ sama dengan ....
a. -2 d. 1
b. -1 e. 3
c. 0

13. Persamaan garis yang melalui titik (4, 3) dan sejajar dengan garis $2x + y + 7 = 0$ adalah ....
a. $3x + 2y - 14 = 0$
b. $y - 2x + 12 = 0$
c. $2x + y - 10 = 0$
d. $y + 2x - 11 = 0$
e. $2y - x - 2 = 0$

14. Persamaan garis yang melalui titik $(-2, 1)$ dan tegak lurus dengan garis $\frac{x}{y} = 3$ adalah ....
a. $y = 3(x - 2) + 1$
b. $y = -3(x - 2) + 1$
c. $y = -3(x - 2) - 1$
d. $y = -3(x + 2) + 1$
e. $y = 3(x - 2) - 1$

15. Perhatikan sistem persamaan linear berikut.
$4x + y + 3z = 10$
$6x - 5y - 2z = 2$
$5x + 3y + 7z = 13$
Nilai $x + y + z = ...$
a. 7 d. 2
b. 5 e. 0
c. 3

16. Agar garis $y = mx + 8$ menyinggung persamaan parabola $y = x^2 - 8x + 12$, nilai m adalah ....
a. 4 atau 12 d. –4 atau –12
b. –4 atau 12 e. 6 atau –12
c. 4 atau –12

17. Sebuah kotak berisi 10 buah bola yang terdiri atas 2 bola berwarna putih, 5 bola berwarna merah, dan 3 bola berwarna biru. Pada pengambilan 3 buah bola sekaligus dari kotak tersebut, peluang terambil 2 bola berwarna merah dan 1 bola berwarna biru adalah ....
a. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{8}$
b. $\frac{1}{4}$ e. $\frac{2}{3}$
c. $\frac{1}{6}$

18. Suatu pertemuan dihadiri oleh 7 orang yang duduk di suatu tempat dengan susunan melingkar. Banyaknya susunan cara duduk dari ketujuh orang tersebut adalah ....
a. 5.040 d. 60
b. 720 e. 24
c. 120

19. Suatu data memiliki pola $2n$, dengan n bilangan asli. Jika mean dari $\sum_{n=1}^{10} 2n = A$, nilai mean dari suatu data baru dengan pola $\sum_{n=1}^{10} (2n+1)$ adalah ....

a. A
b. $2A$
c. $A + 1$
d. $2A + 1$
e. $A + 10$

20. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 1} = ...$
a. -6
b. 0
c. -3
d. 3
e. -7

21. Nilai dari $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3x - 20}{x^2 - 7x}$ sama dengan ....
a. 0
b. 1
c. 2
d. 3
e. 6

22. Nilai dari $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^m - b}{cx^n + d}$ sama dengan ....
a. 0 untuk $m = 1$ dan $n = 0$
b. $\dfrac{b}{d}$ untuk setiap m dan n
c. $\dfrac{a}{c}$ untuk setiap m dan n
d. $\dfrac{b}{d}$ jika $m = n$
e. $\dfrac{a}{c}$ jika $m = n$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \{\sqrt{x^2 + x} - x\} = ...$
a. -1
b. 0
c. 1
d. $\sqrt{2}$
e. $\dfrac{1}{2}$

24. Jika $f(x) = 3(2x - 3)^3$ maka $f'(x) = ...$
a. $9(2x - 3)^2$
b. $18(2x - 3)^2$
c. $9(2x - 3)$
d. $3(6x - 3)^2$
e. $18(3x - 3)^2$

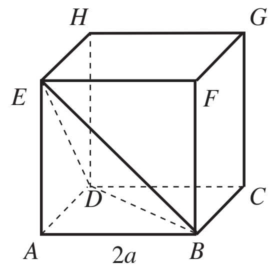
25. Misalkan fungsi $f(x) = (x^4 - 1)(x^2 + 1)$. Turunan dari fungsi $f(x)$ adalah ....
a. $f'(x) = x^6 + x^4 - x^2$
b. $f'(x) = x^6 - x^4 + x^2$
c. $f'(x) = 6x^5 + 4x^3 + 2x$
d. $f'(x) = 6x^5 + 4x^3 - 2x$
e. $f'(x) = 6x^5 - 4x^3 + 2x$

26. Turunan dari fungsi $f(x) = \dfrac{5x - 3}{2x + 1}$, dengan $x \neq -\dfrac{1}{2}$ adalah ....
a. $f'(x) = \dfrac{11}{(2x + 1)^2}$
b. $f'(x) = \dfrac{-11}{(2x + 1)^2}$
c. $f'(x) = \dfrac{3x - 4}{(2x + 1)^2}$
d. $f'(x) = \dfrac{5x - 3}{(2x + 1)^2}$
e. $f'(x) = \dfrac{5}{(2x + 1)^2}$

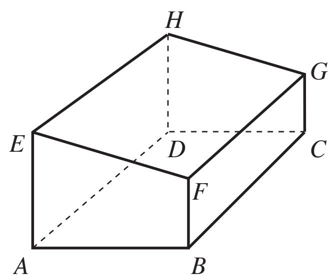
27. Persamaan garis singgung kurva $y = x^3 - x^2 + 6$ di titik dengan absis -2 adalah ....
a. $16x - y + 36 = 0$
b. $16x + y + 36 = 0$
c. $16x - y - 36 = 0$
d. $16x - y + 28 = 0$
e. $16x + y + 28 = 0$

28. Misalkan fungsi $f(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 3$. Grafik fungsi $f(x)$ turun pada interval ....
a. $x < 0$ atau $x > 3$
b. $0 < x < 3$
c. $-3 < x < 0$
d. $x < 0$
e. $x > 3$

29. Nilai minimum fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2$ pada interval tertutup $-1 \leq x \leq 5$ adalah ....
a. $f(-1)$
b. $f(0)$
c. (2)
d. $f(4)$
e. $f(5)$

30. Panjang suatu persegi panjang adalah x dan lebarnya y dengan hubungan $x + 2y = 2a$. Luas persegi panjang itu akan maksimum jika ....
    a. $x = \frac{1}{2}y = a$
    b. $y = 2a$
    c. $x = 2a$
    d. $y = \frac{1}{2}a$
    e. $x = \frac{1}{2}a$
31. Misalkan suatu parabola ditentukan oleh persamaan $y = 4 - x^2$, dengan $y \geq 0$. Titik $P(x, y)$ terletak pada parabola itu. Panjang OP terpendek adalah ....
    a. $\frac{1}{2}\sqrt{11}$
    b. $\frac{1}{2}\sqrt{13}$
    c. $\frac{1}{2}\sqrt{15}$
    d. $\frac{1}{2}\sqrt{17}$
    e. $\frac{1}{2}\sqrt{19}$
32. Bentuk sederhana dari $\dfrac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}$ = ...
    a. $3 + 2\sqrt{3}$
    b. $3 - 2\sqrt{3}$
    c. $2 + 2\sqrt{3}$
    d. $2 - \sqrt{3}$
    e. $2 + \sqrt{3}$
33. Dengan perbandingan proyeksi $\frac{3}{4}$, garis ortogonal sepanjang 8 cm digambar sepanjang ... cm.
    a. 4
    b. 5
    c. 6
    d. 7
    e. 8
34. Pernyataan berikut yang sesuai tentang sudut surut adalah ....
    a. searah jarum jam
    b. berlawanan arah jarum jam
    c. tergantung pada perbandingan proyeksi
    d. tergantung pada panjang garis frontal
    e. tergantung pada panjang garis vertikal
35. 

    Pada gambar kubus di atas, jarak antara titik A dan bidang EBD adalah ....
    a. $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$
    b. $\frac{2}{3}a\sqrt{3}$
    c. $\frac{4}{3}a\sqrt{3}$
    d. $\frac{1}{6}a\sqrt{3}$
    e. $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$
36. Perhatikan gambar berikut.



    Pada gambar prisma segi empat di atas, pasangan-pasangan rusuk berikut yang merupakan pasangan rusuk bersilangan adalah ....
    a. EF dengan AB dan AD dengan BF
    b. AB dengan BF dan BC dengan EA
    c. GH dengan DC dan EF dengan AB
    d. AB dengan DH dan BF dengan DC
    e. FG dengan AD dan EF dengan HG
37. Tiga buah bilangan membentuk deret aritmetika, dengan jumlah 30. Jika suku ke-2 dikurangi 2 membentuk deret geometri, suku ke-5 deret geometri yang terbentuk adalah ....
    a. 54
    b. 58
    c. 64
    d. 66
    e. 69

38. Jumlah seratus bilangan asli ganjil pertama adalah ....
a. 200
b. 1.500
c. 10.000
d. 15.000
e. 15.430

39. Jumlah deret tak berhingga
$$5p - \frac{15}{4}p^2 + \frac{45}{16}p^3 - \frac{135}{64}p^4 + ...$$
sama dengan 4. Nilai p adalah ....
a. 4
b. 2
c. 1
d. $\frac{1}{2}$
e. $\frac{1}{4}$

40. Jumlah deret geometri tak berhingga $6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + ...$ sama dengan ....
a. 18
b. 9
c. $\frac{9}{2}$
d. $\frac{9}{3}$
e. $\frac{9}{4}$

41. Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jumlah ketiga bilangan itu 28 dan hasil kalinya 512. Ketiga bilangan itu adalah ....
a. 5, 9, dan 16
b. 4, 8, dan 16
c. 2, 6, dan 20
d. 3, 8, dan 17
e. 5, 10, dan 18

42. Jumlah 15 suku pertama dari deret 5 + 10 + 15 + ... adalah ....
a. 400
b. 500
c. 600
d. 800
e. 1.000

43. Akar-akar persamaan $x^2 - bx + 15 = 0$ adalah x_1 dan x_2. Jika x_1, x_2, dan 7 membentuk barisan aritmetika, nilai b = ...
a. –8
b. –4
c. 4
d. 5
e. 8

44. Jumlah 10 suku pertama dari deret 3 + 9 + 27 + ... adalah ....
a. 88.573
b. 88.275
c. 85.873
d. 82.857
e. 57.828

45. Negasi dari pernyataan "Setiap siswa SMA berseragam putih abu-abu" adalah ....
a. Setiap siswa SMA tidak berseragam putih abu-abu
b. Tidak ada siswa SMA yang berseragam putih abu-abu
c. Ada beberapa siswa SMA yang tidak berseragam putih abu-abu
d. Ada beberapa siswa SMA yang berseragam putih abu-abu
e. Setiap siswa SMA berseragam bukan putih abu-abu

46. Matriks X yang memenuhi persamaan
$X\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 27 & 11 \end{pmatrix}$ adalah ....
a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

47. Matriks $\begin{pmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$ tidak mempunyai invers jika ....
a. a dan b sembarang
b. $a, b \neq 0$ dan $a = b$
c. $a = 0$ dan b sembarang
d. $a, b, \neq 0$ dan $a = -b$
e. $b = 0$ dan a sembarang

48. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. Nilai dari $(\det A)^2 - 3 \det A$ = ...

a. 110
b. –108
c. 108
d. 180
e. –180

49. Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear

$$\begin{cases}(a-b)x+ay=1\\ ax+(a+b)y=1\end{cases}$$

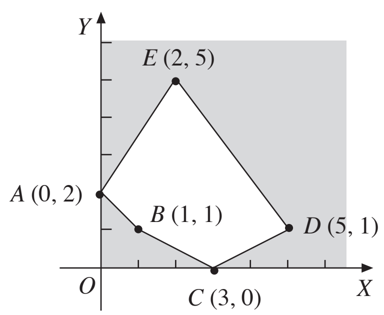
memiliki anggota yang tak berhingga banyaknya jika ....
a. a dan b sembarang
b. $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a = b$
c. $a \neq 0$, $b \neq 0$, dan $a = -b$
d. $a = 0$ dan $b \neq 0$
e. $b = 0$ dan $a \neq 0$

50. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear

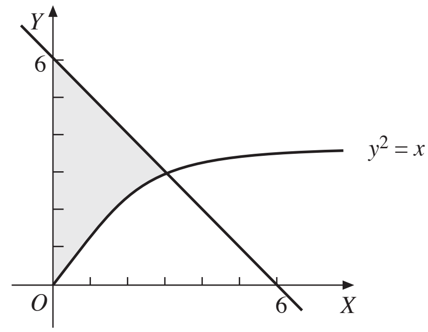
$$\begin{cases}x-y+z=5\\ -2x+y+z=6\\ 3x-2y+2z=11\end{cases}$$

adalah ....
a. {(2, 1, 6)}
b. {(2, 6, 1)}
c. {(1, 6, 2)}
d. {(1, 2, 6)}
e. {(6, 1, 2)}

51. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ melalui titik-titik (1, 2), (2, 4), dan (3, 8). Persamaan parabola itu adalah ....
a. $y = x^2 + x + 2$
b. $y = x^2 + x - 2$
c. $y = x^2 - x + 2$
d. $y = x^2 - x - 2$
e. $y = -x^2 + x + 2$

52.


Daerah yang tidak diarsir adalah daerah himpunan penyelesaian permasalahan program linear. Nilai maksimum fungsi objektif $z = 2x + 5y$ pada gambar di samping adalah ....
a. 6
b. 7
c. 10
d. 15
e. 29

53.


Luas daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah ... satuan luas.
a. $4\frac{2}{3}$
b. 8
c. 10
d. $10\frac{2}{3}$
e. $12\frac{2}{3}$

54. Jika fungsi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ melalui titik $P(1, 5)$ dan turun pada interval $c < x < 1$, nilai $a + b + c = ...$
a. 0
b. –1
c. –2
d. 1
e. 2

55. Setiap awal tahun Budi menyimpan modal sebesar Rp1.000.000,00 pada suatu bank dengan bunga majemuk 15% per tahun. Jumlah modal tersebut setelah akhir tahun kelima adalah ....
a. Rp1.000.000,00 . $(1{,}15)^5$
b. Rp1.000.000,00 . $\dfrac{(1{,}15^5 - 1)}{0{,}15}$
c. Rp1.000.000,00 . $\dfrac{(1{,}15^4 - 1)}{0{,}15}$
d. Rp1.150.000,00 . $\dfrac{(1{,}15^5 - 1)}{0{,}15}$
e. Rp1.150.000,00 . $\dfrac{(1{,}15^4 - 1)}{0{,}15}$

Daftar Pustaka

____. 1997. *Geometri II*. Surakarta: Universitas Sebelas Maret Press.

Anton, Howard dan kolman, Bernard. 1982. *Mathematics with Application for the Management, Life, and social Sciences, 2nd ed*. New York: Academic Press.

Bartle, Robert G. 1994. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Willey and Sons.

Berry, John, etc. 2003. *A-Z Mathematics*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Budhi, Wono Setya. 2003. *Model Buku Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Atas*. Jakarta: Pusat Perbukuan Depdiknas.

Earl, B. 2002. *IGCSE Chemistry*. London: John Murray, Ltd.

Howard, R.D. 1993. *Mathematics in Actions*. London: Nelson Blackie, Ltd.

Isabelle van Welleghem. 2007. *Ensiklopedia Pengetahuan*. Solo: Tiga Serangkai.

Junaedi, Dedi, dkk. 1998. *Intisari Matematika Dasar SMU*. Bandung: Pustaka Setia.

Kerami, Djati dkk. 2002. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Kerami, Djati dkk. 2002. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Koesmartono dkk. 1983. *Matematika Pendahuluan*. Bandung: Penerbit ITB.

Kreyszig, E. 1988. *Advanced Enginering Mathematics*. New York: John Wiley & Son.

Murray, Spiegel. 1972. *Statistics*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Murray, Spiegel. 1981. *Vector Analysis*. Singapore: McGraw-Hill, Inc.

Murray, Spiegel. 2000. *Probability and Statistics*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Negoro, S.T. dkk. 2007. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Neswan, Oki dan Setya Budi, W. 2003. *Matematika 1–3 untuk SMA*. Bandung: Penerbit ITB.

Peperzak O.F.M., Tjokroseputro. 1961. *Aldjabar*. Djakarta: PN Pradnja Paramita.

Pimentall, Ric and Wall, T. 2002. *IGCSE Mathematics*. London: John Murray.

Purcell, Edwin J. 1987. *Calculus with Analitic Geometry*. London: Prentice-Hall International, Inc.

Sembiring, Suwah. 2002. *Olimpiade Matematika untuk SMU*. Bandung: Yrama Widya.

Siswanto. 1997. *Geometri I*. Surakarta: Universitas Sebelas Maret Press.

Steffenson dan Johnson. 1992. *Essential Mathematics for College Students*. New York: Harper Collins Publishers.

Sukirman. 1996. *Geometri Analitik Bidang dan Ruang*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah, UT.

Sullivan, M. 1999. *Precalculus*. Upper Saddle River: Prentice-Hall.

Susianto, Bambang. 2004. *Olimpiade dengan Proses Berpikir*. Jakarta: Grasindo.

Lampiran

TABEL
Bunga Majemuk $(1 + i)^n$

n	$\frac{3}{4}$ %	1%	$1\frac{1}{4}$ %	$1\frac{1}{2}$ %	$1\frac{3}{4}$ %	2%
1	1,0075 0000	1,0100 0000	1,0125 0000	1,0150 0000	1,0175 0000	1,0200 0000
2	1,0150 5625	1,0201 0000	1,0251 5625	1,0302 2500	1,0353 0625	1,0444 0000
3	1,0226 6917	1,0303 1000	1,0379 7070	1,0456 7838	1,0534 2411	1,8612 3116
4	1,0303 3919	1,0406 0401	1,0509 4534	1,0613 6355	1,0718 5903	1,0824 3116
5	1,0380 6673	1,0510 1005	1,0640 8215	1,0772 8400	1,0906 1656	1,1040 0000
6	1,0458 5224	1,0615 2015	1,0773 8318	1,0934 4326	1,1097 0235	1,1261 6242
7	1,0536 9613	1,0721 3535	1,0908 5047	1,1098 4491	1,1291 2215	1,1486 8567
8	1,0615 9885	1,0828 5671	1,1044 8610	1,1264 9259	1,1488 8170	1,1716 3938
9	1,0695 6084	1,0936 8527	1,1182 9218	1,1433 8998	1,1689 8721	1,1950 9257
10	1,0775 8225	1,1046 2213	1,1322 7083	1605 4883	1,1894 4449	1,2189 9441
11	1,0856 6441	1,1156 6835	1,1464 2422	1,1779 4894	1,2102 5977	1,2633 7431
12	1,0938 0690	1,1268 2503	1,1607 5452	1,1956 1817	1,2314 3931	1,2682 4179
13	1,1020 1045	1,1380 9328	1,1752 6395	1,2135 5244	1,2529 8950	1,2936 0663
14	1,1102 7553	1,1494 7421	1,1899 5475	1,2317 5573	1,2749 1682	1,3194 7876
15	1,1186 0259	1,1609 6896	1,2048 2918	1,2502 3207	1,2972 2786	1,3455 6834
16	1,1269 9211	1,1725 7864	1,2198 8955	1,2689 8555	1,3199 2935	1,3727 8571
17	1,1354 4455	1,1843 0443	1,2351 3817	1,2880 2033	1,3430 2811	1,4002 4142
18	1,1439 6039	1,1961 4748	1,2505 7739	1,3073 4064	1,3665 3111	1,4282 4625
19	1,1525 4009	1,2081 0895	1,2662 0961	1,3269 5075	1,3904 4540	1,4568 1117
20	1,1611 8414	1,2201 9004	2820 3723	1,3468 5501	1,4147 7820	1,4859 4740
21	1,1698 9302	1,2323 9194	1,2980 6270	1,3670 5783	1,4395 3681	1,5156 6634
22	1,1786 6722	1,2447 1586	1,3142 8848	1,3875 6370	1,4647 2871	1,5459 7967
23	1,1875 0723	1,2571 6302	1,3307 1709	1,4083 7715	1,4903 6146	1,5768 9926
24	1,1964 1353	1,2697 3465	1,3473 5105	1,4295 0281	1,5164 4279	1,6084 3725
25	1,2053 8663	1,2824 3200	1,3641 9294	1,4509 4535	1,5429 8054	1,6406 0599
26	1,2144 2703	1,2952 5631	1,3812 4535	1,4727 0953	1,5699 8269	1,6734 1811
27	1,2235 3523	1,3082 0888	1,3985 1092	1,4948 0018	1,5974 5739	1,7068 8648
28	1,2327 1175	1,3212 9097	1,4159 9230	1,5172 2218	1,6254 1290	1,7410 2421
29	1,2419 5709	1,3345 0388	1,4336 9221	1,5399 8051	1,6538 5762	1,7758 4469
30	1,2512 7176	1,3478 4892	1,4516 1336	1,5630 8022	1,6828 0013	1,8113 6158
31	1,2606 5630	1,3613 2740	1,4697 5853	1,5865 2642	1,7122 4913	1,8475 8882
32	1,2701 1122	1,3749 4068	1,4881 3051	1,6103 2432	1,7422 1349	1,8845 4059
33	1,2796 3706	1,3886 9009	1,5067 3214	1,6344 7918	1,7727 0223	1,9222 3140
34	1,2892 3434	1,4025 7699	1,5255 6629	1,6589 9637	1,8037 2452	1,9606 7603
35	1,2989 0359	1,4166 0276	1,5446 3587	1,6838 8132	1,8352 8970	1,9998 8953
36	1,3086 4537	1,4307 6878	1,5639 4382	1,7091 3954	1,8674 0727	2,0398 8734
37	1,3184 6021	1,4450 7647	1,5834 9312	1,7347 7663	1,9000 8689	2,0806 8309
38	1,3283 4866	1,4595 2724	1,6032 8678	1,7607 9828	1,9333 3841	2,1222 9879
39	1,3383 1128	1,4741 2251	1,6233 2787	1,7872 1025	1,9671 7184	2,1647 4477
40	1,3483 4861	1,4888 6373	1,6436 1946	1,8140 1841	2, 0015 9734	2,2080 3966
41	1,3584 6123	1,5037 5237	1,6641 6471	1,8412 2868	2,0366 2530	2,2522 0046
42	1,3686 4969	1,5187 8989	1,6849 6677	1,8688 4712	2,0722 6624	2,2972 4447
43	1,3789 1456	1,5339 7779	1,7060 2885	1,8968 7982	2,1085 3090	2,3431 8936
44	1,3892 5642	1,5493 1757	1,7273 5421	1,9253 3302	2,1454 3019	2,3900 5314
45	1,3996 7584	1,5648 1075	1,7489 4614	1,9542 1301	2,1829 7522	2,4378 5421
46	1,4101 7341	1,5804 5885	1,7708 0797	1,9835 2621	2,2211 7728	2,4866 1129
47	1,4207 4971	1,5962 6344	1,7929 4306	2,0132 7910	2,2600 4789	2,5363 4351
48	1,4314 0533	1,6122 2608	1,8153 5485	2,0434 7829	2,2995 9872	2,5870 7039
49	1,4421 4087	1,6283 4834	1,8380 4679	2,0741 3046	2,3398 4170	2,6388 1179
50	1,4529 5693	1,6446 3182	1,8610 2237	2,1052 4242	2,3807 8893	2,6915 8803

TABEL
Bunga Majemuk $(1 + i)^n$

n	$2\frac{1}{2}$ %	3%	$3\frac{1}{2}$ %	4%	$4\frac{1}{2}$ %	5%
1	1,025.	1,03..	1,035.	1,04..	1,045.	1,05.. ....
2	1,0506 2500	1,0609	1,0712 25	1,0816	1,0920 25	1,1025
3	1,0768 9063	1,0927 27	1,1087 1788	1,1284 64	1,1411 6613	1,1576 25
4	1,1038 1289	1,1255 0881	1,1475 2300	1,1698 5856	1,1925 1860	1,2155 0625
5	1,1314 0821	1,1592 7407	1,1876 8631	1,2166 5290	1,2461 8194	1,2762 8156
6	1,1596 9342	1,1940 5230	1,2292 5533	1,2653 1902	1,3022 6012	1,3400 9564
7	1,1886 8575	1,2298 7387	1,2722 7926	1,3159 3178	1,3608 6183	1,4071 0042
8	1,2184 0290	1,2667 7008	1,3168 0904	1,3685 6905	1,4221 0061	1,4774 5544
9	1,2488 6297	1,3047 7318	1,3628 9375	1,4233 1181	1,4860 9514	1,5513 2822
10	1,2800 8454	1,3439 1638	1,4105 9876	1,4802 4428	1,5529 6942	1,6288 9463
11	1,3120 8666	1,3842 3387	1,4599 6972	1,5394 5406	1,6228 5305	1,7103 3926
12	1,3448 8882	1,4257 6089	1,5110 6866	1,6010 3222	1,6958 8143	1,7958 5633
13	1,3785 1104	1,4685 3371	1,5639 5606	1,6650 7351	1,7721 9610	1,8856 4914
14	1,4129 7382	1,5125 8972	1,6186 9452	1,7316 7645	1,8519 4492	1,9799 3166
15	1,4482 9817	1,5579 6742	1,6753 4883	1,8009 4351	1,9352 8224	2,0789 2818
16	1,4845 0562	1,6047 0644	1,7339 9604	1,8729 8125	2,0223 7015	2,1828 7459
17	1,5216 1826	1,6528 4763	1,7946 7555	1,9479 0050	2,1133 7681	2,2920 1832
18	1,5596 5872	1,7024 3306	1,8574 8920	2,0258 1652	2,2084 7877	2,4066 1923
19	1,5986 5019	1,7535 0605	1,9225 0132	2,1068 4918	2,3078 6031	2,5269 5020
20	1,6386 1644	1,8061 1123	1,9897 8886	2,1911 2314	2,4117 1402	2,6532 9771
21	1,6795 8185	1,8602 9457	2,0594 3147	2,2787 6807	2,5202 4116	2,7859 6259
22	1,7215 7140	1,9161 0341	2,1315 1158	2,3699 1879	2,6336 5201	2,9252 6072
23	1,7646 1068	1,9735 8651	2,2061 1145	2,4647 1554	2,7521 6635	3,0715 2376
24	1,8087 7259	2,0327 9411	2,2833 2849	2,5633 0416	2,8760 1383	3,2250 9994
25	1,8539 4410	2,0937 7793	2,3632 4498	2,6658 3633	3,0054 3446	3,3863 5494
26	1,9002 9270	2,1565 9127	2,4459 5856	2,7724 6978	3,1406 7901	3,5556 7269
27	1,9478 0002	2,2212 8901	2,5315 6711	2,8833 6858	3,2820 0956	3,7334 5632
28	1,9964 9502	2,2879 2768	2,6201 1720	2,9987 0332	3,4296 9999	3,9201 2914
29	2,0464 7394	2,3565 6551	2,7118 7798	2,1186 5145	3,5840 3649	4,1161 3560
30	2,0975 6758	2,4272 6247	2,8067 9370	3,2433 9751	3,7453 1813	4,3219 4238
31	2,1500 0068	2,5000 8035	2,9050 3148	3,3731 3341	3,9138 5745	4,5380 3949
32	2,2037 5694	2,5750 8276	3,0067 0759	3,5080 5875	4,0899 8104	4,7649 4147
33	2,2588 5086	2,6523 3524	3,1119 4235	3,6483 8110	4,2740 3018	5,0031 8854
34	2,3153 2213	2,7319 0530	3,2208 6035	3,7943 1634	4,4663 6154	5,2533 4797
35	2,3732 0519	2,8138 6245	3,3355 9045	3,9460 8899	4,6673 4781	5,5160 1537
36	2,4325 3532	2,8982 7833	3,4502 6611	4,1039 3255	4,8773 7846	5,7918 1614
37	2,4933 4870	2,9852 2668	3,5710 2543	4,2680 8986	5,0968 6049	6,0814 0694
38	2,5556 8242	3,0747 8348	3,6960 1131	4,4388 1345	5,3262 1921	6,3854 7729
39	2,6195 7448	3,1670 2698	3,8253 7171	4,6163 6599	5,5658 9908	6,7047 5115
40	2,6850 6384	3,2620 3779	3,9592 5972	4,8010 2063	5,8163 6454	7,0399 8871
41	2,7521 9043	3,3598 9893	4,0978 3381	4,9930 6145	6,0781 0094	7,3919 8815
42	2,8209 9519	3,4606 9489	4,2412 5799	5,1927 8391	6,3516 1584	7,7615 8756
43	2,8915 2007	3,5645 1677	4,3897 0202	5,4004 9527	6,6374 3818	8,1496 6693
44	2,9638 0808	3,6714 5227	4,5433 4160	5,6165 1508	6,9361 2290	8,5571 5028
45	3,0379 0328	3,7815 9584	4,7023 5855	5,8411 7568	7,2482 4843	8,9850 0779
46	3,1138 5086	3,8950 4372	4,8669 4110	6,0748 2271	7,5744 1961	9,4342 5818
47	3,1916 9713	4,0118 9503	5,0372 8404	6,3178 1562	7,9152 6849	9,9059 7109
48	3,2714 8956	4,1322 5188	5,2135 8898	6,5705 2824	8,2714 5557	10,4012 6965
49	3,3532 7680	4,2562 1944	5,3960 6459	6,8333 4937	8,6436 7107	10,9213 3313
50	3,4371 0872	4,3839 0602	5,5849 2686	7,1066 8335	9,0326 3627	11,4673 9979

TABEL
Bunga Majemuk $(1 + i)^n$

n	$5\frac{1}{2}\%$	6%	$6\frac{1}{2}\%$	7%	$7\frac{1}{2}\%$	8%
1	1,0550 0000	1,0600 0000	1,0650 0000	1,0700 0000	1,0750 0000	1,0800 0000
2	1,1130 2500	1,1236 0000	1,1342 2500	1,1449 0000	1,1556 2500	1,1664 0000
3	1,1742 4138	1,1910 1600	1,2079 4963	1,2250 4300	1,2422 9688	1,2597 1200
4	1,2388 2465	1,2624 7696	1,2864 6635	1,3107 9601	1,3354 6914	1,3604 8896
5	1,3069 6001	1,3382 2558	1,3700 8666	1,4026 5473	1,4356 2933	1,4693 2808
6	1,3788 4281	1,4185 1911	1,4591 4230	1,5007 3035	1,5433 0153	1,5868 7432
7	1,4546 7916	1,5036 3026	1,5539 8655	1,6057 8148	1,6590 4914	1,7138 2427
8	1,5346 8651	1,5938 4807	1,6549 9567	1,7181 8618	1,7834 7783	1,8509 3021
9	1,6190 9427	1,6894 7896	1,7625 7039	1,8384 5921	1,9172 3866	1,9990 0463
10	1,7081 4446	1,7908 4770	1,8771 3747	1,9671 5136	2,0610 3156	2,1589 2500
11	1,8020 9240	1,8982 9856	1,9991 5140	2,1048 5195	2,2156 0893	2,3316 3900
12	1,9012 0749	2,0121 9647	2,1290 96 24	2,2521 9159	2,3817 7960	2,5181 7012
13	2,0057 7390	2,1329 2826	2,2674 8750	2,4098 8750	2,5604 1307	2,7196 2373
14	2,1160 9146	2,2609 0396	2,4148 7418	2,5785 3415	2,7524 4405	2,9371 9362
15	2,2324 7649	2,3965 5819	2,5718 4101	2,7590 3154	2,9588 7735	3,1721 6911
16	2,3552 6270	2,5403 5168	2,7390 1067	2,9521 6375	3,1807 9315	3,4259 4264
17	2,4848 0215	2,6927 7279	2,9170 4637	3,1588 1421	3,4193 5264	3,7000 1805
18	2,6214 6627	2,8543 3915	3,1066 5438	3,3799 3228	3,6758 0409	3,9960 1950
19	2,7656 4691	3,0255 9950	3,3085 8691	3,6165 2754	3,9514 8940	4,3157 0106
20	2,9177 5749	3,2071 3547	3,5236 4506	3,8696 8446	4,2478 5110	4,6609 5714
21	3,0782 3415	3,3995 6360	3,7526 8199	4,1405 6237	4,5664 3993	5,0338 3372
22	3,2475 3703	3,6035 3742	3,9966 0632	4,4304 0174	4,9089 2293	5,4365 4041
23	3,4261 5157	3,8197 4966	4,2563 8573	4,7405 2986	5,2770 9215	5,8714 6365
24	3,6145 8990	4,0489 3464	4,5330 5081	5,0723 6695	5,6728 7406	6,3411 8074
25	3,8133 9235	4,2918 7072	4,8276 9911	5,4274 3264	6,0983 3961	6,8484 7520
26	4,0231 2893	4,5493 8296	5,1414 9955	5,8073 5292	6,5557 1508	7,3963 5321
27	4,2444 0102	4,8223 4594	5,4756 9702	6,2138 6763	7,0473 9371	7,9880 6147
28	4,4778 4307	5,1116 8670	5,8316 1733	6,6488 3836	7,5759 4824	8,6271 0639
29	4,7241 2444	5,4183 8790	6,2106 7245	7,1142 5705	8,1441 4436	9,3172 7490
30	4,9839 5129	5,7434 9117	6,6143 6616	7,6122 5504	8,7549 5519	10,0626 5689
31	5,2580 6861	6,0881 0064	7,0442 9996	8,1451 1290	9,4115 7683	10,8676 6944
32	5,5472 6238	6,4533 8668	7,5021 7946	8,7152 7080	10,1174 4509	11,7370 8300
33	5,8523 6181	6,8405 8988	7,9898 2113	9,3253 3975	10,8762 5347	12,6760 4964
34	6,1742 4171	7,2510 2528	8,5091 5950	9,9781 1354	11,6919 7248	13,6901 3361
35	6,5138 2501	7,6860 8679	9,0622 5487	10,6765 8184	12,5688 7042	14,7853 4429
36	6,8720 8538	8,1472 5200	9,6513 0143	11,4239 4219	13,5115 3570	15,9681 7184
37	7,2500 5008	8,6360 8712	10,2786 3603	12,2236 1814	14,5249 0088	17,2456 2558
38	7,6488 0283	9,1542 5235	10,9467 4737	13,0792 7141	15, 6142 6844	18,6252 7563
39	8,0694 8699	9,7035 0749	11,6582 8595	13,9948 2041	16,7853 3858	20,1152 9768
40	8,5133 0877	10,2857 1794	12,4160 7453	14,9744 5784	18,0442 3897	21,7245 2150
41	8,9815 4076	10,9028 6101	13,2231 1938	16,0226 6989	19,3975 5689	23,4624 8322
42	9,4755 2550	11,5570 3267	14,0826 2214	17,1442 5678	20,8523 7366	25,3394 8187
43	9,9966 7940	12,2504 5463	14,9979 9258	18,3443 5475	22,4163 0168	27,3666 4042
44	10,5464 9677	12,9854 8191	15,9728 6209	19,6284 5959	24,0975 2431	29,5559 7166
45	11,1265 5409	13,7646 1083	17,0110 9813	21,0024 5176	25,9048 3863	31,9204 4939
46	11,7385 1456	14,5904 8748	18,1168 1951	22,4726 2338	27,8477 0153	34,4740 8534
47	12,3841 3287	15,4659 1673	19,2944 1278	24,0457 0702	29,9362 7915	37,2320 1217
48	13,0652 6017	16,3938 7173	20,5485 4961	25,7289 0651	32,1815 0008	40,2105 7314
49	13,7838 4948	17,3775 0403	21,8842 0533	27,5299 2997	34,5951 1259	43,4274 1899
50	14,5419 6120	18,4201 5427	23,3066 7868	29,4570 2506	37,1897 4603	46,9016 1251

TABEL
Bunga Majemuk $(1 + i)^{-n}$

n	$\frac{3}{4}$ %	1%	$1\frac{1}{4}$ %	$1\frac{1}{2}$ %	$1\frac{3}{4}$ %	2%
1	0,9925 5583	0,9900 9901	0,9876 5432	0,9852 2167	0,9828 0098	0,9803 9216
2	0,9851 6708	0,9802 9605	0,9754 6106	0,9706 6175	0,9658 9777	0,9611 6878
3	0,9778 3333	0,9705 9015	0,9634 1833	0,9563 1699	0,9492 8528	0,9423 2234
4	0,9705 5417	0,9609 8035	0,9515 2428	0,9421 8423	0,9329 5851	0,9238 4543
5	0,9633 2920	0,9514 6569	0,9397 7706	0,9282 6033	0,9169 1254	0,9057 3081
6	0,9561 5802	0,9420 4524	0,9281 7488	0,9145 4219	0,9011 4254	0,8879 7138
7	0,9490 4022	0,9327 1805	0,9167 1593	0,9010 2679	0,8856 4378	0,8705 6018
8	0,9419 7540	0,9234 8322	0,9053 9845	0,8877 1112	0,8704 1157	0,8534 9037
9	0,9349 6318	0,9143 3982	0,8942 2069	0,8745 9224	0,8554 4135	0,8367 5270
10	0,9280 0315	0,9052 8696	0,8831 8093	0,8616 6723	0,8407 2860	0,8203 4830
11	0,9210 9494	0,8963 2372	0,8722 7746	0,8489 3323	0,8262 6889	0,8042 6304
12	0,9142 3816	0,8874 4923	0,8615 0860	0,8363 8742	0,8120 5788	0,7884 9318
13	0,9074 3241	0,8786 6260	0,8508 7269	0,8240 2720	0,7980 9128	0,7730 3253
14	0,9006 7733	0,8699 6297	0,8403 6809	0,8118 4928	0,7843 6490	0,7578 7503
15	0,8938 7254	0,8613 4948	0,8299 9318	0,7998 5151	0,7708 7459	0,7430 1473
16	0,8873 1766	0,8528 2126	0,8197 4635	0,7880 3104	0,7576 1631	0,7284 4581
17	0,8807 1231	0,8443 7749	0,8096 2602	0,7763 8526	0,7445 8605	0,7141 6256
18	0,8741 5614	0,8360 1731	0,7996 3064	0,7649 1159	0,7317 7990	0,7001 5938
19	0,8676 4878	0,8277 3992	0,7897 5866	0,7536 0748	0,7191 9401	0,6864 3076
20	0,8611 8985	0,8195 4447	0,7800 0855	0,7424 7042	0,7068 2458	0,6729 7133
21	0,8547 7901	0,8114 3017	0,7703 7881	0,7314 9795	0,6946 6789	0,6597 7582
22	0,8484 1589	0,8033 9621	0,7608 6796	0,7206 8764	0,6827 2028	0,6468 3904
23	0,8421 0014	0,7954 4179	0,7514 7453	0,7100 3708	0,6709 7817	0,6341 5592
24	0,8358 8314	0,7875 6613	0,7421 9707	0,6995 4392	0,6594 3800	0,6217 2149
25	0,8296 0933	0,7797 6844	0,7330 3414	0,6892 0583	0,6480 9632	0,6095 3087
26	0,8234 3358	0,7720, 4796	0,7239 8434	0,6790 2052	0,6369 4970	0,5975 7929
27	0,8173 0380	0,7644 0392	0,7150 4626	0,6689 8574	0,6259 9479	0,5858 6204
28	0,8112 1966	0,7568 3557	0,7062 1853	0,6590 9925	0,6152 2829	0,5743 7455
29	0,8051 8080	0,7493 4215	0,6974 9978	0,6493 5887	0,6046 4697	0,5631 1231
30	0,7991 8790	0,7419 2292	0,6888 8867	0, 6397 6243	0,5942 4764	0,5520 7089
31	0,7932 3762	0,7345 7715	0,6803 8387	0,6303 0781	0,5840 2716	0,5412 4597
32	0,7873 3262	0,7273 0411	0,6719 8407	0,6209 9292	0,5739 8247	0,5306 3333
33	0,7814 7159	0,7201 0308	0,6636 8797	0,6118 1568	0,5641 1053	0,5202 2873
34	0,7756 5418	0,7129 7334	0,6554 9430	0,6027 7407	0,5544 0839	0,5100 2817
35	0,7698 8008	0,7059 1420	0,6474 0177	0,5938 6608	0,5448 7311	0,5000 2761
36	0,7641 4896	0,6989 2495	0,6394 0916	0,5850 8974	0,5355 0183	0,4902 2315
37	0,7584 6051	0,6920 0490	0,6315 1522	0,5764 4309	0,5262 9172	0,4806 1093
38	0,7528 1440	0,6851 5337	0,6237 1873	0,5679 2423	0,5172 4002	0,4711 8719
39	0,7472 1032	0,6783 6967	0,6160 1850	0,5595 3126	0,5083 4400	0,4619 4822
40	0,7416 4796	0,6716 5314	0,6084 1334	0,5512 6232	0,4996 0098	0,4528 9042
41	0,7361 2701	0,6650 0311	0,6009 0206	0,5431 1559	0,4910 0834	0,4440 1021
42	0,7306 4716	0,6584 1892	0,5934 8352	0,5350 8925	0,4825 6348	0,4353 0413
43	0,7252 0810	0,6581 9992	0,5861 5656	0,5271 8153	0,4742 6386	0,4267 6875
44	0,7198 0952	0,6454 4547	0,5789 2006	0,5193 9067	0,4661 0699	0,4184 0074
45	0,7144 5114	0,6390 5492	0,5717 7290	0,5117 1494	0,4580 9040	0,4101 9680
46	0,7091 3265	0,6327 2764	0,5647 1397	0,5041 5265	0,4502 1170	0,4021 5373
47	0,7038 5374	0,6264 6301	0,5577 4220	0,4967 0212	0,4424 6850	0,3942 6836
48	0,6986 1414	0,6202 6041	0,5508 5649	0,4893 6170	0,4348 5848	0,3865 3761
49	0,6934 1353	0,6141 1921	0,5440 5579	0,4821 2975	0,4273 7934	0,3789 5844
50	0,6882 5165	0,6080 3883	0,5373 3905	0,4750 0468	0,4200 2883	0,3715 2788

TABEL
Bunga Majemuk $(1 + i)^{-n}$

n	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%
1	0,9756 0976	0,9708 7379	0,9661 8357	0,9615 3846	0,9569 3780	0,9523 8095
2	0,9518 1440	0,9425 9591	0,9335 1070	0,9245 5621	0,9157 2995	0,9070 2948
3	0,9285 9941	0,9151 4166	0,9019 4271	0,8889 9636	0,8762 9660	0,8638 3760
4	0,9059 5064	0,8884 8705	0,8714 4223	0,8548 0419	0,8385 6134	0,8227 0247
5	0,8838 5429	0,8626 0878	0,8419 7317	0,8219 2711	0,8024 5105	0,7835 2617
6	0,8622 9687	0,8374 8426	0,8135 0064	0,7903 1453	0,7678 9574	0,7462 1540
7	0,8412 6524	0,8130 9151	0,7859 9096	0,7599 1781	0,7348 2846	0,7106 8133
8	0,8207 4657	0,7894 0923	0,7594 1156	0,7306 9021	0,7031 8513	0,6768 0892
9	0,8007 2836	0,7664 1673	0,7337 3097	0,7025 8674	0,6729 0443	0,6446 0892
10	0,7811 9840	0,7440 9391	0,7089 1881	0,6755 6417	0,6439 2768	0,6139 1325
11	0,7621 4478	0,7224 2128	0,6849 4571	0,6495 8093	0,6161 9874	0,5846 7929
12	0,7435 5589	0,7013 7988	0,6617 8330	0,6245 9705	0,5896 6386	0,5563 3742
13	0,7254 2038	0,6809 5134	0,6394 0415	0,6005 7409	0,5642 7164	0,5303 2135
14	0,7077 2720	0,6611 1781	0,6177 8179	0,5774 7508	0,5399 7286	0,5050 6795
15	0,6904 6556	0,6418 6195	0,5968 9062	0,5552 6450	0,5167 2044	0,4810 1710
16	0,6736 2493	0,6231 6694	0,5767 0591	0,5339 0818	0,4944 6932	0,4581 1152
17	0,6571 9506	0,6050 1645	0,5572 0378	0,5133 7325	0,4731 7639	0,4362 9669
18	0,6411 6591	0,5873 9461	0,5383 6114	0,4936 2812	0,4528 0037	0,4155 2065
19	0,6255 2772	0,5702 8603	0,5201 5569	0,4746 4242	0,4333 0179	0,3957 3396
20	0,6102 7094	0,5536 7575	0,5025 6588	0,4563 8695	0,4146 4246	0,3768 8948
21	0,5653 8629	0,5375 4928	0,4855 7090	0,4388 3360	0,3967 8743	0,3589 4236
22	0,5808 6467	0,5218 9250	0,4691 5063	0,4219 5539	0,3797 0089	0,3418 4987
23	0,5666 9724	0,5066 9175	0,4532 8563	0,4057 2633	0,3633 5013	0,3255 7131
24	0,5528 7535	0,4919 3374	0,4379 5713	0,3901 2147	0,3477 0347	0,3100 6791
25	0,5393 9059	0,4776 0557	0,4231 4699	0,3751 1680	0,3327 3060	0,2953 0277
26	0,5262 3472	0,4636 9473	0,4088 3767	0,3606 8923	0,3184 0248	0,2812 4073
27	0,5133 9973	0,4501 8906	0,3950 1224	0,3468 1657	0,3046 9137	0,2678 4832
28	0,5008 7778	0,4370 7675	0,3816 5434	0,3334 7747	0,2915 7069	0,2550 9364
29	0,4886 6125	0,4243 4636	0,3687 4815	0,3206 5141	0,2790 1502	0,2429 4632
30	0,4767 4269	0,4119 8676	0,3562 7841	0,3083 1867	0,2670 0002	0,2313 7745
31	0,4651 1481	0,3999 8715	0,3442 3035	0,2964 6026	0,2555 0241	0,2203 5947
32	0,4537 7055	0,3883 3703	0,3325 8971	0,2850 5794	0,2444 9991	0,2098 6617
33	0,4427 0298	0,3770 2625	0,3213 4271	0,2740 9417	0,2339 7121	0,1998 7254
34	0,4319 0534	0,3660 4490	0,3104 7605	0,2635 5209	0,2238 9589	0,1903 5480
35	0,4213 7107	0,3553 8340	0,2999 7686	0,2534 1547	0,2142 5444	0,1812 9029
36	0,4110 9372	0,3450 3243	0,2898 3272	0,2436 6872	0,2050 2817	0,1726 5741
37	0,4010 6705	0,3349 8294	0,2800 3161	0,2342 9685	0,1961 9921	0,1644 3563
38	0,3912 8492	0,3252 2615	0,2705 6194	0,2252 8543	0,1877 5044	0,1566 0536
39	0,3817 4139	0,3157 5355	0,2614 1250	0,2166 2061	0,1796 6549	0,1491 4797
40	0,3724 3062	0,3065 5684	0,2525 7247	0,2082 8904	0,1719 2870	0,1420 4568
41	0,3633 4695	0,2976 2800	0,2440 3137	0,2002 7793	0,1645 2507	0,1352 8160
42	0,3544 8483	0,2889 5922	0,2357 7910	0,1925 7493	0,1574 4026	0,1288 3962
43	0,3458 3886	0,2805 4294	0,2278 0590	0,1851 6820	0,1506 6054	0,1227 0440
44	0,3374 0376	0,2723 7178	0,2201 0231	0,1780 4635	0,1441 7276	0,1168 6133
45	0,3291 7440	0,2644 3862	0,2126 5924	0,1711 9841	0,1379 6437	0,1112 9651
46	0,3211 4576	0,2567 3653	0,2054 6787	0,1646 1386	0,1320 2332	0,1059 9668
47	0,3133 1294	0,2492 5876	0,1985 1968	0,1582 8256	0,1263 3810	0,1009 4921
48	0,3056 7116	0,2419 9880	0,1918 0645	0,1521 9476	0,1208 9771	0,0961 4211
49	0,2982 1576	0,2349 5029	0,1853 2024	0,1463 4112	0,1156 9158	0,0915 6391
50	0,2909 4221	0,2281 0708	0,1790 5337	0,1407 1262	0,1107 0965	0,9872 0373

TABEL
Bunga Majemuk $(1 + i)^{-n}$

n	$5\frac{1}{2}\%$	6%	$6\frac{1}{2}\%$	7%	$7\frac{1}{2}\%$	8%
1	0,9478 6730	0,9433 9623	0,9389 6714	0,9345 7944	0,9302 3256	0,9259 2593
2	0,8984 5242	0,8899 9644	0,8816 5928	0,8734 3873	0,8653 3261	0,8573 3882
3	0,8516 1366	0,8396 1928	0,8278 4909	0,8162 9788	0,8049 6057	0,7938 3224
4	0,8072 1674	0,7920 9366	0,7773 2309	0,7628 9521	0,7488 0053	0,7350 2986
5	0,7651 3435	0,7472 5817	0,7298 8084	0,7129 8618	0,6965 5863	0,6805 8320
6	0,7252 4583	0,7049 6054	0,6853 3412	0,6663 4222	0,6479 6152	0,6301 6963
7	0,6874 3681	0,6650 5711	0,6435 0621	0,6227 4974	0,6027 5490	0,5834 9040
8	0,6515 9887	0,6274 1237	0,6042 3119	0,5820 0910	0,5607 0223	0,5402 6888
9	0,6176 2926	0,5918 9846	0,5673 5323	0,5439 3374	0,5215 8347	0,5002 4897
10	0,5854 3058	0,5583 9478	0,5327 2604	0,5083 4929	0,4851 9393	0,4631 9349
11	0,5549 1050	0,5267 8753	0,5002 1224	0,4750 9280	0,4513 4319	0,4288 8286
12	0,5259 8152	0,4969 6936	0,4696 8285	0,4440 1196	0,4198 5413	0,3971 1376
13	0,4985 6068	0,4688 3902	0,4410 1676	0,4149 6445	0,3905 6198	0,3676 9792
14	0,4725 6937	0,4423 0096	0,4141 0025	0,3878 1724	0,3633 1347	0,3404 6104
15	0,4479 3305	0,4172 6506	0,3888 2652	0,3624 4602	0,3379 6602	0,3152 4170
16	0,4245 8190	0,3936 4628	0,3650 9533	0,3387 3460	0,3143 8699	0,2918 9047
17	0,4024 4653	0,3713 6442	0,3428 1251	0,3165 7439	0,2924 5302	0,2702 6895
18	0,3814 6590	0,3503 4379	0,3218 8969	0,2958 6392	0,2720 4932	0,2502 4903
19	0,3615 7906	0,3305 1301	0,3022 4384	0,2765 0833	0,2530 6913	0,2317 1206
20	0,3427 2896	0,3118 0473	0,2837 9703	0,2584 1900	0,2354 1315	0,2145 4821
21	0,3248 6158	0,2941 5540	0,2664 7608	0,2415 1309	0,2189 8897	0,1986 5575
22	0,3079 2567	0,2775 0510	0,2502 1228	0,2257 1317	0,2037 1067	0,1839 4051
23	0,2918 7267	0,2617 9726	0,2349 4111	0,2109 4688	0,1894 5830	0,1703 1528
24	0,2766 5656	0,2469 7855	0,2206 0198	0,1971 4662	0,1762 7749	0,1576 9934
25	0,2622 3370	0,2329 9863	0,2071 3801	0,1842 4918	0,1639 7906	0,1460 1790
26	0,2485 6275	0,2198 1003	0,1944 9679	0,1721 9549	0,1525 3866	0,1352 0176
27	0,2356 0405	0,2073 6795	0,1826 2515	0,1609 3037	0,1418 9643	0,1251 8682
28	0,2233 2181	0,1956 3014	0,1714 7902	0,1504 0221	0,1319 9668	0,1159 1372
29	0,2116 7944	0,1845 5674	0,1610 1316	0,1405 6282	0,1227 8761	0,1073 2752
30	0,2006 4402	0,1741 1013	0,1511 8607	0,1313 6712	0,1142 2103	0,0993 7733
31	0,1901 8390	0,1642 5484	0,1419 5875	0,1227 7301	0,1062 5212	0,0920 1605
32	0,1802 6910	0,1549 5740	0,1332 9460	0,1147 4113	0,0988 3918	0,0852 0005
33	0,1708 7119	0,1461 8622	0,1251 5925	0,1072 3470	0,0919 4343	0,0788 8893
34	0,1619 6321	0,1379 1153	0,1175 2042	0,1002 1934	0,0855 2877	0,0730 4531
35	0,1535 1936	0,1301 0622	0,1103 4781	0,0936 6294	0,0795 6164	0,0676 3454
36	0,1455 1624	0,1227 4077	0,1036 1297	0,0875 3546	0,0740 1083	0,0626 2458
37	0,1379 3008	0,1157 9318	0,0972 8917	0,0818 0884	0,0688 4729	0,0579 8572
38	0,1307 3941	0,1092 3885	0,0913 5134	0,0764 5686	0,0640 4399	0,0536 9048
39	0,1239 2362	0,1030 5552	0,0857 7590	0,0714 5501	0,0595 7580	0,0497 1314
40	0,1174 6314	0,0972 2219	0,0805 4075	0,0667 8038	0,0554 1935	0,0460 3093
41	0,1113 3947	0,0917 1905	0,0756 2512	0,0624 1157	0,0515 5288	0,0426 2123
42	0,1055 3504	0,0865 2740	0,0710 0950	0,0583 2857	0,0479 5617	0,0394 6411
43	0,1000 3322	0,0816 2962	0,0666 7559	0,0545 1268	0,0446 1039	0,0365 4084
44	0,0948 1822	0,0770 0908	0,0626 0619	0,0509 4643	0,0414 9804	0,0338 3411
45	0,0898 7509	0,0726 5007	0,0587 8515	0,0476 1349	0,0386 0283	0,0313 2788
46	0,0851 8965	0,0685 3781	0,0551 9733	0,0444 9859	0,0359 0961	0,0290 0730
47	0,0807 4849	0,0646 5831	0,0518 2848	0,0415 8747	0,0334 0428	0,0268 5861
48	0,0765 3885	0,0609 9840	0,0486 6524	0,0388 6679	0,0310 7375	0,0248 6908
49	0,0725 4867	0,0675 4566	0,0456 9506	0,0363 2410	0,0289 0582	0,0230 2693
50	0,0687 6652	0,0542 8836	0,0429 0616	0,0339 4776	0,0268 8913	0,0213 2123

$$\textbf{Nilai Anuitas} \quad \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k}}$$

n	$1\frac{1}{2}\%$	2%	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$
1	1,0150 0000	1,0200 0000	1,0250 0000	1,0300 0000	1,0350 0000
2	0,5112 7792	0,5150 4950	0,5188 2716	1,5226 1084	0,5264 0049
3	0,3433 8296	0,3467 5467	0,3501 3717	0,3535 3036	0,3569 3418
4	0,2594 4479	0,2626 2375	0,2658 1788	0,2690 2705	0,2722 5114
5	0,2090 8932	0,2121 5839	0,2152 4686	0,2183 5457	0,2214 8137
6	0,1755 2521	0,1785 2581	0,1815 4997	0,1845 9750	0,1876 6821
7	0,1515 5616	0,1545 1196	0,1574 9543	0,1605 0635	0,1635 4449
8	0,1335 8402	0,1365 0980	0,1394 6735	0,1424 5639	0,1454 7665
9	0,1196 0982	0,1225 1544	0,1254 5689	0,1284 3386	0,1314 4601
10	0,1084 3418	0,1113 2653	0,1142 5876	0,1172 3051	0,1202 4137
11	0,0992 9384	0,1021 7794	0,1051 0596	0,1080 7745	0,1110 9197
12	0,0916 7999	0,0945 5960	0,0974 8713	0,1004 6209	0,1034 8395
13	0,0852 4036	0,0881 1835	0,0910 4827	0,0940 2954	0,0970 6157
14	0,0797 2332	0,0826 0197	0,0855 3652	0,0885 2634	0,0915 7073
15	0,0749 4436	0,0778 2547	0,0807 6646	0,0837 6658	0,0868 2507
16	0,0707 6508	0,0736 5013	0,0765 9899	0,0796 1085	0,0826 8483
17	0,0670 7966	0,0699 6984	0,0729 2777	0,0759 5253	0,0790 4313
18	0,0638 0578	0,0667 0210	0,0696 7008	0,0727 0870	0,0758 1684
19	0,06087847	0,0637 8177	0,0667 6062	0,0698 1388	0,0729 4033
20	0,0582 4574	0,0611 5672	0,0641 4713	0,0672 1571	0,0703 6108
21	0,0558 6550	0,0587 8477	0,0617 8833	0,0648 7178	0,0680 3659
22	0,0537 0332	0,0566 3140	0,0596 4661	0,0627 4739	0,0659 3207
23	0,0517 3075	0,0546 6810	0,0576 9638	0,0608 1390	0,0640 1880
24	0,0499 2410	0,0528 7110	0,0559 1282	0,0590 4742	0,0622 7283
25	0,0482 6345	0,0512 2044	0,0542 7592	0,0574 1787	0,0606 7404
26	0,0467 3196	0,0496 9923	0,0527 6875	0,0559 3829	0,0592 0540
27	0,0453 1527	0,0482 9309	0,0513 7687	0,0545 6421	0,0578 5241
28	0,0440 0108	0,0469 8967	0,0500 8793	0,0532 9323	0,0566 0265
29	0,0427 7878	0,0457 7836	0,0488 9127	0,0521 1467	0,0554 4538
30	0,0416 3919	0,0446 4992	0,0477 7764	0,0510 1926	0,0543 7133
31	0,0405 7430	0,0435 9635	0,0567 3900	0,0499 9893	0,0533 7240
32	0,0395 7710	0,0426 1061	0,0457 6831	0,0490 4662	0,0524 4150
33	0,0386 4144	0,0416 8653	0,0448 5938	0,0481 5612	0,0515 7242
34	0,0337 6189	0,0408 1867	0,0440 0675	0,0478 2196	0,0557 5966
35	0,0369 3363	0,0400 0221	0,0432 0558	0,0465 3929	0,0599 9835
36	0,0361 5240	0,0392 3285	0,0424 5158	0,0458 0379	0,0492 8416
37	0,0354 1437	0,0385 0678	0,0417 4090	0,0451 1162	0,04861325
38	0,0347 1613	0,0378 2057	0,0410 7012	0,0444 5934	0,0479 8214
39	0,0340 5463	0,0371 7114	0,0404 3615	0,0438 4385	0,0473 8775
40	0,0334 2710	0,0365 5575	0,0398 3623	0,0432 6238	0,0468 2728
41	0,0328 3106	0,0359 7188	0,0392 6786	0,0427 1241	0,0462 9822
42	0,0322 6426	0,0354 1729	0,0387 2876	0,0421 9167	0,0457 9828
43	0,0317 2465	0,0348 8993	0,0382 1688	0,0416 9811	0,0453 2539
44	0,0312 1038	0,0343 8794	0,0377 3037	0,0412 2985	0,0448 7768
45	0,0307 1976	0,0339 0962	0,0372 6751	0,0407 8518	0,0444 5343
46	0,0302 5125	0,0334 5342	0,0368 2676	0,0403 6254	0,0440 5108
47	0,0298 0342	0,0330 1792	0,0364 0669	0,0399 6051	0,0436 6919
48	0,0293 7500	0,0326 0184	0,0360 0599	0,0395 7777	0,0433 0646
49	0,0289 6478	0,0322 0396	0,0356 2348	0,0392 1314	0,0429 6167
50	0,0285 7168	0,0318 2321	0,0352 5806	0,0388 6549	0,0426 3371

Nilai Anuitas $\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k}}$

n	4%	$4\frac{1}{2}$%	5%	$5\frac{1}{2}$%	6%
1	1,0400 0000	1,0450 0000	1,0500 0000	1,0550 0000	1,0600 0000
2	0,5301 9608	0,5339 9756	0,5378 0488	0,5416 1800	0,5454 3689
3	0,3603 4854	0,3637 7336	0,3672 0856	0,3706 5407	0,3741 0981
4	0,0754 9005	0,2787 4365	0,2820 11 83	0,2852 9449	0,2885 9149
5	0,2246 2771	0,2277 9164	0,2309 7480	0,2341 7644	0,2373 9640
6	0,1907 6190	0,1938 7839	0,1970 1747	0,2001 7895	0,2033 6263
7	0,1666 0961	0,1697 0147	0,1728 1982	0,1759 6442	0,1791 3502
8	0,1485 2783	0,1516 0965	0,1547 2181	0,1578 6401	0,1610 3594
9	0,1344 9299	0,1375 7447	0,1406 9008	0,1438 3946	0,1470 2224
10	0,1232 9094	0,1263 7882	0,1295 0457	0,1326 6777	0,1358 6796
11	0,1141 4904	0,1172 4818	0,1203 8889	0,1235 7065	0,1267 9294
12	0,1065 5217	0,1096 6619	0,1128 2541	0,1160 2923	0,1192 7703
13	0,1001 4373	0,1032 7535	0,1062 5577	0,1096 8426	0,1129 6011
14	0,0946 6897	0,0978 2032	0,1010 2397	0,1042 7912	0,1075 8491
15	0,0999 4110	0,0931 1381	0,0963 4229	0,0996 2560	0,1029 6276
16	0,0858 2000	0,0890 1537	0,0922 6991	0,0955 8254	0,0998 5214
17	0,0821 9852	0,0854 1758	0,0886 9914	0,0920 4197	0,0954 4480
18	0,0789 9333	0,0822 3690	0,0855 4622	0,0889 1992	0,0923 5654
19	0,0761 3862	0,0794 0734	0,0827 4501	0,0861 5006	0,0896 2086
20	0,0735 8175	0,0768 7614	0,0802 4259	0,0836 7933	0,0871 8456
21	0,0712 8011	0,0746 0057	0,0779 9611	0,0814 6478	0,0850 0455
22	0,0691 9881	0,0725 4565	0,0759 7051	0,0794 7123	0,0830 4557
23	0,0673 0906	0,0706 8249	0,0741 3682	0,0776 6965	0,0812 7848
24	0,0655 8683	0,0689 8703	0,0724 7090	0,0760 3580	0,0796 7900
25	0,0640 1196	0,0674 3903	0,0509 5246	0,0745 4935	0,0782 2672
26	0,0625 6738	0,0660 2137	0,0695 6432	0,0731 9307	0,0769 0435
27	0,0612 3854	0,0647 1946	0,0682 9186	0,0719 5228	0,0756 9717
28	0,0600 1298	0,0635 2081	0,0671 2253	0,0708 1440	0,0745 9255
29	0,0588 7993	0,0624 1461	0,0660 4551	0,0697 6857	0,0735 7961
30	0,0578 3010	0,0613 9154	0,0650 5144	0,0688 0539	0,0726 4891
31	0,0568 5535	0,0604 4345	0,0541 3212	0,0679 1665	0,0717 9222
32	0,0559 4859	0,0595 6320	0,0632 8042	0,0670 9519	0,0710 0234
33	0,0551 0357	0,0587 4453	0,0624 9004	0,0663 3469	0,0720 7293
34	0,0543 1477	0,0579 8191	0,0617 5545	0,0656 2958	0,0695 9843
35	0,0535 7732	0,0572 7045	0,0610 7171	0,0649 7493	0,0698 7386
36	0,0528 8688	0,0566 0578	0,0604 3446	0,0663 6635	0,0683 9483
37	0,0522 3957	0,0559 8402	0,0598 3979	0,0637 9993	0,0678 5743
38	0,0516 3192	0,0554 0169	0,0592 8423	0,0632 7217	0,0673 5812
39	0,0510 6083	0,0548 5567	0,0587 6462	0,0627 7991	0,0668 9377
40	0,0505 2349	0,0543 4315	0,0582 7816	0,0623 2034	0,0664 6154
41	0,0500 1738	0,0538 6158	0,0578 2229	0,0918 9090	0,0660 5886
42	0,0495 4020	0,0534 0868	0,0573 9471	0,0614 8927	0,0656 8342
43	0,0490 8989	0,0529 8235	0,0569 9333	0,0611 1337	0,0653 3312
44	0,0486 6454	0,0525 8071	0,0566 1625	0,0607 6128	0,0650 0606
45	0,0482 6246	0,0522 0202	0,0562 6173	0,0604 3127	0,0647 0050
46	0,0478 8205	0,0518 4471	0,0559 2820	0,0601 2175	0,0644 1485
47	0,0475 2189	0,0515 0734	0,0556 1421	0,0598 3129	0,0641 4768
48	0,0471 8065	0,0511 8858	0,0553 1843	0,0595 5854	0,0638 9765
49	0,0468 5712	0,0508 8722	0,0550 3965	0,0593 0230	0,0636 6356
50	0,0465 5020	0,0506 0215	0,0547 7674	0,0590 6145	0,0634 4429

Glosarium

Barisan aritmetika adalah barisan yang selisih antarsuku-suku yang berurutan selalu tetap, 132

Barisan berhingga adalah barisan yang banyak suku-sukunya berhingga, 131

Barisan bilangan adalah susunan bilangan-bilangan yang diurutkan menurut aturan tertentu, 127

Barisan geometri adalah barisan yang perbandingan antarsuku yang berurutan selalu tetap, 141

Barisan tak berhingga adalah barisan yang banyak suku-sukunya tak berhingga, 131

Beda adalah selisih antara suku-suku yang berurutan, 133

Deret adalah penjumlahan suku-suku suatu barisan, 121

Diferensiabel adalah dapat didiferensiasikan, 19

Elemen matriks adalah bilangan yang terdapat di dalam matriks, 66

Fungsi kendala adalah fungsi yang menjadi prasyaratan atau batasan pada program linear, 40

Fungsi objektif, sasaran, tujuan adalah fungsi yang akan ditentukan nilai minimum atau maksimumnya, 40

Fungsi primitif adalah fungsi antiturunan atau hasil integral, 4

Integral adalah invers dari operasi diferensial, 4

Integral parsial adalah pengintegralan bagian demi bagian, 19

Integral tak tentu adalah pengintegralan yang tidak mengandung batas bawah dan atas, 4

Integral tertentu adalah pengintegralan yang disertai dengan batas bawah dan atas, 11

Integran adalah fungsi yang dicari antiturunannya, 4

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan berbentuk suatu persegi panjang yang disusun menurut aturan basis dan kolom serta ditempatkan pada suatu tanda kurung, 65

Matriks baris adalah matriks yang hanya terdiri atas satu baris, 70

Matriks diagonal adalah matriks persegi dengan setiap elemen yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol, 70

Matriks identitas adalah suatu matriks diagonal dengan elemen diagonal utamanya 1, 85

Matriks kolom adalah matriks yang hanya terdiri atas satu kolom, 70

Matriks nol adalah matriks yang setiap elemennya nol, 70

Model matematika adalah rumusan matematika yang diperoleh dari hasil penafsiran suara program linear ke bahasa matematika, 40

Ordo adalah ukuran suatu matriks, 68

Persamaan keluarga kurva adalah kurva-kurva yang diperoleh dari hasil pengintegralan, dengan nilai kons-tanta belum ditentukan, 9

Program linear adalah suatu metode/program untuk memecahkan masalah optimasi yang mengandung batasan-batasan dalam bentuk sistem pertidaksamaan linear, 35

Rasio adalah perbandingan antarsuku yang berurutan, 142

Sigma adalah jumlah, 12, 121

Sistem pertidaksamaan linear adalah suatu sistem pertidaksamaan yang terdiri atas beberapa pertidaksamaan linear, 35

Suku adalah unsur barisan, 128

Transpose adalah suatu proses menukar elemen-elemen baris menjadi elemen-elemen kolom, 68

Indeks Subjek

Kunci Soal-Soal Terpilih

Bab I Integral

Uji Kompetensi 1

1. a. $\frac{3}{2}x^2 + c$

   b. $3x^3 + c$

3. b. $\frac{2n}{1-n}x^{1-n} + c$

   c. $\frac{2}{3n+2}x^{\frac{3n}{2}+1} + c$

5. $x^3 - x + c$

Uji Kompetensi 3

4. a. $\frac{-21}{2}$

   b. $\frac{7}{6}$

Uji Kompetensi 6

3. a. $7\frac{1}{3}$

   b. 7

   c. 3

   d. 3

5. a. $4\frac{1}{2}$

   d. $4\frac{1}{2}$

Uji Kompetensi 8

3. $\frac{16}{3}\sqrt{2}$

4. $\frac{14}{3}$

Bab II Program Linear

Uji Kompetensi 2

1. $8x + 5y = 18.500$

   $4x + 6y = 11.000$

5. Menentukan nilai maksimum

   $z = 3.000x + 5.000y$

   Kendala: $6x + 3y \leq 54$

   $4x + 6y \leq 48$

   $5x + 5y \leq 50$

   $x \geq 0, y \geq 0, x, y \in C$

Uji Kompetensi 3

1. a. 128; $x = 4$ dan $y = 4$

   b. 54; $x = 2$ dan $y = 2$

   c. 28; $x = 0$ dan $y = 14$ atau $x = 6$ dan $y = 2$

5. Rp370.000,00

Bab III Matriks

Uji Kompetensi 4

5. a. $a = 1$, $b = -1$, dan $c = 15$

   b. $a = 2$, $b = 4$, $c = 4$, dan $d = 2$

   c. $a = 2$, $b = -6$, $c = -4$, dan $d = 8$

   d. $a = 4$, $b = 2$, $c = 8$, dan $d = 1$

Uji Kompetensi 5

3. a. $a = 2$ dan $b = -1$

   b. $a = 3$ dan $b = 4$

Uji Kompetensi 7

3. a. $a = 1$

   b. $a = -3$

   d. $a = \frac{8}{3}$

Uji Kompetensi 8

4. $\begin{cases} p + l = 25 \\ 5p - 3l = 45 \end{cases}$

   p = panjang; l = lebar

5. $\begin{cases} x - 4y = 30 \\ 2x + 3y = 140 \end{cases}$

   x = umur ayah (sekarang) = 59,09 tahun

   y = umur anak (sekarang) = 7,27 tahun

Bab IV Barisan dan Deret

Uji Kompetensi 3

3. a. –6, 0, 10, 24
   b. $n = 80$
5. a. $U_{30} = 206$
   b. $U_{30} = 151$
   c. $U_{30} = 99$

Uji Kompetensi 4

1. $U_{25} = 125$
3. $U_{100} = 300$
5. 4, 6, 8

Uji Kompetensi 6

1. a. $U_{15} = 32.768$
   c. $U_{15} = 16.384$
   e. $U_{15} = -49.152$
2. 5, 10, 20
7. 189 cm
8. $U_{10} = 512$

Matematika Inovatif

Konsep dan Aplikasinya

Dewasa ini, ilmu pengetahuan dan teknologi berkembang sangat cepat. Hal itu merupakan rangkaian panjang yang berpangkal dari perkembangan ilmu-ilmu dasar (*basic sciences*), di antaranya matematika. Oleh karena itu, kita perlu menguasai matematika agar dapat memahami perkembangan dunia yang terjadi di sekitarnya dan tetap *survive* di tengah pesatnya kemajuan teknologi dan peradaban dunia.

Buku Matematika Inovatif Konsep dan Aplikasinya ini disusun dengan penyajian yang menekankan pada penalaran dan daya kreatifitas sehingga mampu melahirkan generasi yang kompeten dalam hal-hal berikut.

1. Memahami dan menguasai konsep, operasi, dan relasi matematis.
2. Lancar dalam berprosedur.
3. Mampu merumuskan, menyajikan, dan menyelesaikan problem matematis.
4. Berpikir kritis, logis, melakukan refleksi, serta memberikan alasan yang kuat.
5. Berkarakter produktif.

Sekilas Info Buku

1. Bahasa yang digunakan komunikatif sehingga mudah dipahami.
2. Penyampaian materi cukup representatif, contoh-contoh dan soal-soal uji kompetensi memiliki gradasi naik.
3. Dilengkapi dengan soal-soal latihan ulangan harian dan semester.
4. Pemilihan jenis dan ukuran huruf cukup cermat didukung dengan tata letak dan ilustrasi yang menarik sehingga tidak membosankan untuk dibaca.

Dengan beberapa kelebihan di atas, diharapkan buku ini mampu merangsang minat dan prestasi siswa dalam mempelajari matematika.

ISBN 978-979-068-864-3 (no. jilid lengkap)
ISBN 978-979-068-868-1

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks palajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 81 Tahun 2008 Tanggal 11 Desember 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

Harga Eceran Tertinggi (HET) Rp10.400,--