Buku Guru

MATEMATIKA

SMA/MA/
SMK/MAK
KELAS

XI

Disklaimer: *Buku ini merupakan buku guru yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku guru ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan "dokumen hidup" yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.*

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Matematika : Buku Guru / Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2014.
xx, 544 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI
ISBN 978-602-282-026-0 (jilid lengkap)
ISBN 978-602-282-028-4 (jilid 2)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Kontributor Naskah : Bornok Sinaga, Pardomuan N.J.M. Sinambela, Andri Kristianto Sitanggang, Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Sudianto Manullang, Mangara Simanjorang, dan Yuza Terzalgi Bayuzetra.
Penelaah : Agung Lukito, Turmudi, dan Dadang Juandi.
Penyelia Penerbitan : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Cetakan Ke-1, 2014
Disusun dengan huruf Times New Roman, 11 pt.

Kata Pengantar

Matematika adalah bahasa universal untuk menyajikan gagasan atau pengetahuan secara formal dan presisi sehingga tidak memungkinkan terjadinya multi tafsir. Penyampaiannya adalah dengan membawa gagasan dan pengetahuan konkret ke bentuk abstrak melalui pendefinisian variabel dan parameter sesuai dengan yang ingin disajikan. Penyajian dalam bentuk abstrak melalui matematika akan mempermudah analisis dan evaluasi selanjutnya.

Permasalahan terkait gagasan dan pengetahuan yang disampaikan secara matematis akan dapat diselesaikan dengan prosedur formal matematika yang langkahnya sangat presisi dan tidak terbantahkan. Karenanya matematika berperan sebagai alat komunikasi formal paling efisien. Perlu kemampuan berpikir kritis-kreatif untuk menggunakan matematika seperti uraian diatas: menentukan variabel dan parameter, mencari keterkaitan antar variabel dan dengan parameter, membuat dan membuktikan rumusan matematika suatu gagasan, membuktikan kesetaraan antar beberapa rumusan matematika, menyelesaikan model abstrak yang terbentuk, dan mengkonkretkan nilai abstrak yang diperoleh.

Buku Guru Matematika Kelas XI untuk Pendidikan Menengah ini disusun dengan tujuan memberi pengalaman konkret-abstrak kepada peserta didik seperti uraian diatas. Pembelajaran matematika melalui buku ini akan membentuk kemampuan peserta didik dalam menyajikan gagasan dan pengetahuan konkret secara abstrak, menyelesaikan permasalahan abstrak yang terkait, dan berlatih berfikir rasional, kritis dan kreatif.

Sebagai bagian dari Kurikulum 2013 yang menekankan pentingnya keseimbangan kompetensi sikap, pengetahuan dan keterampilan, kemampuan matematika yang dituntut dibentuk melalui pembelajaran berkelanjutan: dimulai dengan meningkatkan pengetahuan tentang metode-metode matematika, dilanjutkan dengan keterampilan menyajikan suatu permasalahan secara matematis dan menyelesaikannya, dan bermuara pada pembentukan sikap jujur, kritis, kreatif, teliti, dan taat aturan.

Buku ini menjabarkan usaha minimal yang harus dilakukan peserta didik untuk mencapai kompetensi yang diharapkan. Sesuai dengan pendekatan yang dipergunakan dalam Kurikulum 2013, peserta didik diberanikan untuk mencari dari sumber belajar lain yang tersedia dan terbentang luas di sekitarnya. Peran guru sangat penting untuk meningkatkan dan menyesuaikan daya serap peserta didik dengan ketersedian kegiatan pada buku ini. Guru dapat memperkayanya dengan kreasi dalam bentuk kegiatan-kegiatan lain yang sesuai dan relevan yang bersumber dari lingkungan sosial dan alam.

Implementasi terbatas pada tahun ajaran 2013/2014 telah mendapat tanggapan yang sangat positif dan masukan yang sangat berharga. Pengalaman tersebut dipergunakan semaksimal mungkin dalam menyiapkan buku untuk implementasi menyeluruh pada tahun ajaran 2014/2015 dan seterusnya. Walaupun demikian, sebagai edisi pertama, buku ini sangat terbuka dan terus dilakukan perbaikan untuk penyempurnaan. Oleh karena itu, kami mengundang para pembaca memberikan kritik, saran dan masukan untuk perbaikan dan penyempurnaan pada edisi berikutnya. Atas kontribusi tersebut, kami mengucapkan terima kasih. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan generasi seratus tahun Indonesia Merdeka (2045).

Jakarta, Januari 2014

Menteri Pendidikan dan Kebudayaan

Mohammad Nuh

Surat Buat Guru

Bapak, Ibu guru kami yang terhormat, banyak hal yang sudah kita lakukan sebagai usaha membelajarkan peserta didik dengan harapan, mereka berketuhanan, berperikemanusiaan, berpengetahuan, dan berketerampilan melalui pendidikan matematika. Harapan dan tugas mulia ini cukup berat, menuntut tanggung jawab yang tidak habis-habisnya dari generasi ke generasi.

Banyak masalah pembelajaran matematika yang kita hadapi, bagaikan menelusuri sebuah lingkaran dengan titik-titik masalah yang tak berhingga banyaknya. Tokoh pendidikan matematika Soedjadi dan Yansen Marpaung menyatakan, kita harus berani memilih/menetapkan tindakan dan menghadapi resiko untuk meningkatkan kualitas pendidikan matematika di setiap sekolah tempat guru melaksanakan tugas profesionalitasnya. Artinya, guru sebagai orang yang pertama dan yang utama bertindak sebagai pengembang kurikulum yang mengenal karakteristik siswa dengan baik, dituntut bekerjasama memikirkan jalan keluar permasalahan yang terjadi. Pola pembelajaran yang bagaimana yang sesuai dengan karakteristik matematika dan karakteristik peserta didik di sekolah Bapak/Ibu ?.

Salah satu alternatif, kita akan mengembangkan pembelajaran matematika berbasis paham konstruktivisme. Buah pikiran ini didasari prinsip bahwa: (1) setiap anak lahir di bumi, mereka telah memiliki potensi, (2) cara berpikir, bertindak, dan persepsi setiap orang dipengaruhi budaya, (3) matematika adalah produk budaya, yaitu hasil konstruksi sosial dan sebagai alat penyelesaian masalah kehidupan, dan (4) matematika adalah hasil abstraksi pikiran manusia. Untuk itu diperlukan perangkat pembelajaran, media pembelajaran, asesmen otentik dalam pelaksanaan proses pembelajaran di kelas.

Model pembelajaran yang menganut paham konstruktivistik yang relevan dengan karakteristik matematika dan tujuan pembelajaran matematika cukup banyak, seperti (1) model pembelajaran berbasis masalah, (2) pembelajaran kontekstual, (3) pembelajaran kooperatif dan banyak model pembelajaran lainnya. Bapak/Ibu dapat mempelajarinya secara mendalam melalui aneka sumber pembelajaran.

Pokok bahasan yang dikaji dalam buku petunjuk guru ini, antara lain: (1) program linier, (2) matriks, (3) fungsi komposisi dan fungsi invers, (4) persamaan garis lurus, (5) barisan dan deret tak hingga, (6) trigonometri, (7) statistika, (8) aturan pencacahan, (9) lingkaran, (10) transformasi, (11) turunan, dan (12) integral yang tertera dalam kurikulum 2013. Berbagai konsep, aturan dan sifat-sifat dalam matematika ditemukan melalui penyelesaian masalah nyata, media pembelajaran, yang terkait dengan materi yang diajarkan. Seluruh materi yang diajarkan berkiblat pada pencapaian kompetensi yang ditetapkan dalam kurikulum matematika 2013. Semua petunjuk yang diberikan dalam buku ini hanyalah pokok-pokoknya saja. Oleh karena itu, Bapak dan Ibu guru dapat mengembangkan dan menyesuaikan dengan keadaan dan suasana kelas saat pembelajaran berlangsung.

Akhirnya, tidak ada gading yang tak retak. Rendahnya kualitas pendidikan matematika adalah masalah kita bersama. Kita telah diberi talenta yang beragam, seberapa besar buahnya yang dapat kita persembahkan padaNya. Taburlah rotimu di lautan tanpa batas, percayalah kamu akan mendapat roti sebanyak pasir di tepi pantai. Mari kita lakukan tugas mulia ini sebaik-baiknya, semoga buku petunjuk guru ini dapat digunakan dan bermanfaat dalam pelaksanaan proses pembelajaran matematika di sekolah.

Jakarta, Pebruari 2013

Tim Penulis

DAFTAR ISI

“Pendidikan adalah senjata paling mematikan di dunia,
karena dengan itu Anda dapat mengubah dunia”
– Nelson Mandela

Kami ucapkan :
Selamat belajar & mengajar
Jangan menyerah, suksesmu adalah sukses kita semua

A. PETUNJUK PENGGUNAAN BUKU GURU

Dalam bagian ini diuraikan hal-hal penting yang perlu diikuti guru, saat guru menggunakan buku ini. Hal-hal esensial yang dijabarkan, antara lain: (1) pentingnya guru memahami model pembelajaran berbasis konstruktivis dengan pendekatan scientific learning terkait sintaksis model pembelajaran yang diterapkan, sistem sosial, prinsip reaksi pengelolaan (perilaku guru mengajar di kelas), sistem pendukung pemeblajaran yang harus dipersiapkan (berbagai fasilitas, misalnya buku siswa, lembar aktivitas siswa, media pembelajaran, instrumen penilaian, tugas-tugas yang akan diberikan), serta dampak intruksional dan dampak pengiring (sikap) yang harus dicapai melalui proses pembelajaran; (2) mengorganisir siswa belajar (di dalam dan luar kelas) dalam memberi kesempatan mengamati data, informasi, dan masalah, kerja kelompok dalam memecahkan masalah, memberi bantuan jalan keluar bagi siswa; (3) memilih model, strategi, dan metode pembelajaran untuk tujuan pembelajaran yang efektif; (4) memilih sumber belajar yang melibatkan partisipasi aktif siswa dalam proses pembelajaran yang dipicu melalui pengajuan masalah, pemberian tugas produk, projek; (5) petunjuk penggunaan asesmen otentik untuk mengecek keberhasilan aspek sikap, pengetahuan dan keterampilan; (6) petunjuk pelaksanaan remedial dan pemberian pengayaan.

Isi buku guru ini, memuat petunjuk pembelajaran di setiap bab yang berdampingan dengan aktivitas yang ada di buku siswa. Pertanyaan-pertanyaan kritis dan latihan memiliki kunci jawaban dan arahan pembelajaran dari guru untuk pemecahannya. Di samping proses pembelajaran yang tertuang dalam penjelasan singkat model pembelajaran konstruktivis, tersedi petunjuk pelaksanaan pembelajaran remedial dan pengayaan serta pelaksanaan penilaian berbasis proses.

B. MODEL PEMBELAJARAN BERBASIS KONSTRUKTIVISTIK DENGAN PENDEKATAN SCIENTIFIC LEARNING.

Model pembelejaran yang diterapkan dalam buku ini, dilandasi teori pembelajaran yang menganut paham konstruktivistik, seperti *Project-Based Learning, Problem-Based Learning*, dan *Discovery Learning* dengan pendekatan *scientific learning* melalui proses mengamati, menanya, menalar, mencoba, membangun jejaring dan mengomunikasikan berbagai informasi terkait pemecahan masalah real world, analisis data, dan menarik kesimpulan. Proses pembelajaran memberi perhatian pada aspek-aspek kognisi dan mengangkat berbagai masalah *real world* yang sangat mempengaruhi aktifitas dan perkembangan mental siswa selama proses pembelajaran dengan prinsip bahwa, (1) setiap anak lahir, tumbuh dan berkembang dalam matriks sosial tertentu dan telah memiliki potensi, (2) cara berpikir, bertindak, dan persepsi setiap orang dipengaruhi nilai budayanya, (3) matematika adalah hasil konstruksi sosial dan sebagai alat penyelesaian masalah kehidupan, dan (4) matematika adalah hasil abstraksi pikiran manusia.

Metode pembelajaran yang diterapkan, antara lain: metode penemuan, pemecahan masalah, tanya-jawab, diskusi dalam kelompok heterogen, pemberian tugas produk, unjuk kerja, dan projek. Pembelajaran matematika yang diharapkan dalam praktek pembelajaran di kelas adalah (1) pembelajaran berpusat pada aktivitas siswa, (2) siswa diberi kebebasan berpikir memahami masalah, membangun strategi penyelesaian masalah, mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka, (3) guru melatih dan membimbing siswa berpikir kritis dan kreatif dalam menyelesaikan masalah, (4) upaya guru mengorganisasikan bekerjasama dalam kelompok belajar, melatih siswa berkomunikasi menggunakan grafik, diagram, skema, dan variabel, (5) seluruh hasil kerja selalu dipresentasikan di depan kelas untuk menemukan berbagai konsep, hasil penyelesaian masalah, aturan matematika yang ditemukan melalui proses pembelajaran.

Rancangan model pembelajaran yang diterapkan mengikuti 5 (lima) komponen utama model pembelajaran yang dijabarkan sebagai berikut.

1. Sintaks

Pengelolaan pembelajaran terdiri 5 tahapan pembelajaran, yaitu:

a. Apersepsi

Tahap apersepsi diawali dengan mengimformasikan kepada siswa kompetensi dasar dan indikator yang akan dicapai siswa melalui pembelajaran materi yang akan diajarkan. Kemudian guru menumbuhkan persepsi positif dan motivasi belajar pada diri siswa melalui pemaparan manfaat materi matematika yang dipelajari dalam penyelesaian masalah kehidupan serta meyakinkan siswa, jika siswa terlibat aktif dalam merekonstruksi konsep dan prinsip matematika melalui penyelesaian masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan kehidupan siswa dengan strategi penyelesaian yang menerapkan pola interaksi sosial yang pahami siswa dan guru. Dengan demikian, siswa akan lebih baik menguasai materi yang diajarkan, imformasi baru berupa pengetahuan lebih bertahan lama di dalam ingatan siswa, dan pembelajaran lebih bermakna sebab setiap informasi baru dikaitkan dengan apa yang diketahui siswa dan menunjukkan secara nyata kegunaan konsep dan prinsip matematika yang dipelajari dalam kehidupan.

b. Interaksi Sosial di antara Siswa, Guru, dan Masalah

Pada tahap orientasi masalah dan penyelesaian masalah, guru meminta siswa mencoba memahami masalah dan mendiskusikan hasil pemikiran melalui belajar kelompok. Pembentukan kelompok belajar menerapkan prinsip kooperatif, yakni keheterogenan anggota kelompok dari segi karakteristik (kemampuan dan jenis kelamin) siswa, berbeda budaya, berbeda agama dengan tujuan agar siswa terlatih bekerjasama, berkomunikasi, menumbuhkan rasa toleransi dalam perbedaan, saling memberi ide dalam penyelesaian masalah, saling membantu dan berbagi informasi. Guru memfasilitasi siswa dengan buku siswa, Lembar Aktivitas Siswa (LAS) dan Asesmen Otentik. Selanjutnya guru mengajukan permasalahan matematika yang bersumber dari lingkungan kehidupan siswa. Guru menanamkan nilai-nilai matematis (jujur, konsisten, tangguh menghadapi masalah) dan nilai-nilai budaya agar para siswa saling berinteraksi secara sosio kultural, memotivasi dan mengarahkan jalannya diskusi agar lebih efektif, serta mendorong siswa bekerjasama.

Selanjutnya, guru memusatkan pembelajaran pada siswa dalam kelompok belajar untuk menyelesaikan masalah. Guru meminta siswa memahami masalah secara individu dan mendiskusikan hasil pemikirannya dalam kelompok, dan dilanjutkan berdialog secara interaktif (berdebat, bertanya, mengajukan ide-ide, berdiskusi) dengan kelompok lain dengan arahan guru. Antar anggota kelompok saling bertanya-jawab, berdebat, merenungkan hasil pemikiran teman, mencari ide dan jalan keluar penyelesaian masalah. Setiap kelompok memadu hasil pemikiran dan menuangkannya dalam sebuah LAS yang dirancang guru. Jika semua anggota kelompok mengalami kesulitan memahami dan menyelesaikan masalah, maka salah seorang dari anggota kelompok bertanya pada guru sebagai panutan. Selanjutnya guru memberi *scaffolding*, yaitu berupa pemberian petunjuk, memberi kemudahan pengerjaan siswa, contoh analogi, struktur, bantuan jalan keluar sampai saatnya siswa dapat mengambil alih tugas-tugas penyelesaian masalah.

c. Mempresentasikan dan Mengembangkan Hasil Kerja

Pada tahapan ini, guru meminta salah satu kelompok mempresentasikan hasil kerjanya di depan kelas dan memberi kesempatan pada kelompok lain memberi tanggapan berupa kritikan disertai alasan-alasan, masukan bandingan pemikiran. Sesekali guru mengajukan pertanyaan menguji pemahaman/penguasaan penyaji dan dapat ditanggapi oleh kelompok lain. Kriteria untuk memilih hasil diskusi kelompok yang akan dipresentasikan antara lain: jawaban kelompok berbeda dengan jawaban dari kelompok lain, ada ide penting dalam hasil diskusi kelompok yang perlu mendapat perhatian khusus. Dengan demikian kelompok penyaji bisa lebih dari satu. Selama presentasi hasil kerja, guru mendorong terjadinya diskusi kelas dan mendorong siswa mengajukan ide-ide secara terbuka dengan menanamkan nilai *soft skill*.

Tujuan tahapan ini adalah untuk mengetahui keefektifan hasil diskusi dan hasil kerja kelompok pada tahapan sebelumnya. Dalam penyajiannya, kelompok penyaji akan diuji oleh kelompok lain dan guru tentang penguasaan dan pemahaman mereka atas penyelesaian masalah yang dilakukan. Dengan cara tersebut dimungkinkan tiap-tiap kelompok mendapatkan pemikiran-pemikiran baru dari kelompok lain atau alternatif jawaban yang lain yang berbeda. Sehingga pertimbangan-pertimbangan secara objektif akan muncul di antara siswa. Tujuan lain tahapan ini adalah melatih siswa terampil menyajikan hasil kerjanya melalui penyampaian ide-ide di depan umum (teman satu kelas). Keterampilan mengomunikasikan ide-ide tersebut adalah salah satu kompetensi yang dituntut dalam pembelajaran berdasarkan masalah, untuk memampukan siswa berinteraksi/berkolaborasi dengan orang lain.

d. Temuan Objek Matematika dan Penguatan Skemata Baru

Objek-objek matematika berupa model (contoh konsep) yang diperoleh dari proses dan hasil penyelesaian masalah dijadikan bahan inspirasi dan abstraksi konsep melalui penemuan ciri-ciri konsep oleh siswa dan mengkonstruksi konsep secara ilmiah. Setelah konsep ditemukan, guru melakukan teorema pengontrasan melalui pengajuan contoh dan bukan contoh. Dengan mengajukan sebuah objek, guru meminta siswa memberi alasan, apakah objek itu termasuk contoh atau bukan contoh konsep.

Guru memberi kesempatan bertanya atas hal-hal yang kurang dipahami. Sesekali guru menguji pemahaman siswa atas konsep dan prinsip yang ditemukan, serta melengkapi hasil pemikiran siswa dengan memberikan contoh dan bukan contoh konsep. Berdasar konsep yang ditemukan/direkonstruksi, diturunkan beberapa sifat dan aturan-aturan. Selanjutnya siswa diberi kesempatan mengerjakan soal-soal tantangan untuk menunjukkan kebergunaan konsep dan prinsip matematika yang dimiliki.

e. Menganalisis dan Mengevaluasi Proses dan Hasil Penyelesaian Masalah

Pada tahapan ini, guru membantu siswa atau kelompok mengkaji ulang hasil penyelesaian masalah, menguji pemahaman siswa dalam proses penemuan konsep dan prinsip. Selanjutnya, guru melakukan evaluasi materi akademik dengan pemberian kuis atau meminta siswa membuat peta konsep atau memberi tugas dirumah atau membuat peta materi yang dipelajari.

2. Sistem Sosial

Pengorganisasian siswa selama proses pembelajaran menerapkan pola pembelajaran kooperatif. Dalam interaksi sosio kultural di antara siswa dan temannya, guru selalu menanamkan nilai-nilai *soft skill* dan nilai matematis. Siswa dalam kelompok saling bekerjasama dalam menyelesaikan masalah, saling bertanya/ berdiskusi antara siswa yang lemah dan yang pintar, kebebasan mengajukan pendapat, berdialog dan berdebat, guru tidak boleh terlalu mendominasi siswa, bersifat membantu dan gotong royong) untuk menghasilkan penyelesaian masalah yang disepakati bersama. Dalam interaksi sosio kultural, para siswa diizinkan berbahasa daerah dalam menyampaikan pertanyaan, kritikan, pendapat terhadap temannya maupun pada guru.

3. Prinsip Reaksi

Model pembelajaran yang diterapkan dalam buku ini dilkamusi teori konstruktivis dan nilai budaya dimana siswa belajar yang memberi penekanan pembelajaran berpusat pada siswa, sehingga fungsi guru sebagai fasilitator, motivator dan mediator dalam pembelajaran. Tingkah laku guru dalam menanggapi hasil pemikiran siswa berupa pertanyaan atau kesulitan yang dialami dalam menyelesaikan masalah harus bersifat mengarahkan, membimbing, memotivasi dan membangkitkan semangat belajar siswa.

Untuk mewujudkan tingkah laku tersebut, guru harus memberikan kesempatan pada siswa untuk mengungkapkan hasil pemikirannya secara bebas dan terbuka, mencermati pemahaman siswa atas objek matematika yang diperoleh dari proses dan hasil penyelesaian masalah, menunjukkan kelemahan atas pemahaman siswa dan memancing mereka menemukan jalan keluar untuk mendapatkan penyelesaian masalah yang sesungguhnya. Jika ada siswa yang bertanya, sebelum guru memberikan penjelasan/bantuan, guru terlebih dahulu memberi kesempatan pada siswa lainnya memberikan tanggapan dan merangkum hasilnya. Jika keseluruhan siswa mengalami kesulitan, maka guru saatnya memberi penjelasan atau bantuan/memberi petunjuk sampai siswa dapat mengambil alih penyelesaian masalah pada langkah berikutnya. Ketika siswa bekerja menyelesaikan tugas-tugas, guru mengontrol jalannya diskusi dan memberikan motivasi agar siswa tetap berusaha menyelesaikan tugas-tugasnya.

4. Sistem Pendukung

Agar model pembelajaran ini dapat terlaksana secara praktis dan efektif, guru diwajibkan membuat suatu rancangan pembelajaran yang dilkamusi teori pembelajaran konstruktivis dan nilai *soft skill* matematis yang diwujudkan dalam setiap langkah-langkah pembelajaran yang ditetapkan dan menyediakan fasilitas belajar yang cukup. Dalam hal ini dikembangkan buku model yang berisikan teori-teori pendukung dalam melaksanakan pembelajaran, komponen-komponen model, petunjuk pelaksanaan dan seluruh perangkat pembelajaran yang digunakan seperti rencana pembelajaran, buku guru, buku siswa, lembar kerja siswa, objek-objek abstraksi dari lingkungan budaya, dan media pembelajaran yang diperlukan.

5. Dampak Instruksional dan Pengiring yang Diharapkan

Dampak langsung penerapan pembelajaran ini adalah memampukan siswa merekonstruksi konsep dan prinsip matematika melalui penyelesaian masalah dan terbiasa menyelesaikan masalah nyata di lingkungan siswa. Pemahaman siswa terhadap obek-objek matematika dibangun berdasarkan pengalaman budaya dan pengalaman belajar yang telah dimiliki sebelumnya. Kebermaknaan pembelajaran yang melahirkan pemahaman, dan pemahaman mendasari kemampuan siswa mentransfer pengetahuannya dalam menyelesaikan masalah, berpikir kritis dan kreatif. Kemampuan menyelesaikan masalah tidak rutin menyadarkan siswa akan kebergunaan matematika. Kebergunaan akan menimbulkan motivasi belajar secara internal dari dalam diri siswa dan rasa memiliki terhadap matematika akan muncul sebab matematika yang dipamami adalah hasil rekonstruksi pemikirannya sendiri. Motivasi belajar secara internal akan menimbulkan kecintaan terhadap dewi matematika. Bercinta dengan dewi matematika berarti penyatuan diri dengan keabstrakan yang tidak memiliki batas atas dan batas bawah tetapi bekerja dengan simbol-simbol.

Selain dampak di atas, siswa terbiasa menganalisis secara logis dan kritis memberikan pendapat atas apa saja yang dipelajari menggunakan pengalaman belajar yang dimiliki sebelumnya. Penerimaan individu atas perbedaan-perbedaan yang terjadi (perbedaan pola pikir, pemahaman, daya lihat dan kemampuan), serta berkembangnya kemampuan berkolaborasi antara siswa. Retensi pengetahuan matematika yang dimiliki siswa dapat bertahan lebih lama sebab siswa terlibat aktif di dalam proses penemuannya.

Dampak pengiring yang akan terjadi dengan penerapan model pembelajaran berbasis konstruktivistik adalah siswa mampu menemukan kembali berbagai konsep dan aturan matematika dan menyadari betapa tingginya manfaat matematika bagi kehidupan sehingga dia tidak merasa terasing dari lingkungannya. Matematika sebagai ilmu pengetahuan tidak lagi dipandang sebagai hasil pemikiran dunia luar tetapi berada pada lingkungan budaya siswa yang bermanfaat dalam menyelesaikan permasalahan di lingkungan budayanya. Dengan demikian terbentuk dengan sendirinya rasa memiliki, sikap, dan persepsi positif siswa terhadap matematika dan budayanya. Siswa memkamung bahwa matematika terkait dan inklusif di dalam budaya. Jika matematika bagian dari budaya siswa, maka suatu saat diharapkan siswa memiliki cara tersendiri memeliharanya dan menjadikannya **Landasan Makna** (Landasan makna dalam hal ini berpihak pada sikap, kepercayaan diri, cara berpikir, cara bertingkah laku, cara mengingat apa yang dipahami oleh siswa sebagai pelaku-pelaku budaya). Dampak pengiring yang lebih jauh adalah hakikat tentatif keilmuan, keterampilan proses keilmuan, otonomi dan kebebasan berpikir siswa, toleransi terhadap ketidakpastian dan masalah-masalah non rutin.

PEDOMAN PENYUSUNAN RENCANA PEMBELAJARAN

Penyusunan rencana pembelajaran berpedoman pada kurikulum matematika 2013 dan sintaksis Model Pembelajaran. Berdasarkan analisis kurikulum matematika ditetapkan hal-hal berikut

1. Kompetensi dasar (lihat Permendikbud Nomor 69 dan 70 Tahun 2013) dan indikator pencapaian kompetensi dasar untuk tiap-tiap pokok bahasan. Rumusan indikator dan kompetensi dasar harus disesuaikan dengan prinsip-prinsip pembelajaran matematika berdasarkan masalah, memberikan pengalaman belajar bagi siswa, seperti menyelesaikan masalah otentik (masalah bersumber dari fakta dan lingkungan budaya), berkolaborasi, berbagi pengetahuan, saling membantu, berdiskusi dalam menyelesaikan masalah.
2. Materi pokok yang akan diajarkan, termasuk analisis topik, dan peta konsep (contoh disajikan di bawah).
3. Materi prasyarat, yaitu materi yang harus dikuasai oleh siswa sebagai dasar untuk mempelajari materi pokok. Dalam hal ini perlu dilakukan tes kemampuan awal siswa.
4. Kelengkapan, yaitu fasilitas pembelajaran yang harus dipersiapkan oleh guru, misalnya: rencana pembelajaran, buku petunjuk guru, buku siswa, lembar aktivitas siswa (LAS), objek-objek budaya, kumpulan masalah-masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budaya siswa, laboratorium, dan alat peraga jika dibutuhkan.
5. Alokasi waktu: banyak jam pertemuan untuk setiap pokok bahasan tidak harus sama tergantung kepadatan dan kesulitan materi untuk tiap-tiap pokok bahasan. Penentuan rata-rata banyak jam pelajaran untuk satu pokok bahasan adalah hasil bagi jumlah jam efektif untuk satu semester dibagi banyak pokok bahasan yang akan diajarkan untuk semester tersebut.
6. Hasil belajar yang akan dicapai melalui kegiatan pembelajaran antara alain:

Produk	:	Konsep dan prinsip-prinsip yang terkait dengan materi pokok
Proses	:	Apersepsi budaya, interaksi sosial dalam penyelesaian masalah, memodelkan masalah secara matematika, merencanakan penyelesaian masalah, menyajikan hasil kerja dan menganalisis serta mengevaluasi kembali hasil penyelesaian masalah.
Kognitif	:	Kemampuan matematisasi, kemampuan abstraksi, pola pikir deduktif, berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis dan berpikir kreatif).

Keterampilan : Keterampilan menyelesaikan masalah, ketrampilan berkolaborasi, kemampuan berkomunikasi.

Afektif : Menghargai budaya, penerimaan individu atas perbedaan yang ada, bekerjasama, tangguh menghadapi masalah, jujur mengungkapkan pendapat, berlatih berpikir kritis, kreatif, dan senang belajar matematika.

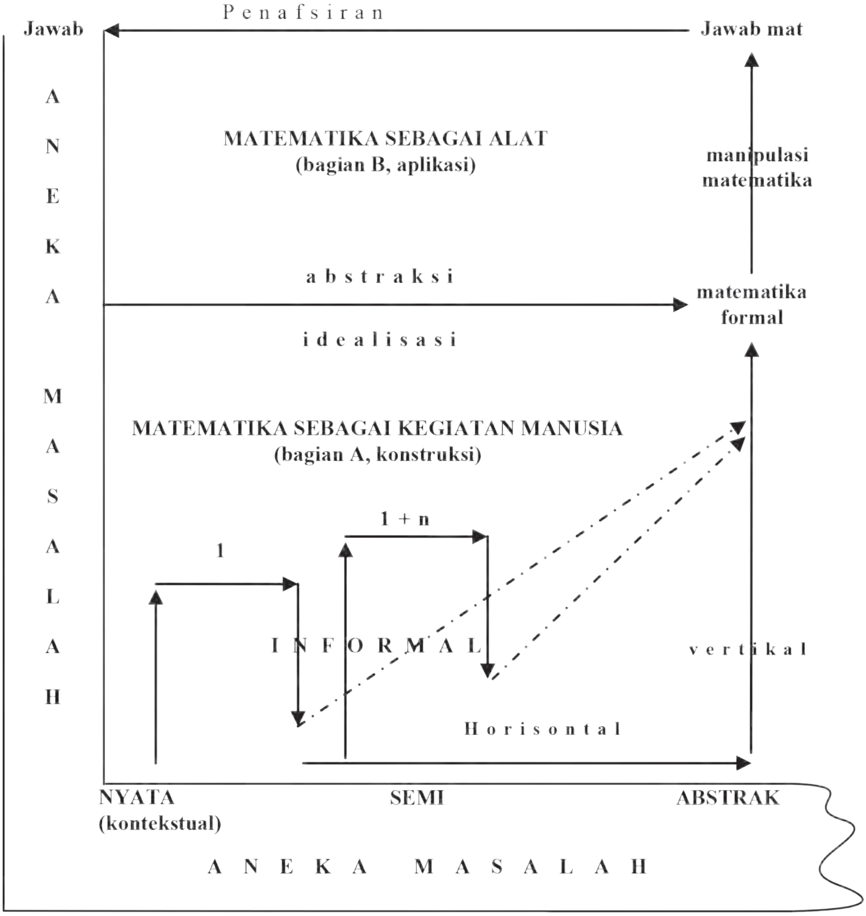
Sintaksis pembelajaran adalah langkah-langkah pembelajaran yang dirancang dan dihasilkan dari kajian teori yang melandasi model pembelajaran berbasis konstruktivistik. Sementara, rencana pembelajaran adalah operasional dari sintaks. Sehingga skenario pembelajaran yang terdapat pada rencana pembelajaran disusun mengikuti setiap langkah-langkah pembelajaran (sintaks). Sintaks model pembelajaran terdiri dari 5 langkah pokok, yaitu: (1) apersepsi budaya, (2) orientasi dan penyelesaian masalah, (3) persentase dan mengembangkan hasil kerja, (4) temuan objek matematika dan penguatan skemata baru, (5) menganalisis dan mengevaluasi proses dan hasil penyelesaian masalah. Kegiatan yang dilakukan untuk setiap tahapan pembelajaran dijabarkan sebagai berikut:

1. Kegiatan guru pada tahap apersepsi budaya antara lain:
   a. Menginformasikan indikator pencapaian kompetensi dasar.
   b. Menciptakan persepsi positif dalam diri siswa terhadap budayanya dan matematika sebagai hasil konstruksi sosial.
   c. Menjelaskan pola interaksi sosial, menjelaskan peranan siswa dalam menyelesaikan masalah.
   d. Memberikan motivasi belajar pada siswa melalui penanaman nilai matematis, soft skill dan kebergunaan matematika.
   e. Memberi kesempatan pada siswa menanyakan hala-hal yang sulit dimengerti pada materi sebelumnya.
2. Kegiatan guru pada tahap penyelesaian masalah dengan pola interaksi edukatif antara lain:
   a. Membentukan kelompok
   b. Mengajukan masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budaya siswa
   c. Meminta siswa memahami masalah secara individual dan kelompok
   d. Mendorong siswa bekerjasama menyelesaikan tugas-tugas
   e. Membantu siswa merumuskan hipotesis (dugaan).
   f. Membimbing, mendorong/mengarahkan siswa menyelesaikan masalah dan mengerjakan LKS
   g. Memberikan scaffolding pada kelompok atau individu yang mengalami kesulitan

h. Mengkondisikan antar anggota kelompok berdiskusi, berdebat dengan pola kooperatif
i. Mendorong siswa mengekspresikan ide-ide secara terbuka
j. Membantu dan memberi kemudahan pengerjaan siswa dalam menyelesaikan masalah dalam pemberian solusi

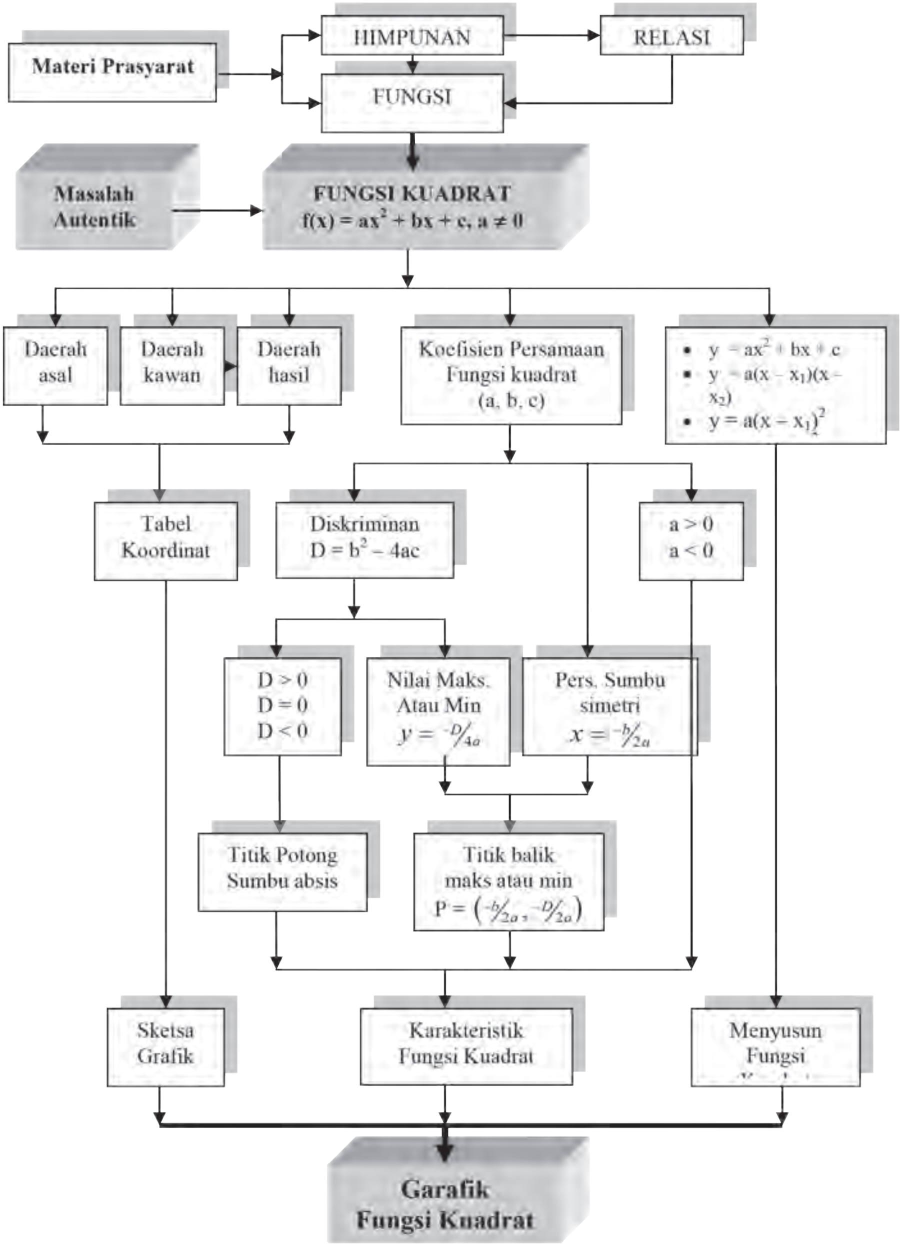
3. Kegiatan guru pada tahap persentasi dan mengembangkan hasil kerja antara lain:
   a. Memberi kesempatan pada kelompok mempresentasikan hasil penyelesaian masalah di depan kelas
   b. Membimbing siswa menyajikan hasil kerja
   c. Memberi kesempatan kelompok lain mengkritisi/menanggapi hasil kerja kelompok penyaji dan memberi masukan sebagai alternatif pemikiran Membantu siswa menemukan konsep berdasarkan masalah
   d. Mengontrol jalannya diskusi agar pembelajaran berjalan dengan efektif
   e. Mendorong keterbukaan, proses-proses demokrasi
   f. Menguji pemahaman siswa
4. Kegiatan guru pada tahap temuan objek matematika dan penguatan skemata baru antara lain:
   a. Mengarahkan siswa membangun konsep dan prinsip secara ilmiah
   b. Menguji pemahaman siswa atas konsep yang ditemukan melalui pengajuan contoh dan bukan contoh konsep
   c. Membantu siswa mendefinisikan dan mengorganisasikan tugas-tugas belajar yang berkaitan dengan masalah
   d. Memberi kesempatan melakukan konektivitas konsep dan prinsip dalam mengerjakan soal tantangan
   e. Memberikan scaffolding
5. Kegiatan guru pada tahap menganalisis dan mengevaluasi proses dan hasil penyelesaian masalah antara lain:
   a. Membantu siswa mengkaji ulang hasil penyelesaian masalah
   b. Memotivasi siswa untuk terlibat dalam penyelesaian masalah yang selektif
   c. Mengevaluasi materi akademik: memberi kuis atau membuat peta konsep atau peta materi.

FASE KONSTRUKSI MATEMATIKA



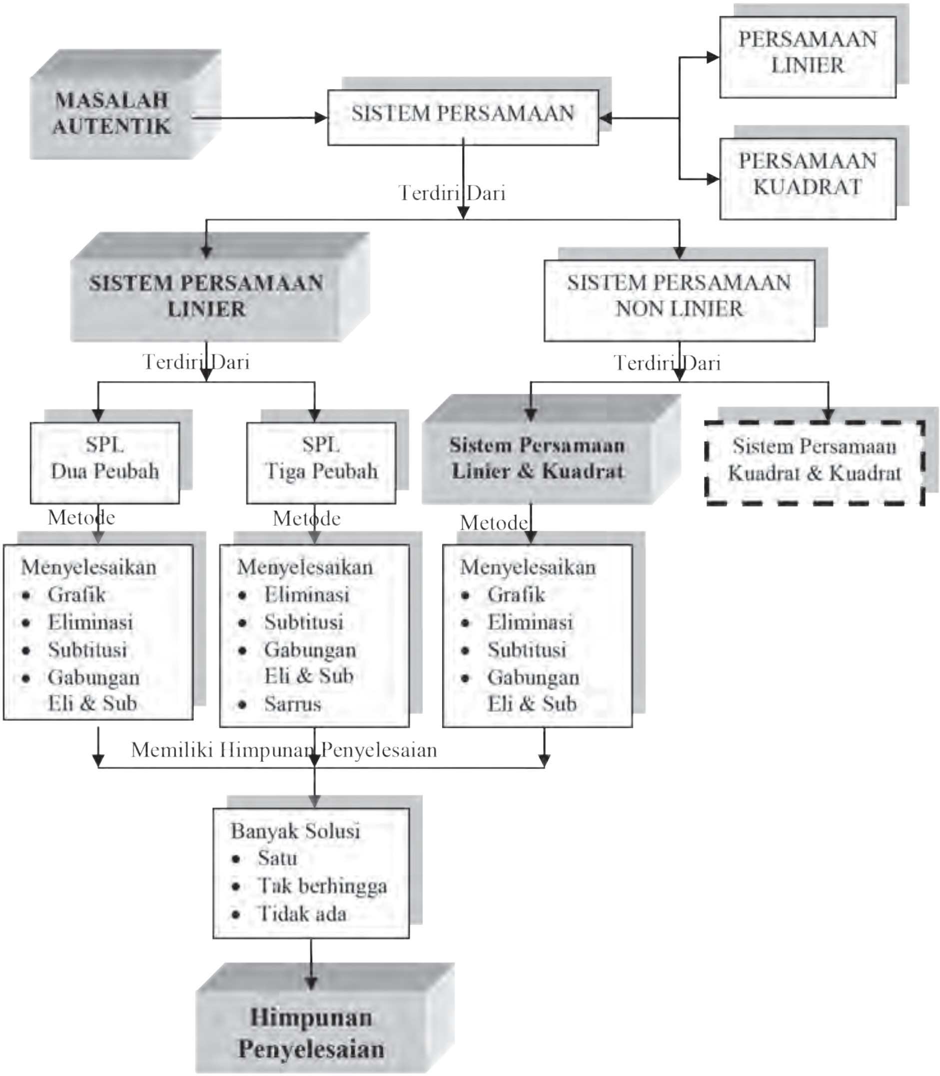
Gambar: Matematika Hasil Konstruksi Sosial (Adaptasi, Soedjadi (2004)

CONTOH ANALISIS TOPIK

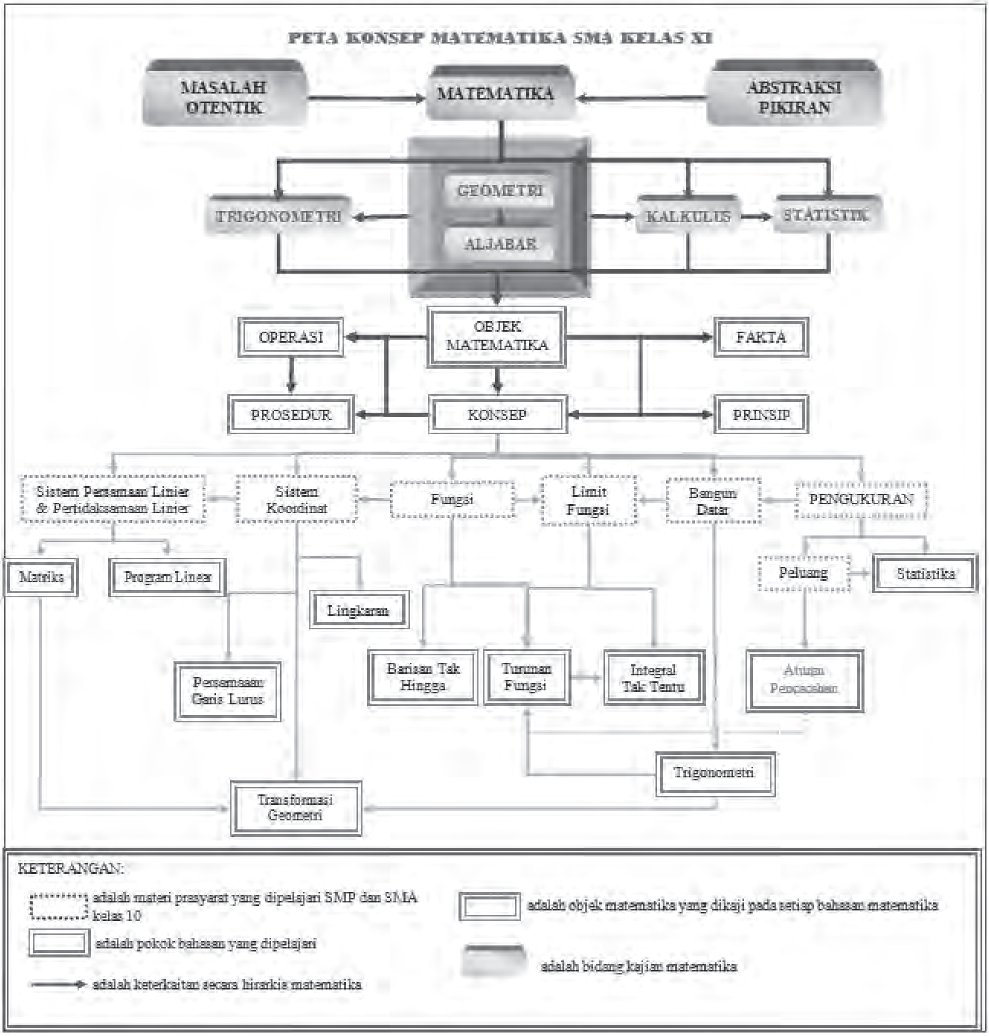


Gambar: Analisis Topik Pada Materi Fungsi Kuadrat

CONTOH PETA KONSEP



Gambar: Peta Konsep Pada Materi Sistem Persamaan Linier dan Kuadrat


PETA KONSEP MATEMATIKA SMA KELAS XI
MASALAH OTENTIK
MATEMATIKA
ABSTRAKSI PIKIRAN
GEOMETRI
ALJABAR
TRIGONOMETRI
KALKULUS
STATISTIK
OPERASI
OBJEK MATEMATIKA
FAKTA
PROSEDUR
KONSEP
PRINSIP
Sistem Persamaan Linier & Pertidaksamaan Linier
Sistem Koordinat
Fungsi
Limit Fungsi
Bangun Datar
PENGUKURAN
Matriks
Program Linear
Lingkaran
Peluang
Statistika
Persamaan Garis Lurus
Barisan Tak Hingga
Turunan Fungsi
Integral Tak Tentu
Aturan Pencacahan
Trigonometri
Transformasi Geometri
KETERANGAN:
adalah materi prasyarat yang dipelajari SMP dan SMA kelas 10
adalah pokok bahasan yang dipelajari
adalah keterkaitan secara hirarkis matematika
adalah objek matematika yang dikaji pada setiap bahasan matematika
adalah bidang kajian matematika

Bab 1

PROGRAM LINEAR

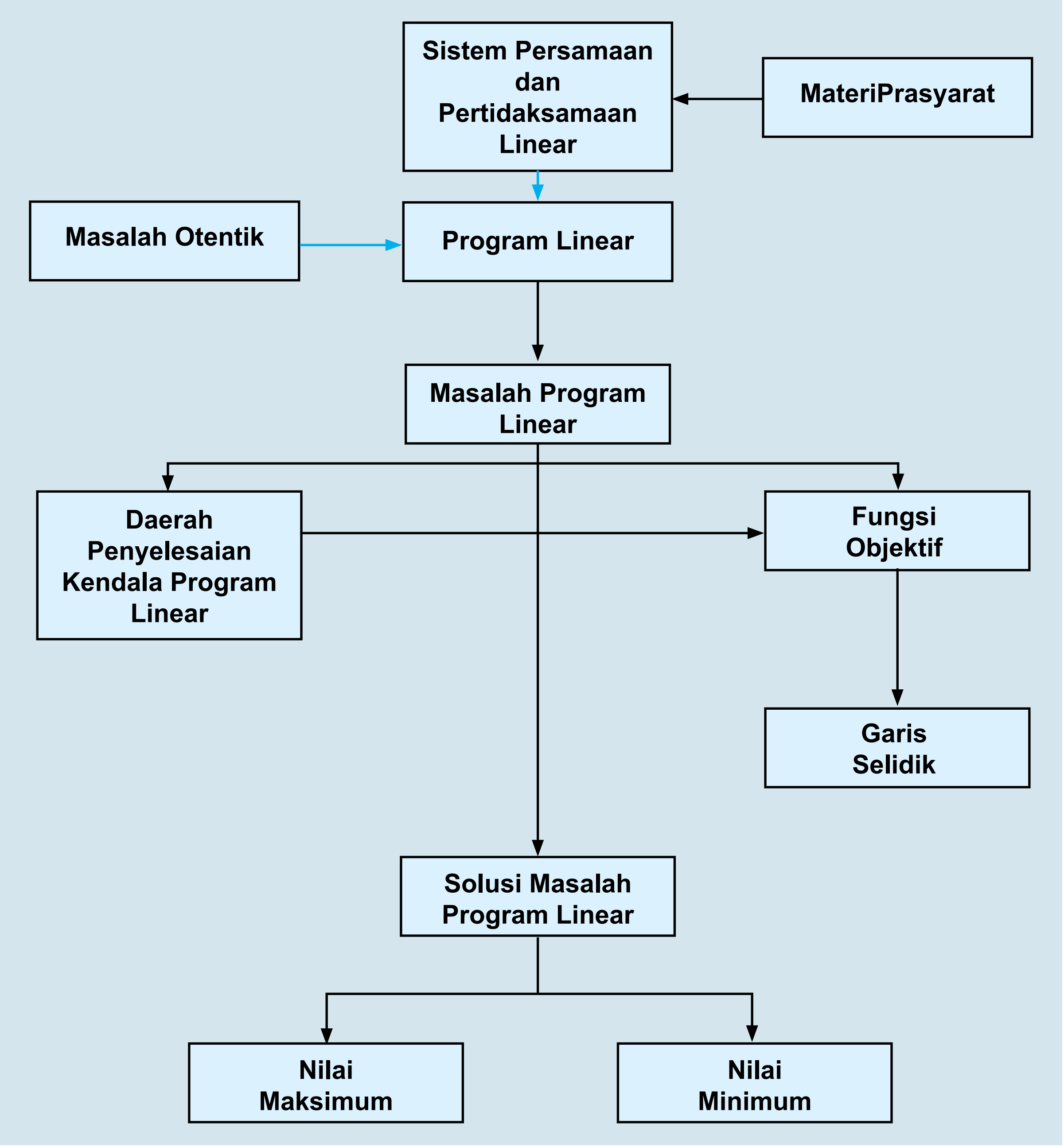
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 3. Mendeskripsikan konsep sistem per-samaan dan pertidaksamaan linear dua variabel dan menerapkannya dalam pemecahan masalah program linear. 4. Menerapkan prosedur yang sesuai untuk menyelesaikan masalah program linear terkait masalah nyata dan menganalisis kebenaran langkah langkahnya. 5. Menganalisis bagaimana menilai validitas argumentasi logis yang digunakan dalam matematika yang sudah dipelajari terkait pemecahan masalah program linear. 6. Merancang dan mengajukan masalah nyata berupa masalah program linear, dan menerapkan berbagai konsep dan aturan penyelesaian system pertidaksamaan linear dan menentukan nilai optimum dengan menggunakan fungsi selidik yang ditetapkan	Melalui pembelajaran Program Linear, siswa memperoleh pengalaman belajar: • mengamati secara cermat aturan susunan objek. • berpikir mandiri mengajukan ide secara bebas dan terbuka. • menemukan hubungan-hubungan di antara objek-objek. • melatih berpikir kritis dan kreatif. • bekerjasama menyelesaikan masalah.

Istilah Penting

- *Kendala/Keterbatasan (Constraint)*
- *Optimum (Maksimum atau minimum)*
- *Daerah Layak, Daerah Jawab, Daerah Penyelesaian*
- *Garis Selidik*
- *Titik Optimum*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Model Matematika

Pada subbab ini, kita akan mengajarkan bagaimana masalah dalam kehidupan sehari-hari dapat diselesaikan dengan menggunakan program linear.

Guru diperkenankan jika memulai suatu masalah program linear yang dapat dijumpai oleh siswa dalam lingkungan sekitarnya. Selanjutnya, guru membimbing siswa menyelesaikan/merumuskan masalah berikut ini.

Masalah-1.1

Sekelompok tani transmigran mendapatkan 10 hektar tanah yang dapat ditanami padi, jagung, dan palawija lain. Karena keterbatasan sumber daya petani harus menentukan berapa bagian yang harus ditanami padi dan berapa bagian yang harus ditanami jagung, sedangkan palawija lainnya ternyata tidak menguntungkan. Untuk suatu masa tanam, tenaga yang tersedia hanya 1550 jam-orang, pupuk juga terbatas, tak lebih dari 460 kilogram, sedangkan air dan sumber daya lainnya cukup tersedia. Diketahui pula bahwa untuk menghasilkan 1 kuintal padi diperlukan 10 jam-orang tenaga dan 5 kilogram pupuk, dan untuk 1 kuintal jagung diperlukan 8 jam-orang tenaga dan 3 kilogram pupuk. Kondisi tanah memungkinkan menghasilkan 50 kuintal padi per hektar atau 20 kuintal jagung per hektar. Pendapatan petani dari 1 kuintal padi adalah Rp 40.000 sedang dari 1 kuintal jagung Rp 30.000, dan dianggap bahwa semua hasil tanamnya selalu habis terjual.

Masalah bagi petani ialah bagaimanakah rencana produksi yang memaksimumkan pendapatan total? Artinya berapa hektar tanah harus ditanami padi dan berapa hektar tanah harus ditanami jagung.

Memulai bab ini, guru diharapkan memperkenalkan aplikasi program linear dalam kehidupan sehari-hari melalui contoh-contoh yang mungkin ditemui/dialami oleh siswa. Misalnya, bagaimana seorang calon perwira mengikuti program nutrisi untuk menjaga berat badan yang ideal.

Ajak siswa untuk bernalar dalam masalah yang sedang dikaji, terumata memikirkan batasan dalam masalah yang sedang dikaji.

Beri motivasi kepada siswa tentang kebermaknaan matematika dalam kehidupan. Dengan memahami Masalah 1.1, ajak siswa memikirkan dan merumuskan batasan-batasan dan tujuan dari masalah tersebut.

Perumusan Masalah

Mari kita mengkaji jika hasil padi dan jagung dinyatakan per kuintal.

Berdasarkan masalah di atas, diketahui bahwa setiap 1 hektar menghasilkan 50 kuintal padi. Artinya, untuk 1 kuintal padi diperlukan 0,02 hektar. Demikian juga, untuk 1 kuintal jagung diperlukan 0,05 hektar.

Cermati angka-angka yang tersaji pada tabel berikut ini!

Tabel 1.1: Alokasi setiap sumber yang tersedia

Sumber	Padi (per kuintal)	Jagung (per kuintal)	Batas sumber	Satuan
Tanah	0,02	0,05	10	hektar
Tenaga	10	8	1550	jam-orang
Pupuk	5	3	460	kilogram
Pendapa-tan	40	30		Ribuan

Guru memberikan penjelasan tambahan jika terdapat siswa yang belum terbiasa dengan satuan jam-orang.
Selain itu juga guru perlu memberikan penjelasan akan adanya asumsi pada suatu masalah.

Catatan:

1. Satuan jam-orang *(man-hour)* adalah banyak orang kali banyak jam bekerja.
   Kita anggap *(asumsi)* bahwa setiap transmigran memiliki tenaga dan waktu yang relatif sama.
2. Air dianggap berlimpah sehingga tidak menjadi kendala/keterbatasan. Jika ada kendala air maka satuannya adalah banyak jam membuka saluran tersier untuk mengalirkan air ke sawah.
3. Batas ketersediaan dalam soal ini kebetulan semuanya berupa batas atas.

Alternatif Penyelesaian

Besarnya pendapatan kelompok petani dipengaruhi banyak (kuintal) padi dan jagung yang diproduksi. Tentunya, besar pendapatan tersebut merupakan tujuan kelompok tani, tetapi harus mempertimbangkan keterbatasan sumber (luas tanah, tenaga dan pupuk).

Misalkan :

x banyak kuintal padi yang diproduksi oleh kelompok tani

y banyak kuintal jagung yang diproduksi oleh kelompok tani.

Untuk memperoleh pendapatan terbesar, harus dipikirkan keterbatasan-keterbatasan berikut:

a. Banyak hektar tanah yang diperlukan untuk x kuintal padi dan untuk y kuintal jagung tidak melebihi 10 hektar. Pernyataan ini dalam notasi matematika dinyatakan dengan:
   $0{,}02x + 0{,}05y \leq 10$ atau $2x + 5y \leq 1000$
b. Untuk ketersediaan waktu (jam-orang), tiap-tiap padi dan jagung hanya tersedia waktu tidak lebih dari 1550 jam-orang. Berdasarkan ketersedian waktu untuk setiap kuintal padi dan jagung, dirumuskan:
   $10x + 8y \leq 1550$
c. Jumlah pupuk yang tersedia untuk padi dan jagung tidak lebih dari 460 kilogram. Padahal untuk menghasilkan 1 kuintal padi dan jagung masing-masing membutuhkan 5 kilogram dan 3 kilogram. Pernyataan ini dinyatakan dalam model matematika:
   $5x + 3y \leq 460$
d. Dengan semua keterbatasan (kendala) (a), (b), dan (c), kelompok tani ingin mengharapkan pendapatan Rp 40.000 per kuintal padi dan Rp 30.000 per kuintal jagung. Oleh karena itu, besar pendapatan kelompok per kuintal adalah $40.000x + 30.000y$. Rumusan ini disebut sebagai fungi tujuan/sasaran; sebut $Z(x, y)$. Oleh karena itu, fungsi tujuan/sasaran masalah kelompok tani transmigran, dinyatakan sebagai berikut:

   $Z(x, y) = 40.000x + 30.000y$ atau $Z(x, y) = 40x + 30y$ (dalam ribuan rupiah).

Beri kesempatan kepada siswa untuk memaparkan hasil pemikiran mereka, dan minta siswa lain untuk memberi masukan.

Motivasi siswa untuk mengajukan ide-ide dalam merumuskan model matematika seperti yang disajikan pada bagian a), b), c) dan d).

Pastikan siswa paham akan penggunaan tanda "pertidaksamaan" dalam setiap rumusan kendala, melalui mengajukan pertanyaan berikut:

Mengapa harus menggunakan tanda "≤" bukan tanda "<".

Melihat uraian di atas, masalah kelompok tani transmigran dapat diubah bentuk menjadi suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Pemecahan sistem tersebut dapat dikerjakan dengan metode grafik (dibahas pada subbab berikutnya). Hal ini merupakan pengembangan konsep pertidaksamaan linear satu variabel yang telah kamu pelajari pada Kelas X.

Adapun sistem pertidaksamaan linear yang dimaksud adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} 0,02x + 0,05y \le 10 \\ 10x + 8y \le 1550 \\ 5x + 3y \le 460 \end{cases}$$

$$\text{atau} \begin{cases} 2x + 5y \le 1000 \rightarrow \textit{kendala lahan} \\ 10x + 8y \le 1550 \rightarrow \textit{kendala waktu} \\ 5x + 3y \le 460 \rightarrow \textit{kendala pupuk} \end{cases} \qquad (1)$$

Guru menjelaskan kepada siswa, bahwa untuk menentukan solusi masalah di atas akan dibahas pada subbab berikut.

Karena luas tanah/lahan, banyak waktu, dan banyak pupuk tidak mungkin negatif, kendala ini sebagai kendala nonnegatif, yaitu:

$$\left.\begin{matrix} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{matrix}\right\} \textit{kendala nonnegatif} \qquad (2)$$

Untuk pendapatan, tentu dimaksimumkan dan sebaliknya untuk biaya tentu diminimumkan. Untuk masalah kelompok tani ini, kita memiliki tujuan, disebut fungsi tujuan/sasaran, yaitu:

Maksimumkan:

$Z(x, y) = 40x + 30y$ (dalam satuan ribuan rupiah). (3)

Selain dua variabel, masalah program linear dalam kehidupan sehari-hari banyak juga yang memuat tiga variabel atau lebih. Seperti masalah yang ditemui seorang pengrajin perabot rumah tangga berikut ini.

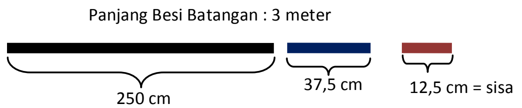
Masalah-1.2

Pak Toni, seorang pengrajin perabot rumah tangga mendapat pesanan membuat rak buku yang kerangkanya terbuat dari besi siku lubang yang dipotong-potong kemudian dirangkai dengan sekrup. Untuk membuat rak itu, diperlukan potongan besi sepanjang 250 cm sebanyak 8 potong, sepanjang 70 cm sebanyak 12 potong, dan sepanjang 37,5 cm sebanyak 20 potong. Ternyata batangan besi siku lubang yang dijual di toko mempunyai panjang standar 3 m, sehingga Pak Toni harus berpikir, cukup berapa potong besi batangan yang akan dibeli dan bagaimana caranya mengatur pemotongannya supaya panjang total sisa pemotongan menjadi minimal (dengan demikian kerugian Pak Toni minimal). Dapatkah kamu membantu Pak Toni untuk memotong besi batangan tersebut?

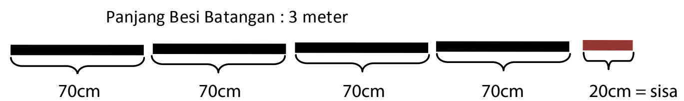
Setelah miminta siswa memahami Masalah 1.2, beri motivasi kepada siswa akan kebermaknaan matematika, bahkan dapat membantu untuk memaksimumkan penghasilan seseorang.
Berikan apresiasi kepada siswa yang mengajukan ide-ide cemerlang untuk menyelesaikan Masalah 1.2.

Alternatif Penyelesaian

Pola Pemotongan I

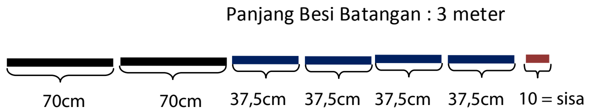


Pola Pemotongan II



Pola Pemotongan III

Pola Pemotongan IV



Dengan dua pola pemotongan yang ada pada buku siswa, guru memotivasi siswa untuk mencoba membentuk pola pemotangan besi yang lain hingga mereka dapat menemukan seperti yang disajikan pada alernatif penyelesaian.

Pola Pemotongan V

Pola Pemotongan VI

Secara lengkap, semua pola pemotongan besi batangan dengan panjang 3 m pada masalah di atas, dinyatakan dalam tabel berikut ini.

Bersama dengan siswa, guru menyimpulkan pola pemotongan besi batangan dalam Tabel 1.2. Hal ini bertujuan menyepakati rumusan sistem kendala yang dibentuk. Pastikan siswa mampu memaknai setiap angka yang tertera pada Tabel 1.2 melalui mengajukan pertanyaan-pertanyaan, misalnya: berapa banyak potongan besi berukuran 37,5 cm yang diperoleh dari semua pola pemotongan?

Tabel 1.2: Pola pemotongan besi batangan

		Pola pemotongan ke-						
	300	1	2	3	4	5	6	dipesan
Panjang Potongan Kawat	250	1	0	0	0	0	0	8
	70	0	4	3	2	1	0	12
	37,5	1	0	2	4	6	8	20
	sisa	12,5	20	15	10	5	0	

Kolom 1, mengatakan besi sepanjang 300 cm dapat dipotong dengan ukuran 250 cm sebanyak 1 potong dan 1 potong untuk ukuran 37,5 cm serta menghasilkan sisa 12,5 cm. Setiap sisa harus kurang dari 37,5 cm. Kolom 2, mengatakan pola pemotongan yang kedua dengan menghasilkan sisa 20 cm, demikian seterusnya arti angka-angka yang tersaji dalam tabel di atas.

Dengan demikian terdapat 6 peubah yang muncul, yaitu x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, dan x_i dengan x_6 : banyak batang besi yang dipotong menurut kombinasi pola ke-*i*. Oleh karena itu, kita temukan rumusan berikut ini:

$$\begin{aligned} x_1 & & &\geq 8 \\ & 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 & &\geq 12 \\ x_1 + & \quad 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 8x_6 & &\geq 20 \end{aligned} \qquad (4)$$

untuk setiap x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,dan $x_6 \geq 0$

dengan meminimumkan:

$$12, 5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_5 + 0x_6 \quad (5)$$

Persamaan (5) dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi yang tergantung pada nilai x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, dan x_6; sebut fungsi

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 12, 5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_5 + 0x_6$$

atau

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 12, 5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_5 + 5x_5$$

merupakan fungsi sisa pemotongan dari semua pola pemotongan besi. Fungsi *Z* merupakan tujuan pola pemotongan besi batangan yang dibutuhkan Pak Toni. Sedangkan apa yang dinyatakan pada bagian (4) merupakan kendala atau keterbatasan untuk mencapai tujuan tersebut.

Cermati tanda yang digunakan pada bagian (4) di atas, merupakan salah satu karakteristik yang digunakan pada kajian materi program linear.

Beri penjelasan kepada siswa bahwa pada sub bab ini, kompetensi yang dibangun adalah bagaimana merumuskan model suatu masalah-masalah program linear belum untuk menyelesaikan.
Untuk menyelesaikan model matematika Masalah 1.2 menggunakan metode simpleks. Oleh karena itu, motivasi siswa bahwa batasan masalah kajian dalam bab ini hanya untuk 2 variabel saja.

Masalah-1.3

Suatu perusahaan kertas memiliki dua pusat penggilingan yang harus memasok persediaan tiga pusat percetakan kertas koran secara mingguan. Setiap minggu, Penggilingan I dan II, berturut-turut menghasilkan 350 ton dan 550 ton bubur kertas koran. Sebagai bahan baku, Percetakan I, II, dan III berturut-turut memerlukan 275 ton/minggu, 325 ton/minggu, 300 ton/minggu bubur kertas. Ongkos pengiriman (dalam ratus ribu rupiah/ton) adalah sebagai berikut:

Melalui memahami dan menalar masalah di samping, motivasi siswa bahwa kebermaknaan materi program linear ini sangat banyak dalam kehidupan sehari-hari, salah di antaranya masalah transportasi yang dihadapi perusahaan kertas.

Tabel 1.3: Rincian biaya pengiriman

	Percetakan I	Percetakan II	Percetakan III
Penggilingan I	17	22	15
Penggilingan II	18	16	12

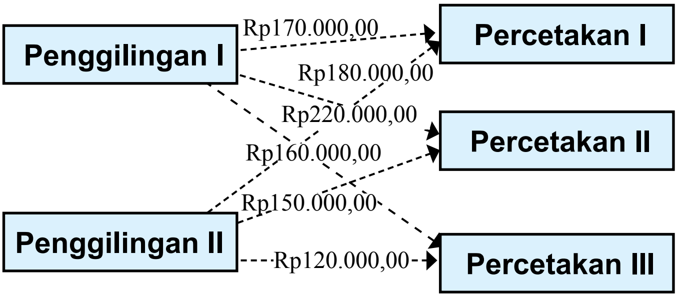
Masalah pada perusahaan tersebut adalah menentukan kapasitas bubur kertas koran setiap pengiriman (ton) ke setiap percetakan agar biaya pengiriman minimal.

Alternatif Penyelesaian

Langkah awal kita untuk menyelesaikan masalah ini adalah dengan merumuskan model matematika masalah pengiriman bubur kertas koran perusahaan tersebut.

Coba perhatikan gambar berikut ini.

Pastikan siswa memahami rute pengiriman bahan perusahaan tersebut dengan mengajukan pertanyaan-pertanyaan, misalnya. Sebutkan rute dengan biaya terkecil.



Gambar 1.2: Diagram rute pengiriman serta biaya pengiriman

a) Penggilingan I mampu menghasilkan 350 ton/minggu merupakan pasokan ke Percetakan I, II, dan III. Misalkan x_{ij} : kapasitas pengiriman (ton) setiap minggu dari Penggilingan (i = 1,2) ke Percetakan (j = 1,2,3). Jadi dapat dituliskan: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 350$

Ajukan pertanyaan kepada siswa untuk memastikan pemahaman mereka tentang penggunaan tanda " = " dalam model matematika masalah perusahaan kertas.

b) Penggilingan II mampu menghasilkan 550 ton/minggu, merupakan pasokan ke Percetakan I, II, dan III. Analog dengan bagian a), kondisi b) dapat kita tuliskan sebagai berikut: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 550$

c) Jumlah bahan bubur kertas koran yang diperlukan Percetakan I sebesar 275 ton/minggu harus dipasok oleh Penggilingan I dan II. Kondisi ini dituliskan: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 250$

d) Jumlah bahan bubur kertas koran yang diperlukan Percetakan II sebesar 325 ton/minggu harus dipasok oleh Penggilingan I dan II. Kondisi ini dituliskan: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 325$

e) Jumlah bahan bubur kertas koran yang diperlukan Percetakan III sebesar 300 ton/minggu harus dipasok oleh Penggilingan I dan II. Kondisi ini dituliskan: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 300$

Demikian selanjutnya, sehingga kita dapat menyimpulkan secara lengkap sebagai berikut:

Model matematika pasokan bubur kertas koran dari dua Penggilingan ke Percetakan I, II, dan III.

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 350 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 550 \end{aligned}\right\} \textit{Model matematika pasokan bubur kertas} \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 275 \\ x_{12} + x_{22} &= 325 \\ x_{13} + x_{23} &= 300 \end{aligned}\right\} \textit{Model matematika permintaan bubur kertas} \qquad (7)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2 \text{ dan } j = 1, 2, 3$$

Dengan model pengiriman bubur kertas dari dua pusat penggilingan ketiga pusat percetakan menimbulkan biaya pengiriman. Dengan memperhatikan Gambar 1.2, tentu kamu dapat memahami bahwa, setiap minggu, biaya pengiriman setiap ton bubur kertas dari Penggilingan I ke Percetakan II adalah Rp220.000,00, kondisi ini dituliskan: $220.000x_{12}$.

Demikian hal yang sama 170.000 x_{11} memiliki arti bahwa, setiap minggu, biaya pengiriman setiap ton bubur kertas dari Penggilingan I ke Percetakan II adalah Rp 170.000,00.

Secara kumulatif total biaya pengiriman perusahaan tersebut, dituliskan sebagai berikut:

$Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})$ $17x_{11} + 22x_{12} + 15x_{13} + 18x_{21} + 16x_{22} + 12x_{23}$

(dalam puluh ribu rupiah).

Fungsi Z merupakan fungsi biaya, tentu pihak perusahaan ingin biaya tersebut minimal. Oleh karena itu, untuk kajian program linear, fungsi Z merupakan fungsi tujuan/sasaran, dituliskan:

Meminimumkan:

$Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})$ $17x_{11} + 22x_{12} + 15x_{13} + 18x_{21} + 16x_{22} + 12x_{23}$
(dalam puluh ribu rupiah).

Fungsi biaya total Z memiliki nilai paling minimal jika ditemukan nilai x_{ij} yang memenuhi semua kondisi batasan pada model permintaan dan suplai bubur bahan kertas koran.

Dari kajian Masalah 1.1; 1.2; dan 1.3, ajak siswa mencermati bentuk-bentuk model matematika yang sudah dibentuk.

Dari Masalah 1.1, 1.2, dan 1.3, kita belum menyelesaikan masalah secara lengkap. Khususnya untuk menentukan semua nilai variabel yang memenuhi setiap kondisi. Hal ini disebabkan, untuk sebagian masalah diperlukan pengetahuan lebih lanjut agar mampu menyelesaikannya; misalnya pada Masalah 1.1 dan 1.3. Sedangkan untuk Masalah 1.2 akan kita kaji pada subbab berikutnya.

Selain itu, dari Masalah 1.1 dan 1.2, khususnya pada rumusan yang terbentuk pada persamaan (1), (2), (3), (4), (5), (6), dan (7), serta fungsi tujuan yang terbentuk dapat kita simpulkan beberapa ciri model matematika dalam program linear, yaitu:

1) Adanya fungsi tujuan/sasaran dari setiap masalah yang dikaji. Misalnya,
   - Maksimumkan: $Z(x, y) = 40x + 30y$ (dalam satuan ribuan rupiah).
   - Minimumkan:
     $Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})$ $12{,}5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_5$
   - Minimumkan:
     $Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})$ $17x_{11} + 22x_{12} + 15x_{13} + 18x_{21} + 16x_{22} + 22x_{23}$
     (dalam puluh ribu rupiah).

2) Kendala atau keterbatasan utama masalah dinyatakan sebagai suatu sistem pertidaksamaan linear atau sistem persamaan linear.
3) Terdapat juga kendala nonnegatif sebagai syarat dasar nilai setiap variabel yang akan ditentukan.

Dari tiga ciri di atas, dapat kita simpulkan masalah Program Linear dirumuskan sebagai berikut:

Definisi 1.1

Masalah program linear adalah menentukan nilai x_1, x_2, ..., x_n yang memaksimumkan (atau meminimumkan) fungsi sasaran/tujuan,

$$z\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$$

dengan kendala/keterbatasan:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \left(\leq, =, \geq\right) b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \left(\leq, =, \geq\right) b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \left(\leq, =, \geq\right) b_m$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0.$$

Cermati setiap tanda pertidaksamaan atau persamaan yang digunakan dalam model matematika sehingga disimpulkan dalam Definisi 1.1.

Guru diperbolehkan menyajikan atau mengajak siswa untuk menemukan masalah-masalah lain, terutama masalah yang berbasis kedaerahan yang terkait dengan masalah program linear dan meminta siswa mencoba merumuskan model matematika untuk setiap masalah.

Namun, dalam kajian bab ini kita akan mengkaji masalah program linear hanya untuk dua variabel. Untuk tiga variabel atau lebih dibutuhkan pengetahuan lanjutan tentang teknik menyelesaikan sistem persamaan atau pertidaksamaan linear.

Pembahasan kita selanjutnya, mengkaji grafik setiap kendala yang terbentuk dari masalah program linear.

2. Program Linear dengan Metode Grafik

Kajian masalah program linear dua variabel dapat diselesaikan melalui grafik sistem kendala dari masalah tersebut. Oleh karena itu, langkah awal dalam menyelesaikan masalah tersebut, yaitu dengan menggambarkan sistem pertidaksamaan yang terbentuk

Beri penjelasan kepada siswa bahwa ada beberapa cara untuk menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear. Salah satu diantaranya adalah dengan metode grafik.

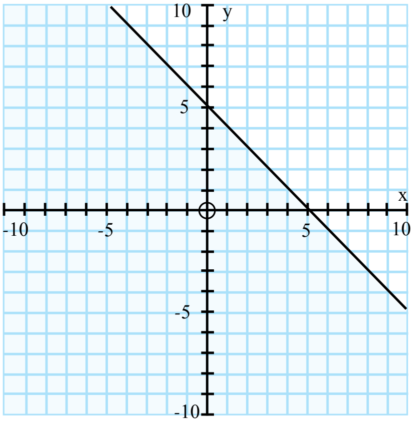
Oleh karena itu, motivasi siswa untuk mampu menyelesaikan masalah program linear secara tuntas.

pada kendala/keterbatasan masalah program linear. Berikut ini diberikan 1 pertidaksamaan dengan kombinasi syarat variabelnya.

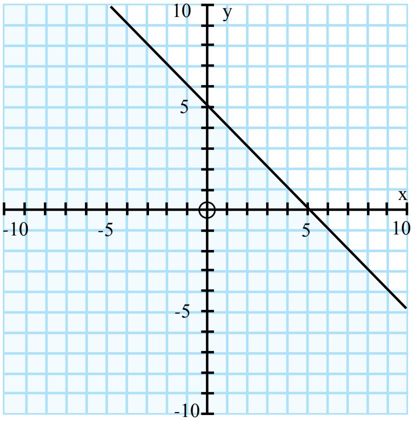
a) $x + y \geq 5$
b) $x + y \geq 5$ dengan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.
c) $x + y \geq 5$ dengan $x \geq 0$ dan $y \leq 0$.
d) $x + y \geq 5$ dengan $x \leq 0$ dan $y \geq 0$.
e) $x + y \geq 5$ dengan $x \leq 0$ dan $y \leq 0$.

➢ Dengan pengetahuan tentang cara menggambarkan daerah penyelesaian suatu pertidaksamaan linear pada Kelas X, coba diskusikan bersama temanmu, apa perbedaan kelima pertidaksamaan di atas.

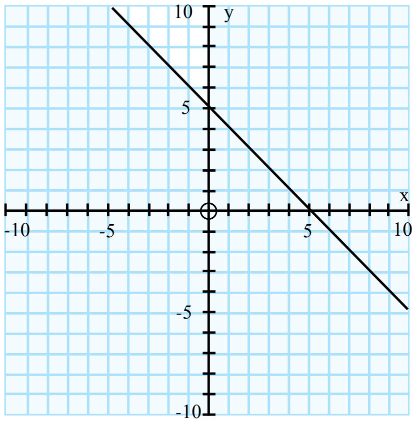
Dengan mencermati grafik pada Gambar 1.3, beri jesempatan kepada siswa untuk mampu menggambar grafik dengan pertidaksamaan bagian c), d) dan e), seperti yang disajikan pada gambar di samping.
Beri penjelasan kepada siswa, bagaimana menggambarkan setiap grafik secara manual dan menggunakan softwore. Banyak software yang dapat digunakan untuk menggambarkan grafik sistem pertidaksamaan atau persamaan linear, seperti Autograph dan Lindow.



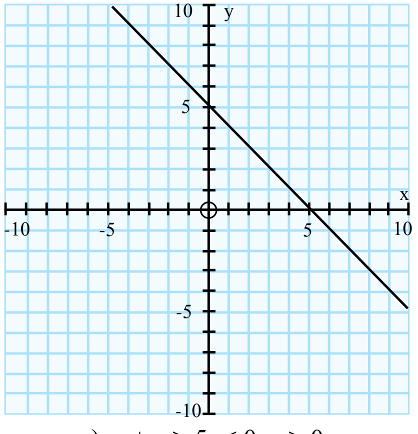
a). $x + y \geq 5$



b). $x + y \geq 5$ dengan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$



d). $x + y \geq 5$; $\leq 0, y \geq 0$



e). $x + y \geq 5; \leq 0, y \geq 0$

Gambar 1.3: Grafik a). $x + y \geq 5$ dan b). $x + y \geq 5$ dengan $x + y \geq 5$ dengan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$

*Dalam buku ini, untuk semua grafik persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear, **Daerah Bersih** merupakan daerah penyelesaian pertidaksamaan atau sistem pertidaksamaan yang dikaji.*

Guru dan siswa perlu menyepekati tentang arah arsiran dalam menentukan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan.

Pada gambar a), dapat kita pahami bahwa semua titik yang terletak pada daerah yang tidak diarsir (bersih) memenuhi pertidaksamaan $x + y \geq 5$ Hal ini berbeda dengan syarat nilai x dan y pada Gambar 2.3 b). Hanya pada saat $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ yang memenuhi daerah penyelesaian pertidaksamaan $x + y \geq 5$.

Contoh 1.1

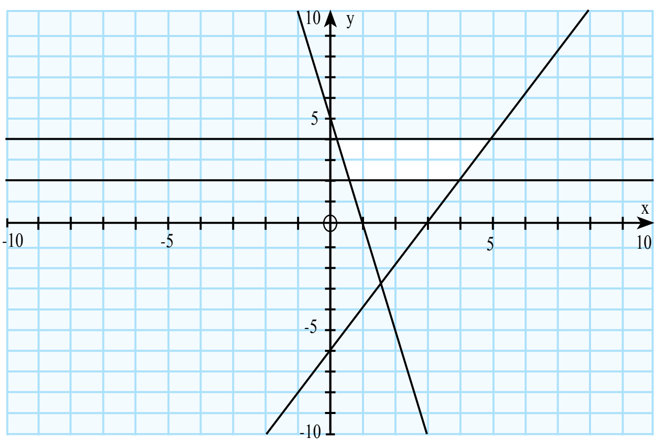
Gambarkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut ini.

a) $\left.\begin{aligned} 2x - y &\leq 6 \\ 5x + y &\geq 5 \\ x &\geq 0 \\ 2 \leq y &\leq 4 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y &\leq 2 \\ -3x + 2y &\geq 6 \\ 3 \leq x &\leq 4 \end{aligned}\right\}$

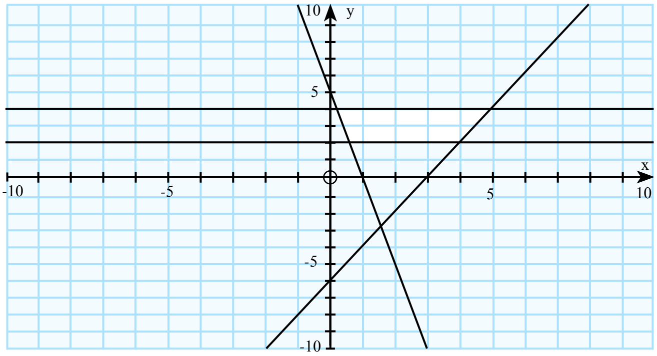
Alternatif Penyelesaian

➢ *Guru mengkoordinir siswa untuk mendiskusikan langkah-langkah menggambarkan grafik suatu sistem pertidaksamaan linear.*



Gambar 1.5: Daerah penyelesaian pertidaksamaan

Guru mengkoordinasikan siswa dalam menyusun langkah-langkah menggambarkan grafik sistem pertidaksamaan linear.
Ajak siswa berdiskusi dalam merumuskan langkah-langkah tersebut.
Selanjutnya, untuk setiap grafik suatu sistem pertidaksamaan linear pastikan siswa memahami dan membaca grafik tersebut dengan mengajukan pertanyaan-pertanyaan. Misalnya, tentukan titik potong kedua garis.
Ajak siswa memahami hubungan daerah bersih pada grafik dengan sistem pertidaksamaan yang diketahui. Misalnya, bahwa semua titik pada daerah bersih memenuhi



Gambar 1.6: Suatu sistem pertidaksamaan linear yang tidak daerah penyelesaian

untuk setiap pertidaksamaan linear yang terdapat dalam sistem pertidaksamaan linear. Sehingga mampu menyimpulkan bahwa mungkin suatu sistem pertidaksamaan linear tidak memiliki daerah bersih.

Uji Kompetensi 1.1

Beri motivasi kepada siswa untuk mengasah pengetahuan dan keterampilannya melalui mengejakan soal dan masalah yang disajikan pada Uji Kompetensi 1.1.
Guru harus memahami kondisi siswa dalam penugasan soal-soal tersebut, apakah tugas individu atau tugas kelompok.

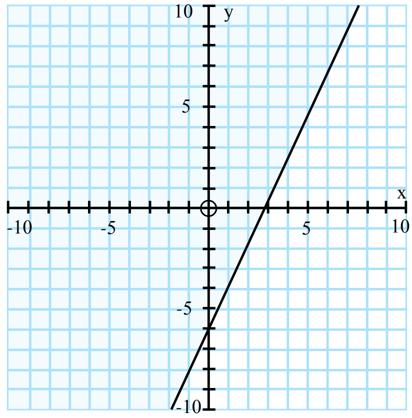
1. PT Lasin adalah suatu pengembang perumahan di daerah pemukiman baru. PT tersebut memiliki tanah seluas 12.000 meter persegi berencana akan membangun dua tipe rumah, yaitu tipe mawar dengan luas 130 meter persegi dan tipe melati dengan luas 90 m^2. Jumlah rumah yang akan dibangun tidak lebih 150 unit. Pengembang merancang laba tiap-tiap tipe rumah Rp2.000.000,00 dan Rp 1.500.000,00.
   Modelkan permasalahan di atas!

2. Klinik "Dewi" akan membuka cabang baru di daerah padat penduduk. Untuk itu, pemilik klinik merancang sebuah jadwal jaga perawat yang akan bertugas, seperti berikut ini.

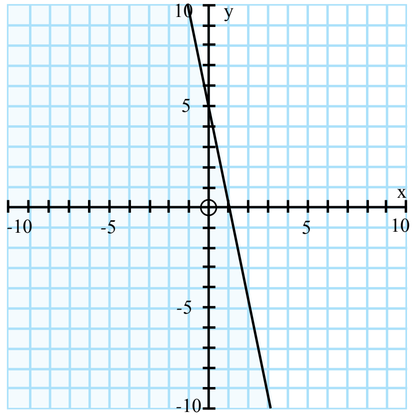
	24.00 - 04.00	04.00 - 08.00	08.00 - 12.00	12.00 - 16.00	16.00 - 20.00	20.00 - 24.00
Ketersedian	1	2	3	4	5	6
Banyak Perawat yang dibutuhkan	6	8	11	9	18	11

Rumuskan masalah penjadwalan perawat tersebut dalam model matematika.

3. Tentukanlah pertidaksamaan yang memenuhi setiap daerah penyelesaian di bawah ini.



(a)



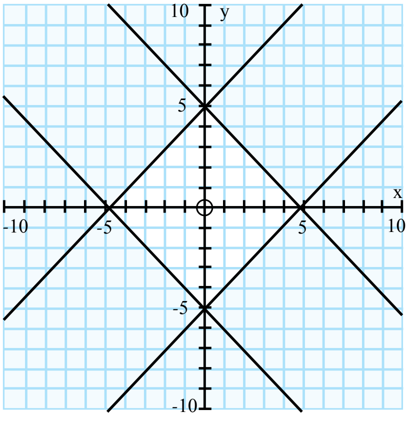
(b)

4. Gambarkanlah daerah penyelesaian setiap sistem pertidaksamaan di bawah ini.

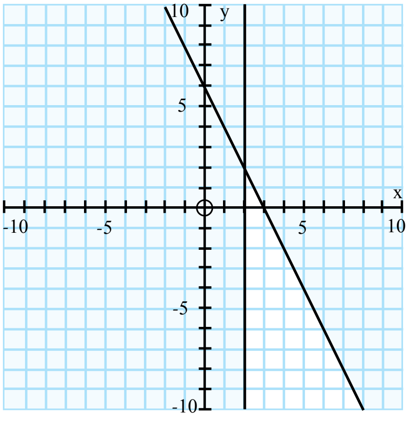
$a)\ \begin{array}{c} 2x + y \geq 24 \\ x \geq 5 \end{array}$ $\qquad b)\ \begin{array}{c} 2y \leq 5 - 6x \\ 1 \leq y \leq 6 \end{array}$

5. Cermati pertidaksamaan $ax + by \geq c$.
   Untuk menentukan daerah penyelesaian (bersih) pada bidang koordinat, selain dengan menggunakan uji titik, selidiki hubungan tanda koefisien x dan y terhadap daerah penyelesaian (bersih) pertidaksamaan.

6. Perhatikan grafik-grafik di bawah ini.
   Nyatakan pertidaksamaan-pertidaksamaan yang memenuhi setiap daerah yang memenuhi.



(i)



(ii)

7. Seorang atlet diwajibkan makan dua jenis tablet setiap hari. Tablet pertama mengandung 5 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B, sedangkan tablet kedua mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin B. Dalam satu hari, atlet itu memerlukan 20 unit vitamin A dan 5 unit vitamin B. Harga tiap-tiap 1 tablet, Rp1.500,00 dan Rp2.000,00.
   Modelkan masalah di atas.

8. Dengan persediaan kain polos 20 meter dan kain bergaris 10 meter, seorang penjahit akan membuat 2 model pakaian jadi. Model I memerlukan 1 meter kain polos dan 1,5 meter kain bergaris. Model II memerlukan 2 meter kain polos dan 0.5 meter kain bergaris. Bila pakaian tersebut dijual, setiap model I memperoleh untung Rp15.000,00 dan model II memperoleh untung Rp10.000,00. (UAN 2004 No. 22)
   Nyatakan masalah di atas dalam model matematika

9. Sebuah toko bunga menjual 2 macam rangkaian bunga. Rangkaian I memerlukan 10 tangkai bunga mawar dan 15 tangkai bunga anyelir, Rangkaian II memerlukan 20 tankai bunga mawar dan 5 tangkai bunga anyelir. Persediaan bunga mawar dan bunga anyelir masing-masing 200 tangkai dan 100 tangkai. Rangkaian I dijual seharga Rp200.000,00, dan Rangkaian II dijual seharga Rp100.000,00 per rangkaian. (UN 2006 No. 21)
   Modelkan masalah di atas dalam bentuk model matematika.

10. Perhatikan masalah yang dihadapi seorang penjaja buah-buahan berikuti ini.
    Pak Benni, seorang penjaja buah-buahan yang menggunakan gerobak menjual apel dan pisang. Harga pembelian apel Rp 18.000,- tiap kilogram dan pisang Rp8.000,00,- tiap kilogram. Beliau hanya memiliki

modal Rp2.000.000,00, sedangkan muatan gerobak tidak lebih dari 450 kilogram. Padahal keuntungan tiap kilogram apel 2 kali keuntungan tiap kilogram pisang. Rumuskanlah model matematika masalah di atas.

3. Daerah Bersih dan Garis Selidik

Penggunaan istilah daerah bersih merupakan daerah yang memenuhi suatu pertidaksamaan. Pada referensi lain, daerah bersih disebut juga daerah suci. Untuk konsistensi pada buku ini, kita menggunakan istilah daerah bersih, artinya semua titik (x, y) yang memenuhi suatu pertidaksamaan linear atau suatu sistem pertidaksamaan linear.

Sekarang, yang menjadi pokok permasalahan pada bagian subbab ini adalah menentukan daerah bersih suatu pertidaksamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear. Mari kita mulai daerah bersih yang terdapat pada Gambar 1.3 b). Untuk setiap nilai x dan y yang memenuhi $x + y \geq 5$ dengan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, disajikan pada tabel berikut ini.

Beri penjelasan kepada siswa, pada sub bab ini, kita akan menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear dari masalah program linear secara tuntas.
Pastikan siswa sudah menguasi langkah-langkah menggambarkan grafik suatu pertidaksamaan linear.

Tabel 1.4: Uji Titik dengan Nilai pertidaksamaan dan Arah Daerah Bersih

(*x*, *y*)	Nilai $x + y \geq 5$	Arah Daerah Bersih
(5, 4)	Benar (9 > 5)	Sebelah kanan (atas) garis $x + y = 5$
(6, 1)	Benar (7 > 5)	Sebelah kanan (atas) garis $x + y = 5$
(2, 1)	Salah (3 > 5)	Sebelah kiri (bawah) garis $x + y = 5$
(0, 0)	Salah (0 > 5)	Sebelah kiri (bawah) garis $x + y = 5$

Ajak siswa berdiskusi memahami Tabel 1.4 dan sandingkan dengan grafik pertidaksamaan yang disajikan pada Gambar 1.3 b).

Sekarang, kita uji pemahaman kita menggambarkan daerah bersih yang dihasilkan masalah berikut ini.

Melalui Masalah 1.4, pastikan siswa sudah memiliki pengetahuan dan keterampilan dalam merumuskan model matematika suatu masalah program linear.

Masalah-1.4

Suatu pabrik farmasi menghasilkan dua jenis kapsul obat flu yang diberi nama Fluin dan Fluon. Tiap-tiap kapsul memuat tiga unsur (*ingredient*) utama dengan kadar kandungannya tertera dalam Tabel 1.5. Menurut dokter, seseorang yang sakit flu akan sembuh jika dalam tiga hari (secara rata-rata) minimal menelan 12 grain aspirin, 74 grain bikarbonat dan 24 grain kodein. Jika harga Fluin Rp500,00 dan Fluon Rp600,00 per kapsul, bagaimana rencana (program) pembelian seorang pasien flu (artinya berapa kapsul Fluin dan berapa kapsul Fluon harus dibeli) supaya cukup untuk menyembuhkannya dan meminimumkan ongkos pembelian total.

Table 1.5: Kandungan Unsur (dalam grain)

Unsur	**Banyak grain perkapsul**	
	Fluin	Fluon
Aspirin	2	1
Bikorbonat	5	8
Kodein	1	6

Alternatif Penyelesaian

Data pada masalah di atas, dapat disajikan seperti tabel berikut ini.

Tabel 1.6: Tabel persiapan

Unsur			**Batas Minimum**
	Fluin	Fluon	
Aspirin	2	1	12
Bikarbonat	5	6	74
Kodein	1	6	24
Harga	500	600	

Dengan tabel tersebut, dapat kita misalkan:

x : banyak kapsul Fluin yang dibeli.

y : banyak kapsul Fluon yang dibeli.

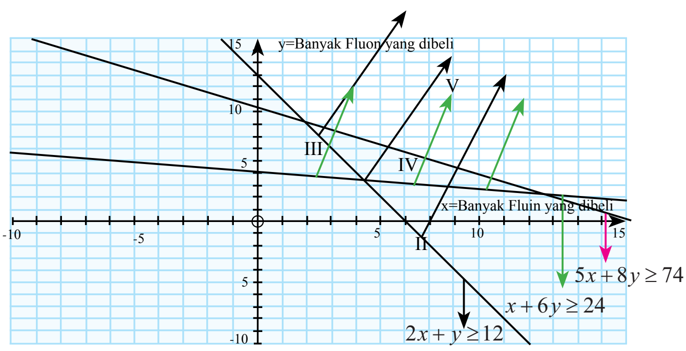
Selanjutnya, kita dengan mudah menemukan bentuk masalah program linear masalah di atas.

Mencari x, y yang memenuhi:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 12 \\ 5x + 8y \geq 74 \\ x + 6y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

dan meminimumkan $Z = 500x + 600y$. (b)

> *software Autograph* merupakan salah satu software yang digunakan unttuk menggambarkan daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear. *Autograph* juga dapat digunakan untuk menggambarkan berbagai grafik fungsi, misalnya fungsi kuadrat, dan fungsi logaritma.



Gambar 1.7: Daerah V adalah irisan daerah bersih sistem pertidaksamaan (a).

Daerah no. V merupakan irisan daerah bersih keenam pertidaksamaan, juga disebut ***daerah layak, atau daerah penyelesaian atau daerah optimum***.

Ajukan pertanyaan-pertanyaan kepada siswa untuk menyelidiki pengetahuan dan keterampilan mereka dalam menggambarkan grafik suatu sistem pertidaksaman linear. Misalnya, mengapa bukan daerah II yang merupakan irisan daerah bersih pertidaksamaan? Keterampilan siswa dalam menggambarkan grafik serta memahaminya, merupakan salah satu kompetensi yang harus dibangun pada sub bab ini.

Dalam buku ini kita sepakati untuk menggunakan istilah daerah penyelesaian. Jika keenam pertidaksamaan di atas, dinyatakan sebagai suatu sistem pertidaksamaan, maka daerah penyelesaian dapat kita definisikan sebagai berikut:

Definisi 1.2

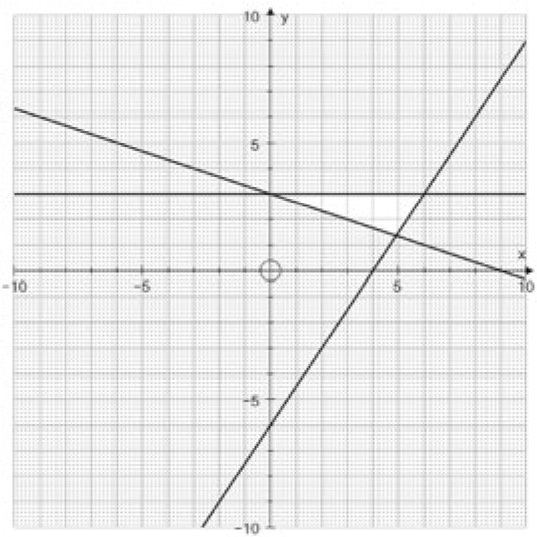
(Daerah Layak/Daerah Penyelesaian/Daerah Optimum)

Daerah Penyelesaian Masalah Program Linear merupakan himpunan semua titik (x, y) yang memenuhi kendala suatu masalah program linear.

Daerah penyelesaian untuk masalah ini merupakan suatu daerah yang tak terbatas (*unbounded*). Tentu terdapat juga daerah penyelesaian yang terbatas (*bounded*).

Guru juga tentunya harus mampu menggambarkan dan menjelaskan grafik setiap sistem pertidaksamaan di samping. Grafik setiap sistem tersebut sebagai berikut:

a)



Ajak siswa merumuskan definisi daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear. Pastikan siswa benar-benar memahami daerah penyelesaian suatu masalah program linear melalui mengajukan pertanyaan-pertanyaan, misalnya, manakah dari sistem pertidaksamaan linear di bawah ini yang tidak memiliki daerah penyelesaian:

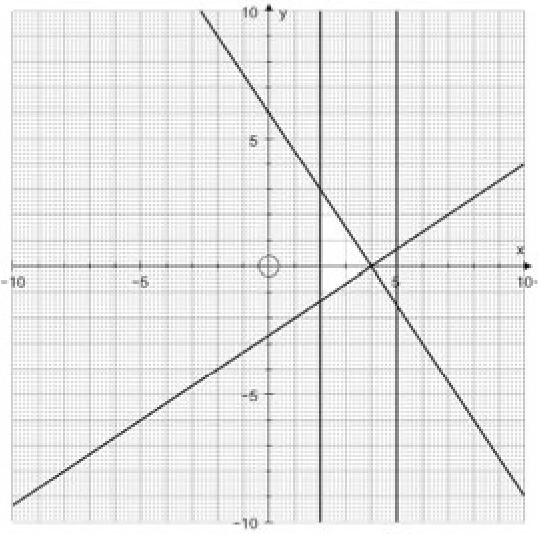
a) $3x - 2y \le 12$
$x + 2y \ge 9$
$y \le 3$
$2 \le x \le 5$

b) $2x - 3y \le 8$
$3x + 2y \le 12$
$x \le 2$

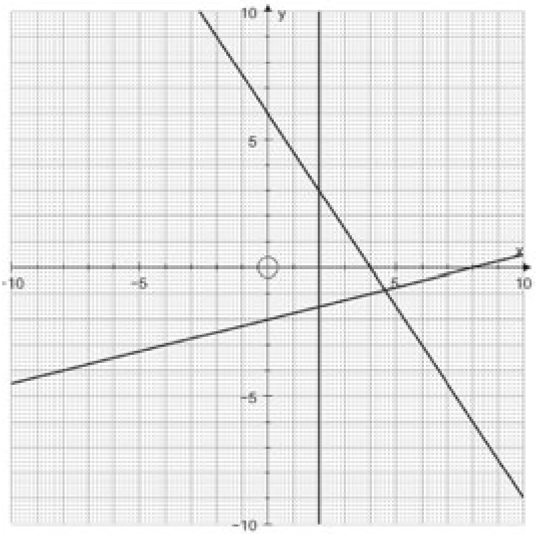
c) $3x + 2y \ge 12$
$x - 4y \ge 8$

Berikan kesempatan kepada siswa untuk mencoba dan menyajikan hasil kerja siswa di depan kelas.

b)



c)



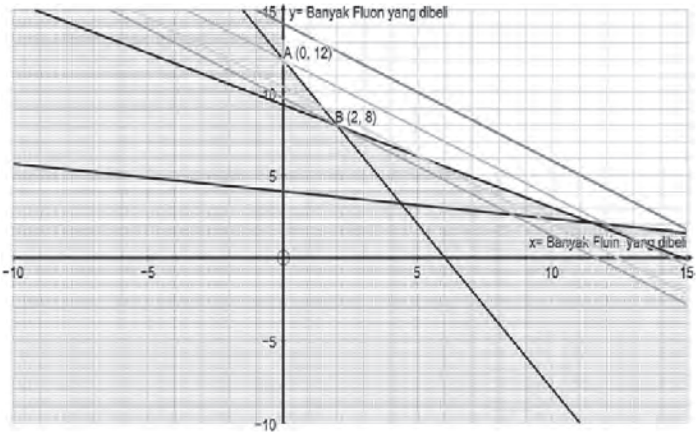
Selanjutnya, akan ditentukan nilai x dan y yang terdapat di daerah penyelesaian yang menjadikan nilai fungsi $Z = 500x + 600y$ minimum. Jadi, kita akan fokus pada nilai fungsi Z di daerah penyelesaian. Perhatikan nilai-nilai fungsi Z pada tabel berikut ini.

Guru mengajak siswa mengasosiasi hubungan titik koordinat dengan daerah bersih yang terdapat pada grafik!

Tabel 1.7: Tabel nilai *Z* = 500*x* + 600*y*

(x, y)	Nilai $Z = 500x + 600y$
(0, 12)	Z – 500.(0) + 600.(12) = 7200
(2, 8)	Z – 500.(2) + 600.(8) = 7200
(4, 7)	Z – 500.(4) + 600.(7) = 7200
(5, 10)	Z – 500.(5) + 600.(10) = 7200

Guru mengajak siswa untuk mencermati kembali Masalah 1.4 hingga ditemukan penyelesaiannya dengan menggunakan prinsip garis selidik.



Gambar 1.8: Nilai fungsi $Z = 500x + 600y$ atau garis selidik

Berdasarkan gambar dan nilai fungsi $Z = 500x + 600y$ pada tabel di atas, jelas bahwa makin ke kanan (atas) garis $K = 500x + 600y$ nilai k makin besar, sebaliknya jika garis $K = 500x + 600y$ digeser ke kiri (bawah) maka nilai k makin kecil.

Perkaya pengetahuan siswa melalui kemampuan menginterpretasikan setiap penyelesaian suatu masalah program linear.

Jadi, untuk menentukan nilai variabel x dan y yang meminimumkan fungsi $Z = 500x + 600y$, dapat diperoleh dengan menggeser (ke kiri atau ke kanan, ke atas atau ke bawah) grafik persamaan garis $K = 500x + 600y$ dengan k bilangan bulat.

Oleh karena itu, nilai dan membuat fungsi $Z = 500x + 600y$ bernilai minimum, yaitu 4800.

Benar, bahwa untuk menentukan nilai minimum fungsi sasaran $Z = 500x + 600y$ dapat juga melalui ***Uji Titik-Titik Sudut*** daerah penyelesaian. Hal ini dapat dicermati pada tabel berikut.

Tabel 1.8: Nilai $Z = 500x + 600y$

	$Z = 500x + 600y$
A (0,12)	$Z = 500.(0) + 600.(12) = 7.200$
B (2,8)	$Z = 500.(2) + 600.(8) = 5.800$
C (6,3)	$Z = 500.(6) + 600.(3) = 4.800$

Dari ke tiga titik sudut yang terdapat di daerah penyelesaian sistem, benar bahwa nilai minimum fungsi sasaran $Z = 500x + 600y$ adalah Rp 4.800, yaitu pada titik C (6,3).

Namun, jika seandainya fungsi sasaran diubah menjadi,

Memaksimumkan: $Z = 500x + 600y$ maka menentukan nilai maksimum fungsi tersebut dengan menggunakan Uji Titik Sudut menghasilkan kesimpulan yang salah, yaitu nilai Z maksimum adalah 7.200; di titik C(6, 3). Hal ini kontradiksi dengan bahwa masih banyak lagi titik-titik lain yang mengakibatkan nilai Z makin lebih dari 7.200.

Jadi, supaya uang pembelian total menjadi minimum sebaiknya dibeli 6 kapsul Fluin dan 3 kapsul Fluon dan uang pembeliannya adalah Rp 4800.

Untuk memperkaya pengetahuan dan ketrampilan kamu, mari kita selesaikan masalah kelompok tani transmigran yang disajikan pada awal bab ini.

Contoh 1.2

Telah diketahui model matematika masalah tersebut, yaitu

Dengan nilai fungsi pada tabel di atas, Guru membimbing siswa untuk mengetahui perubahan nilai garis, hingga siswa mampu menyimpulkan cara menentukan nilai optimum fungsi tujuan dengan teliti. Dengan nilai fungsi pada tabel di atas, Guru membimbing siswa untuk mengetahui perubahan nilai garis , hingga siswa mampu menyimpulkan cara menentukan nilai optimum fungsi tujuan dengan teliti.

Ajak siswa mampu menemukan hubungan eksistensi nilai fungsi sasaran dengan daerah penyelesaian.

Ingatkan siswa, bahwa belum tentu setiap sistem pertidaksamaan linear yang memiliki daerah penyelesaian juga memiliki nilai fungsi tujuan.

Dengan pengalaman siswa menggambarkan grafik suatu sistem pertidaksamaan linear, bimbing siswa untuk mencoba menggambarkan grafik setiap pertidaksamaan pada Contoh 1.2.

$$\begin{cases} 0,02x+0,05y \le 10 \\ 10x+8y \le 1550 \\ 5x+3y \le 460 \end{cases} \text{ atau } \begin{cases} 2x+5y \le 1000 \rightarrow \textit{kendala lahan} \\ 10x+8y \le 1550 \rightarrow \textit{kendala waktu} \\ 5x+3y \le 460 \rightarrow \textit{kendala pupuk} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{matrix}\right\} \qquad (1)$$

Fungi Tujuan

Maksimumkan: $Z(x, y) = 40x + 30y$ (dalam satuan ribuan rupiah). (2)

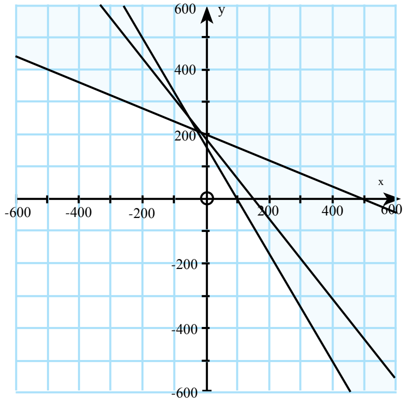
Kita akan menentukan banyak hektar tanah yang seharusnya ditanami pada dan jagung agar pendapatan kelompok tani tersebut maksimum.

Ajukan pertanyaan-pertanyaan kepada siswa untuk memastikan ketrampilan mereka menggambarkan daerah penyelesaian sistem (1). Misalnya apakah ada yang kurang dengan grafik daerah penyelesaian sistem (1)? Apakah syarat positif untuk setiap variabel sudah dipenuhi? Daerah penyelesaian sistem tersebut berbentuk segitiga siku-siku yang berada pada kuadran I. Guru mengajak siswa untuk mencoba menyelidiki arah persegeran nilai grafik garis selidik $K = 40x + 30y$ *pada daerah penyelesian hingga siswa berhasi menemukan titik yang mengakibatkan garis tersebut bernilai maksimum.*

Alternatif Penyelesaian

Langkah pertama, kita menentukan daerah penyelesaian yang memenuhi sistem (1).

Mari cermati gambar di bawah ini.



Gambar 1.5: Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (1).

Selanjutnya kita akan memilih dua titik yang terdapat di daerah penyelesaian untuk membantu menentukan arah pergeseran garis selidik $K = 40x + 30y$ (dalam ribuan rupiah).

Misal, dipilih titik (20,20), sehingga diperoleh persamaan garis $40x + 30y = 1400$. Sedangkan untuk titik (50, 100), diperoleh persamaan garis $40x + 30y = 5000$.

Garis selidik $K = 40x + 30y$ bernilai maksimum pada saat garis melalui titik $\left(0,\ 153\frac{1}{3}\right)$. Artinya,bahwa dengan harga padi dan jagung pada saat itu, kelompok tani memilih menaman jagung. Karena dengan menanam palawija tersebut, mereka dapat mengahasilkan jagung sebanyak kuintal dan memiliki pendapatan sebesar Rp 4.600.000.

Dari pembahasan Masalah 1.4 dan Masalah 1.1, mari kita tuliskan dan cermati bersama kesimpulan berikut ini, yang kita nyatakan dalam definisi.

Definisi 1.3

Fungsi sasaran/tujuan merupakan suatu rumusan fungsi yang memenuhi semua keterbatasan pada suatu masalah program linear.

Fungsi sasaran/tujuan merupakan fungsi linear yang terkait dengan setiap nilai variabel dalam semua kendala program linear.

Berdasarkan pembahasan Masalah 1.1 sampai Masalah 1.4, bersama siswa merumuskan Definisi 1.3.

Mari kita cermati kembali fungsi sasaran untuk setiap Masalah 1.1 sampai Masalah 1.4.

i Maksimumkan: $Z(x, y) = 40x + 30y$ (dalam satuan ribuan rupiah).

ii Minimumkan:

$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\ 12{,}5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_3.$

iii Minimumkan:
$Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})\ 17x_{11} + 22x_{12} + 15x_{13} + 18x_{21} + 16x_{22} + 12x_{23}.$
(dalam puluh ribu rupiah).

iv Minimumkan: $Z(x, y) = 500x + 600y$

Beri penjelasan kepada siswa batasan kajian fungsi sasaran meskipun $Z\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$.

Banyak variabel yang terdapat pada fungsi tujuan sama dengan banyak variabel yang terdapat pada sistem pertidaksamaan program linear.

Berikan penjelasan kepada siswa, kajian untuk n > 2, dapat diselesaikan dengan menggunakan metode simpleks.

Diharapkan guru memberikan deskripsi tentang metode simpleks

Bersama dengan siswa, guru menyimpulkan definisi garis selidik.

Pastikan siswa mengenali garis selidik dalam suatu masalah program linear.

Fungsi sasaran bagian (i) dan (iv) hanya memuat dua variabel, yaitu variabel x dan y, sedangkan pada bagian (ii) dan (iii) memuat enam variabel. Bahkan, terdapat masalah yang memuat n banyak variabel.

Oleh karena itu, secara umum dapat ditulis bentuk umum fungsi sasaran dari suatu masalah program linear, yaitu:

Maksimumkan (Minimumkan)

$Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$

Nilai maksimum (atau minimum) fungsi Z adalah nilai terbesar (atau terkecil) dari fungsi objektif yang merupakan solusi optimum masalah program linear.

Namun dalam kesempatan ini, kita mengkaji hanya untuk $n = 2$, sehingga fungsi sasaran menjadi $Z(x_1, x_2) = C_1x_1 + C_2x_2$.

Definisi 1.4

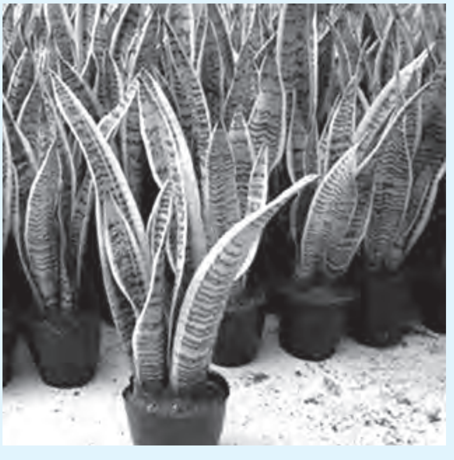
Garis selidik adalah grafik persamaan fungsi sasaran/tujuan yang digunakan untuk menentukan solusi optimum (maksimum atau minimum) suatu masalah program linear.

Untuk menentukan persamaan garis selidik $K = C_1x_1 + C_2x_2$ dengan k bilangan real, kita memilih minimal dua titik (x, y) yang terdapat di daerah penyelesaian. Dengan dua titik tersebut, nilai optimum fungsi sasaran dapat ditemukan melalui pergeseran garis selidik di daerah penyelesaian.

Namun pada kasus tertentu, garis selidik tidak dapat digunakan untuk menentukan nilai optimum suatu fungsi sasaran. Mari kita cermati masalah berikut ini.

Masalah-1.5

Apakah kamu pernah melihat tanaman hias seperti di bawah ini? Tahukah kamu berapa harga satu tanaman hias tersebut?



Gambar 1.6: Tanaman Hias Aglaonema dan Sansevieria

Sumber: *www.aksesdunia.com*

Ajak siswa untuk mengenal jenis-jenis bunga yang disajikan pada Masalah 1.5. Mintalah siswa untuk merumuskan masalah yang dihadapi pengusaha bunga tersebut.

Setiap enam bulan, seorang pemilik usaha tanaman hias memesan tanaman hias dari agen besar; Aglaonema (A) dan Sansevieria (S) yang berturut-turut memberi laba sebesar Rp5.000.000,00 dan Rp3.500.000,00 per unit yang terjual. Dibutuhkan waktu yang cukup lama untuk menghasilkan satu tanaman hias dengan kualitas super. Oleh karena itu agen besar memiliki aturan bahwa setiap pemesanan tanaman hias A paling sedikit 20% dari seluruh pesanan tanaman hias lain. Pemilik usaha tanaman hias memiliki lahan yang hanya cukup untuk 10 tanaman hias A saja atau 15 tanaman hias S. Dalam keadaan demikian, berapa banyak tanaman hias A dan S sebaiknya dipesan (per semester) jika diketahui bahwa pada akhir semester tanaman hias lama pasti habis terjual dan pemilik usaha tersebut ingin memaksimumkan laba total?

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan kita dalam membahas masalah ini,

misalkan x : banyak tanaman hias A yang dipesan

y : banyak tanaman hias S yang dipesan.

Pernyataan ”Oleh karena itu agen besar memiliki aturan bahwa setiap pemesanan tanaman hias A paling sedikit 20% dari seluruh pesanan tanaman hias lain”, dapat dituliskan sebagai berikut.

$$x \geq \frac{1}{5}(x+y) \text{ atau } 4x - y \geq 0.$$

Untuk memperoleh laba, pemilik harus mempertimbangan keterbatasan lahan sebagai daya tampung untuk tiap-tiap tanaman hias.

Misal, L : luas kebun tanaman hias,

L_x : luas kebun yang diperlukan untuk 1 tanaman hias A,

L_y : luas kebun yang diperlukan untuk 1 tanaman hias S.

Sesuai keterangan pada masalah di atas, luas kebun hanya dapat menampung 10 tanaman hias A atau 15 tanaman hias S. Pernyataan ini, dimodelkan sebagai berikut:

$$L_x = \frac{1}{10}L \text{ dan } L_y = \frac{1}{15}L$$

Tentu luas kebun yang diperlukan untuk x banyak tananam hias A dan y banyak tanaman hias S tidak melebihi luas kebun yang ada. Oleh karena itu, dapat dituliskan;

$$x.\left(\frac{1}{10}L\right)+y.\left(\frac{1}{15}L\right)\le L \text{ atau } 3x+2y\le 30$$

Selanjutnya, pemilik kebun mengharapkan laba sebesar Rp5.000.000,00 dari 1 tanaman hias A yang terjual dan Rp3.500.000,00 dari 1 tanaman hias S yang terjual. Oleh karena itu, untuk sebanyak x tanaman hias A yang terjual dan sebanyak y tanaman hias S yang terjual, dapat dituliskan sebagai laba total pemilik kebun; yaitu:

$$Z = 5x + 3.5y \text{ (dalam juta rupiah).}$$

Jadi secara lengkap, model matematika masalah program linear pemilik kebun tanaman hias dinyatakan sebagai berikut.

Menentukan x dan y yang memenuhi kendala:

$$\begin{cases} 4x-y\ge 0 \\ 3x+2y\le 30 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

Dengan fungsi tujuan:

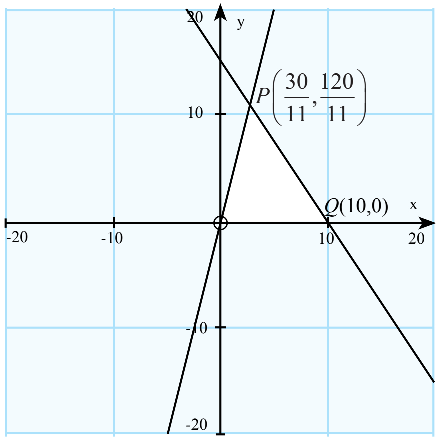
Maksimumkan: $Z = 5x + 3.5y$ (dalam juta rupiah).

Selanjutnya, kita akan menentukan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear (1). Tentunya, diharapkan keterampilan kamu dalam menggambarkan daerah penyelesaian sistem tersebut sudah makin meningkat. Sekaligus juga, kamu harus makin terampil dalam memilih titik dalam daerah penyelesaian untuk menentukan nilai maksimum fungsi sasaran.

Mari kita cermati gambar berikut ini.

Bersama dengan siswa, Guru menginterpresentasikan makna titik $P\left(2\frac{8}{11},10\frac{10}{11}\right)$ dalam konteks masalah yang dikaji.

Ingatkan siswa bahwa hasil yang diperoleh dari perhitungan matematika harus memiliki makna dalam kehidupan sehari-hari.

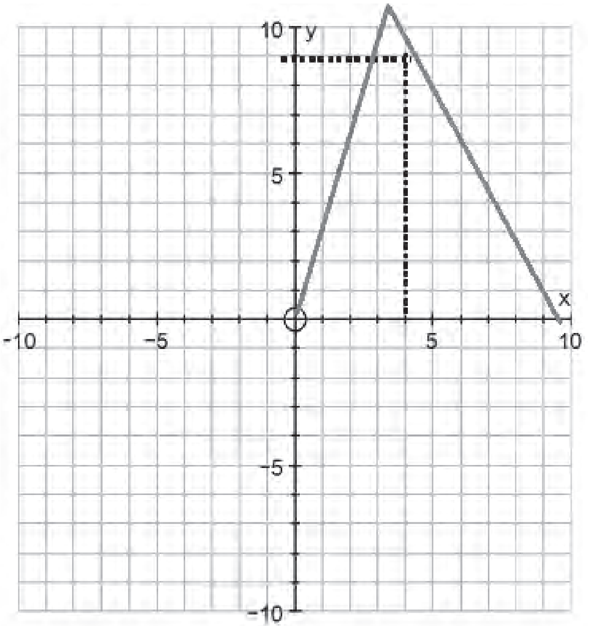


Gambar 1.7: Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (1.1)

Namun, pada kenyataannya, ditemukannya titik $P\left(\frac{30}{11},\frac{120}{11}\right)$ sebagai titik optimum masalah di atas mengakibatkan hal yang tidak mungkin terjadi untuk menemukan $2\frac{8}{11}$ tanaman hias A dan $10\frac{10}{11}$ tanaman hias S. Cara yang mungkin diterapkan adalah dengan metode pembulatan.

Mari kita cermati hasil pembulatan (ke atas atau ke bawah) titik $P\left(2\frac{8}{11},10\frac{10}{11}\right)$

i P_1 (2,10) : ternyata di luar daerah penyelesaian *OPQ*.
ii P_2 (2,11) : ternyata di luar daerah penyelesaian *OPQ*.
iii P_3 (3,10) : merupakan titik di daerah penyelesaian, tetapi nilai *Z* pada titik (3, 10) hanya sebesar Rp50.000.000,00, memiliki selisih sebesar Rp1.800.000,00 dengan nilai optimum di titik *P*.
iv P_4 (3,11) : ternyata di luar daerah penyelesaian *OPQ*.



Gambar 1.8: Titik (x,y) yang terdapat di daerah penyelesaian OPQ

Dalam kertas berpetak, di dalam daerah penyelesaian cermati titik-titik yang dekat dengan titik $P\left(2\frac{8}{11}, 10\frac{10}{11}\right)$. Tetapi titik yang kita inginkan, yaitu (x, y) harus untuk x dan y merupakan bilangan bulat.

Titik (4,9) merupakan titik yang terdekat dengan titik $P\left(2\frac{8}{11}, 10\frac{10}{11}\right)$ dan x dan y merupakan bilangan bulat dan mengakibatkan nilai optimum fungsi tujuan bernilai Rp51.500.000,00.

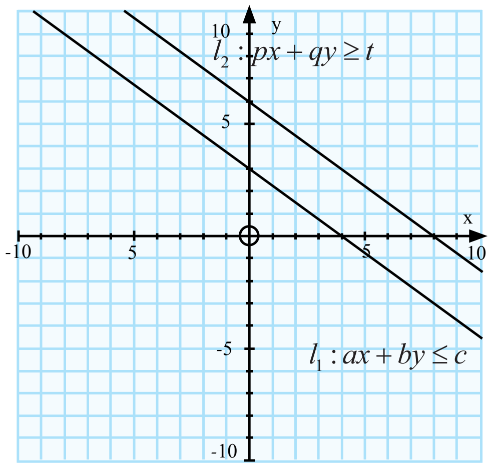
Dari beberapa masalah yang telah dibahas di atas, masalah program linear memiliki nilai optimum (maksimum atau minimum) terkait dengan eksistensi daerah penyelesaian. Oleh karena itu terdapat tiga kondisi yang akan kita selidiki, yaitu:

Motivasi siswa untuk mengajukan ide-ide atau masalah program linear yang pernah dihadapi mereka dalam kehidupan sehari-hari mereka. Jika ada, ajak siswa untuk menyelesaikannya.

1. tidak memiliki daerah penyelesaian
2. memiliki daerah penyelesaian (fungsi sasaran hanya memiliki nilai maksimum atau hanya memiliki nilai minimum)
3. memiliki daerah penyelesaian (fungsi sasaran memiliki nilai maksimum dan minimum).

1. Tidak memiliki daerah penyelesaian

Pastikan siswa memahami Gambar 1.8, melalui pertanyaan-pertanyaan menantang kepada siswa. Misalnya, selidiki syarat yang dipenuhi sistem:
$px + qy \geq t$; $ax + by \leq c$
Agar memeliki daerah penyelesaian.



Gambar 1.8

Mari kita cermati, grafik berikut ini.

Diberikan sistem:

$$\begin{cases} ax + by \leq c; \ a \neq 0, \quad b \neq 0 \\ px + qy \geq t; p \neq 0, \quad q \neq 0 \end{cases}$$

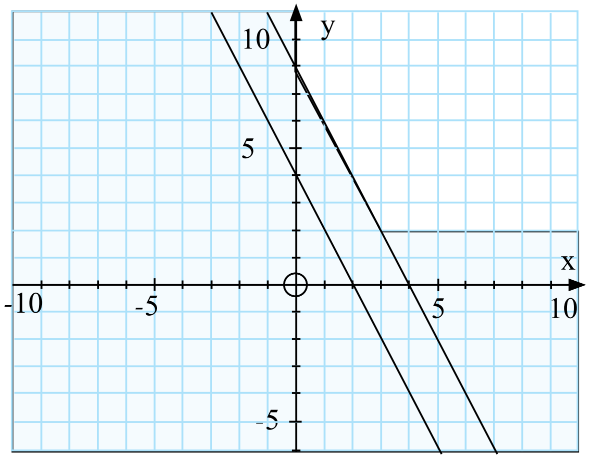
Untuk setiap

a, b, c, p, q dan $t \in R$

➢ Selidiki hubungan antar koefisien variabel (x dan y) serta konstanta c dan t pada sistem tersebut, hingga kamu menemukan syarat bahwa suatu sistem pertidaksamaan linear tidak memiliki daerah penyelesaian.

2. **Memiliki daerah penyelesaian (fungsi sasaran hanya memiliki nilai maksimum atau hanya memiliki nilai minimum).**

Grafik berikut ini, mendeskripsikan bahwa walaupun kendala suatu program linear memiliki daerah penyelesaian, ternyata belum tentu memiliki nilai fungsi sasaran. Mari kita cermati.



Gambar 1.9

3. **Memiliki daerah penyelesaian (fungsi sasaran memiliki nilai maksimum dan minimum).**

Pertidaksamaan:

$$\begin{cases} 2x-3y+12 \geq 0 \\ 3x+2y-12 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

merupakan kendala yang bersesuaian dengan grafik daerah penyelesaian pada Gambar 1.10 di bawah ini.

Guru memberikan kesempatan kepada siswa untuk meningkatkan keterampilan siswa dalam menentukan sistem pertidaksamaan linear yang bersesuaian dengan daerah penyelesaian pada Gambar 1.9

Dengan menggunakan garis selidik, Guru mengajak siswa menentukan nilai fungsi sasaran: $Z = mx + ny$; $m, n \in R^+$.

Guru mengajukan pertanyaan kepada siswa, untuk m,n bilangan real, berapa nilai maksimum fungsi sasaran? Sedangkan untuk nilai minimum siswa, Guru mengajukan pertanyaan kepada siswa, yang mana dari berikut ini yang nilainya paling kecil:

i. 10 m, atau

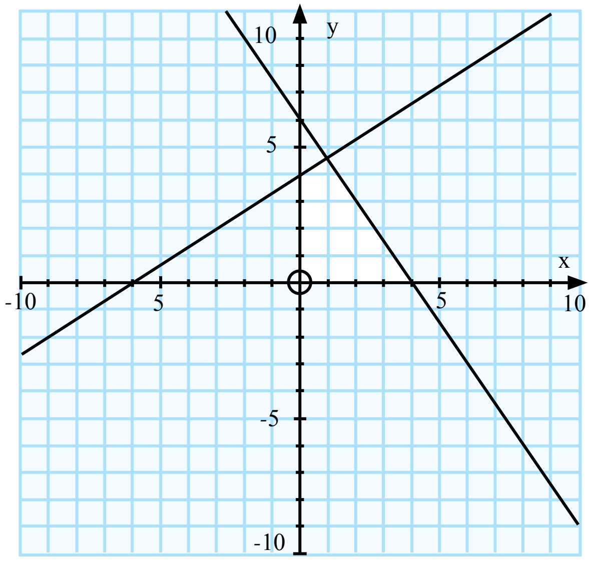
ii. 3m+2n

Untuk m, n bilangan riel positif.

a. Maksimumkan:
$Z = mx + ny$; $m, n \in R^+$.

b. Minimumkan:
$Z = mx + ny$; $m, n \in R^+$.

Pastikan siswa menemukan perbedaan daerah penyelesaian terbatas (Gambar 1.10) dan daerah penyelesaian tak terbatas (Gambar 1.9) dengan mengajukan pertanyaan-pertanyaan, misalnya:
Apakah daerah penyelesaian tak terbatas memiliki nilai fungsi sasaran maksimum? Berikan penjelesan.



Gambar 1.10

Misalnya, diberikan fungsi sasaran berikut ini:

a) Maksimumkan:
$Z = 3x + 2y$

b) Minimumkan:
$Z = 3x + 2y$.

Garis $k = 3x + 2y$ merupakan garis selidik digunakan untuk menentukan nilai fungsi sasaran. Pada titik (0, 4) diperoleh garis selidik: $8 = 3x + 2y$, dan pada titik (3, 4) diperoleh garis selidik: $17 = 3x + 2y$. Akibatnya untuk menentukan nilai minimum fungsi sasaran, garis selidik digeser ke arah kiri dan untuk menentukan nilai maksimum fungsi sasaran garis selidik digeser ke arah ke kanan. Dengan demikian, nilai minimum fungsi sasaran; $Z = 0$, dan nilai maksimum fungsi sasaran; $Z = 21$.

Latihan

Diketahui sistem pertidaksamaan linear suatu masalah program linear.

$$\begin{cases} ax+by(\geq,\leq)c; a\neq 0, b\neq 0 & (1)\\ px+qy(\geq,\leq)t; p\neq 0, q\neq 0 & (2)\\ \quad x\geq 0 \\ \quad y\geq 0 \end{cases}$$

a, b, c, p, q dan t merupakan bilangan real, dan $c < t$.

Dengan memperhatikan hubungan koefisien variabel (x dan y) pada kendala (1) dan (2), selidiki syarat agar sistem pertidaksamaan linear tersebut:

i. tidak memiliki daerah penyelesaian;
ii. memiliki daerah penyelesaian
iii. memiliki daerah penyelesaian berupa suatu garis atau segmen garis
iv. memiliki daerah penyelesaian hanya satu titik.

Untuk memantapkan pengetahuan dan keterampilan siswa, guru meminta siswa untuk mengerjakan Latihan 1.

Alternatif Penyelesaian

Misal, kita tanda pertidaksamaan " ≥" yang digunakan pada sistem pertidaksaamaan, sehingga diperoleh:

$ax + by \geq c$

$px + qy \geq t$

$x \geq 0; y \geq 0.$

Dengan demikian kita dapat menggunakan konsep garis lurus yang telah dipelajari pada kelas VIII SMP.

i. Misalkan:

$l_1 : ax + by = c$ dan $l_2 : px + qy = t$.

Gradien l_1, dan gradien l_2,

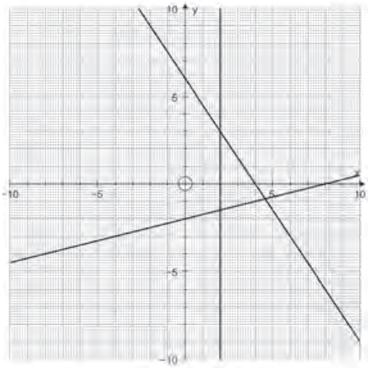
Jika l_1 sejajar l_2 artinya kedua garis tersebut tidak pernah melalui titik yang sama, atau dituliskan maka $m_1 = m_2$.

Berarti, $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ atau $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$.

Jadi, untuk sistem pertidaksamaan linear di atas, jika $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$, maka sistem tersebut tidak memiliki daerah penyelesaian. Hal ini juga sudah dideskripsikan pada Gambar 1.8.

Jika siswa mengalami kesulitan menyelesaikan soal latihan, berikan petunjuk kepada siswa bahwa teori tentang sistem persamaan dan pertidaksamaan linear yang mereka pelajari pada Bab 3 Kelas 10 SMA dan konsep garis lurus yang dipelajari pada kelas VIII SMP dapat digunakan.

ii. Selanjutnya, jika $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$, maka garis l_1 : $ax + by = c$ dan l_2 : $px + qy = t$ memiliki titik potong. Dengan adanya syarat tambahan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ mengakibatkan terdapat daerah yang dibatasi oleh titik potong garis l1 dan l2. Kondisi ini disajikan pada gambar berikut ini.



iii. Jika dua garis linear berimpit, maka kedua garis tersebut melalui titik yang tak hingga banyaknya. Dengan demikian, mari kita selidiki hubungan koefisien antar garis.

Garis l_1 : $ax + by = c$ berimpit dengan garis l_2 : $px + qy = t$ jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{t}$.

Uji Kompetensi 1.2

1. Sebuah perusahaan akan membeli paling sedikit 8 mesin untuk perluasan pabriknya. Harga mesin baru Rp15.000.000,00 per unit. Selain itu dapat juga dibeli mesin bekas dengan umur dua tahun, tiga tahun, dan empat tahun yang harganya diukur dari harga baru akan susut Rp3.000.000,00 per tahunnya. Keempat jenis mesin di atas, yaitu baru, umur dua tahun, umur tiga tahun, umur empat tahun mempunyai ukuran yang berbeda-beda, berturut-turut memerlukan tempat 3 meter persegi, 4 meter persegi, 5 meter persegi, dan 6 meter persegi per unitnya. Sedangkan ongkos perawatannya berturut-turut 0, Rp1.000.000,00, Rp2.000.000,00, dan Rp4.000.000,00 per tahunnya Bila tempat yang tersedia untuk semua mesin yang dibeli tersebut hanya 35 meter persegi dan ongkos perawatan total yang disediakan hanya Rp7.000.000,00 per tahun, bentuk model matematika masalah program linear perusahaan tersebut.

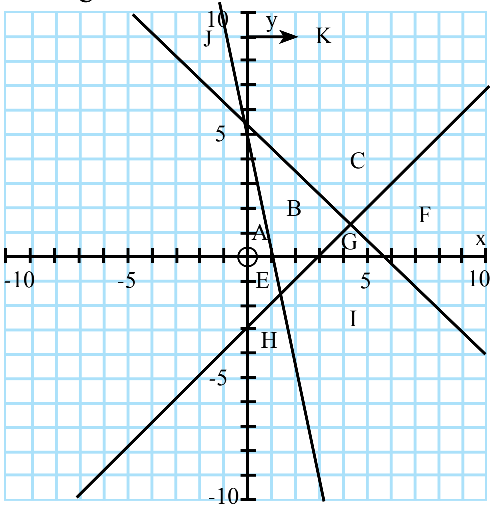
2. Alkohol dapat dihasilkan dari 3 macam buah-buahan, A, P dan V yang dapat diolah dengan 2 macam proses, misalnya A_1: buah A diolah menurut cara -1, dan A_2 : buah A diolah dengan cara-2, dan seterusnya. Berturut-turut A_1, A_2, P_1, P_2, V_1, V_2 dapat menghasilkan alkohol sebanyak 3%; 2,5%; 3,5%; 4%; 5%; dan 4,5% dari buah sebelumnya. Kapasitas mesin adalah 1 ton buah-buahan per hari dan selalu dipenuhi. Pemborong yang memasok buah A hanya mau melayani jika paling sedikit 600 kilogram per hari. Sebaliknya buah P dan V masing-masing hanya dapat diperoleh paling banyak 450 kilogram per hari.
   Buatlah model matematika masalah di atas!

3. Untuk melayani konferensi selama 3 hari harus disediakan serbet makanan. Untuk hari ke-1, -2, -3 berturut-turut diperlukan 50, 80, 70 helai serbet

makanan. Harga beli yang baru Rp 1.200 sehelai, ongkos mencucikan kilat (satu malam selesai) Rp 800 per helai, cucian biasa (satu hari satu malam selesai) Rp 200 per helai. Untuk meminimumkan biaya pengadaan serbet, berapa helai serbet yang harus dibeli, berapa helai serbet bekas hari ke-1 harus dicuci kilat (untuk hari ke-2) dan berapa helai serbet bekas hari ke-2 harus dicuci kilat (untuk hari ke-3)?
Buatlah model matematika masalah di atas!

4. Sebuah peternakan unggas mempunyai kandang-kandang untuk 600 ekor yang terdiri dari ayam (A), itik (I), dan mentok (M). Kapasitas maksimum kandang selalu dipenuhi. Pemilik menginginkan banyak itik tidak melebihi 400 ekor, demikian pula mentok paling banyak 300 ekor. Ongkos pemeliharaan sampai laku terjual untuk A, I, M berturut-turut 3500, 2500, dan 6000 rupiah per ekor. Harga jual A, I, M, berturut-turut adalah 7.000, 5.500 dan 10.500 rupiah per ekornya. Rumuskan model matematika program beternak yang memaksimumkan keuntungan jika keuntungan adalah selisih harga jual dari ongkos pemeliharaan. (Dalam masalah di atas dianggap tidak ada ongkos pembelian).

5. Perhatikan gambar di bawah ini.



Tentukan sistem pertidaksamaan yang memenuhi jika setiap label daerah merupakan daerah penyelesaian.

6. Tentukanlah suatu sistem pertidaksamaan yang memenuhi setiap daerah penyelesaian penyelesaian berikut ini.
   a) berbentuk segitiga sama sisi di kuadran pertama
   b) berbentuk trapesium di kuadran kedua
   c) berbentuk jajaran genjang di kuadran keempat

7. Gambarkan daerah penyelesaian untuk setiap kendala masalah program linear berikut ini.
   a) $x - 4y \leq 0$; $x - y2$; $-2x + 3y \leq 6$; $x \leq 10$
   b) $x + 4y \leq 30$; $-5x + y \leq 5$; $6x - y \geq 0$; $5x + y \leq 50$; $x - 5y \leq 0$
   c) $x + 4y \leq 30$; $-5x + y \leq 5$; $6x - y \geq 0$; $5x + y \leq 50$; $x - 5y \leq 0$

8. Pesawat penumpang mempunyai tempat duduk 48 kursi. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi maksimum 60 kilogram sedangkan kelas ekonomi maksimum 20 kg. Pesawat hanya dapat membawa bagasi maksimum 1440 kg. Harga tiket kelas utama Rp150.000,00 dan kelas ekonomi Rp100.000,00. Supaya pendapatan dari penjualan tiket pada saat pesawat penuh mencapai maksimum, tentukan jumlah tempat duduk kelas utama. (UMPTN Tahun 2000 Rayon A).

9. Seorang agen perusahaan alat elektronik rumah tangga menjual kulkas ke suatu pusat perbelanjaan. Pada bulan Juli, 25 unit kulkas terjual. Untuk tiga bulan berikutnya, setiap agen membeli 65 kulkas per bulan dari pabrik, dan mampu menjual hingga 100 unit per bulan dengan rincian harga sebagai berikut:

Kulkas	Harga Beli ($)	Harga Jual ($)
Agustus	60	90
September	65	110
Oktober	68	105

Agen menyimpan 45 unit kulkas tetapi harus membayar $7/unit/bulan dan akan dijual pada bulan berikutnya. Tentukan nilai optimum pembelian, penjualan dan biaya penyimpanan kulkas tersebut.

10. Perhatikan masalah program linear berikut ini:
    a) Tentukan nilai minimum dari $3x + 4y$ dengan kendala:
    $x \geq 1$; $y \geq 2$; $x + y \leq 6$, dan $2x + 3y \leq 15$
    b) Tentukan interval nilai $Z(x, y) = y - 2x + 2$ dengan kendala:
    $x \geq 0$; $y \geq 0$; $2x + 5y \leq 10$, dan $4x + 3y \leq 12$

11. Tentukan titik yang mengakibatkan fungsi linear $f(x,y)$ $2x - y - 4$ bernilai optimum (maksimum atau minimum) jika daerah asal dibatasi sebagai berikut $1 \leq x \leq 1$; $-1 \leq y \leq 1$. (Periksa nilai fungsi di beberapa titik daerah asal dan periksa bahwa nilai optimum tercapai pada suatu titik sudut daerah asal).

Projek

Setiap manusia memiliki keterbatasan akan tenaga, waktu, dan tempat. Misalnya, dalam aktivitas belajar yang kamu lakukan setiap hari tentu kamu memiliki keterbatasan dengan waktu belajar di rumah, serta waktu yang kamu perlukan untuk membantu orang tuamu. Di sisi lain, kamu juga membutuhkan waktu yang cukup untuk istirahat setelah kamu melalukan aktivitas belajar dan aktivitas membantu orang tua.

Dengan kondisi tersebut, rumuskan model matematika untuk masalah waktu yang kamu perlukan setiap hari, hingga kamu dapat mengetahui waktu istirahat yang peroleh setiap hari (minggu).

Selesaikan proyek di atas dalam waktu satu minggu.

Susun hasil kinerja dalam suatu laporan, sehingga kamu, temanmu dan gurumu dapat memahami dengan jelas.

Guru memberikan tugas proyek kepada siswa sebagai berikut.

D. PENUTUP

Beberapa hal penting yang perlu dirangkum terkait dengan konsep dan sifat-sifat program linear.

1. Masalah dalam kehidupan sehari-hari menjadi model suatu program linear. Konsep program linear didasari oleh konsep persamaan dan pertidaksamaan bilangan real, sehingga sifat-sifat persamaan linear dan pertidaksamaan linear dalam sistem bilangan real banyak digunakan sebagai pedoman dalam menyelesaikan suatu masalah program linear.

2. Model matematika merupakan cara untuk menyelesaikan masalah real yang dikaji. Pembentukan model tersebut dilandasi oleh konsep berpikir logis dan mampu menalar keadaan masalah nyata ke bentuk matematika.
3. Dua pertidaksamaan linear atau lebih dikatakan membentuk kendala program linear linear jika dan hanya jika variabel-variabelnya saling terkait dan variabel yang sama memiliki nilai yang sama sebagai penyelesaian setiap pertidaksamaan linear pada sistem tersebut. Sistem pertidaksamaan ini disebut sebagai kendala.
4. Fungsi tujuan/sasaran (fungsi objektif) merupakan tujuan suatu masalah program linear, yang juga terkait dengan sistem pertidaksamaan program linear.
5. Nilai-nilai variabel (x, y)yang memenuhi kendala pada masalah program linear ditentukan melalui konsep perpotongan dua garis, sedemikian sehingga memenuhi setiap pertidaksamaan yang terdapat pada kendala program linear.
6. Suatu fungsi objektif terdefinisi pada suatu daerah penyelesaian atau daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan (kendala) masalah program linear. Fungsi objektif memiliki nilai jika sistem kendala memiliki daerah penyelesaian atau irisan.
7. Konsep sistem pertidaksamaan dan persamaan linear berlaku juga untuk sistem kendala masalah program linear. Artinya jika sistem tersebut tidak memiliki solusi, maka fungsi sasaran tidak memiliki nilai.
8. Garis selidik merupakan salah satu cara untuk menentukan nilai objektif suatu fungsi sasaran masalah program linear dua variabel. Garis selidik ini merupakan persamaan garis fungi sasaran, $ax + by = k$, yang digeser di sepanjang daerah penyelesaian

Bab 2

MATRIKS

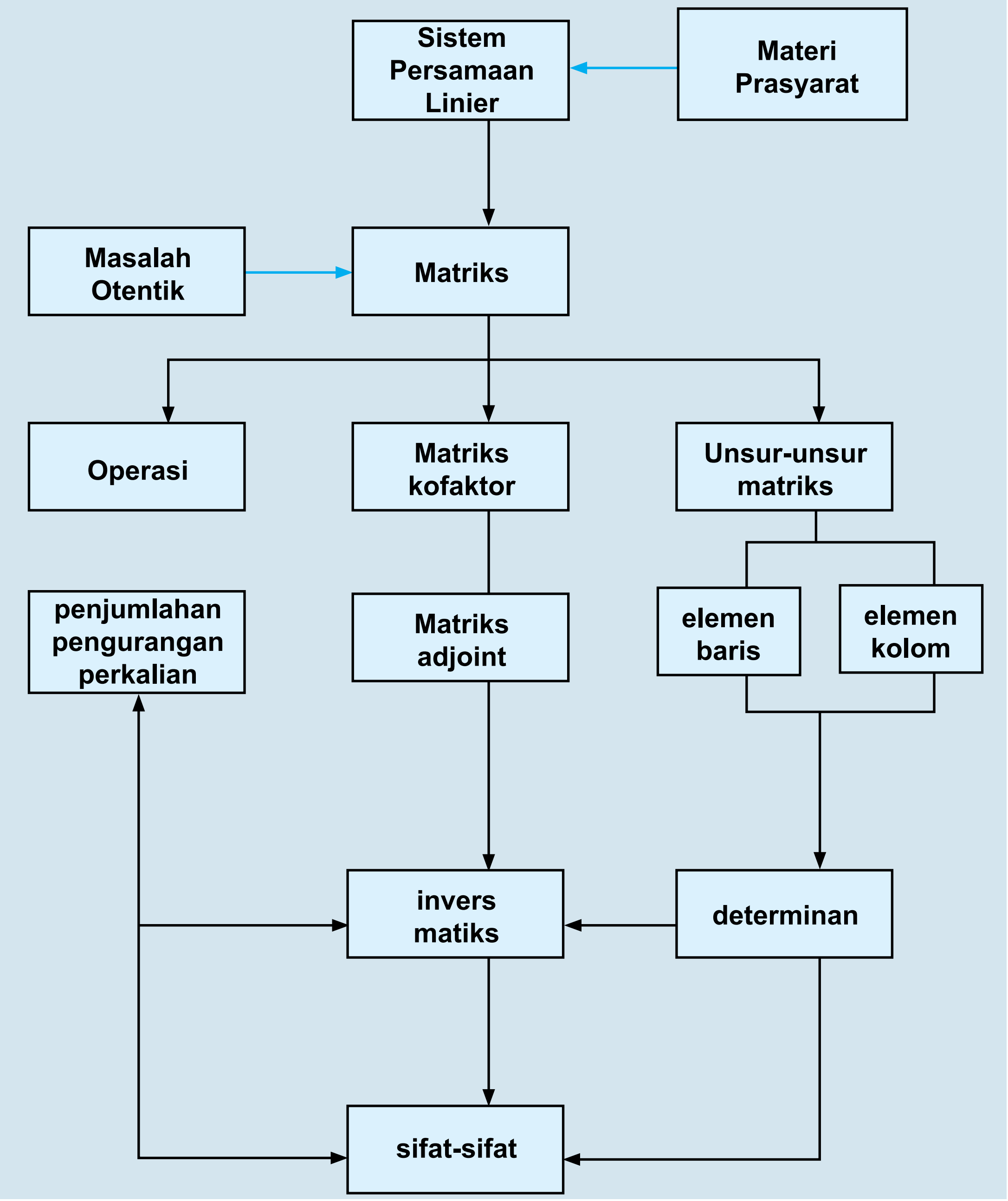
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Mendeskripsikan dan menganalisis konsep dasar operasi matriks dan sifat-sifat operasi matriks serta menerapkannya dalam pemecahan masalah. 3. Memadu berbagai konsep dan aturan operasi matriks dan menyajikan model matematika dari suatu masalah nyata dengan memanfaatkan nilai determinan atau invers matriks dalam pemecahannya.	Melalui pembelajaran materi matriks, siswa memperoleh pengalaman belajar: • mengamati secara cermat aturan susunan objek. • berpikir mandiri mengajukan ide secara bebas dan terbuka. • menemukan hubungan-hubungan di antara objek-objek. • melatih berpikir kritis dan kreatif. • bekerjasama menyelesaikan masalah.

Istilah Penting

- *Operasi pada matriks*
- *Determinan matriks*
- *Invers matriks*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Operasi Pada Matriks Dan Sifat-Sifatnya

Saat duduk di kelas X, kamu telah mempelajari konsep matriks, jenis dan operasi pada matriks yang ditemukan dari berbagai masalah nyata disekitar kehidupan kita. Pada kesempatan ini, kita akan menganalisis sifat-sifat operasi pada matriks dan menggunakannya dalam pemecahan masalah otentik. Amatilah dengan cermat berbagai informasi dan masalah yang diajukan dan temukan sifat-sifat operasi matriks di dalam langkah pemecahan masalah yang diajukan.

a. Operasi Penjumlahan Matriks dan Sifat-sifatnya

Masalah-2.1

Dua orang bersaudara laki-laki dan perempuan membuka dua cabang toko kue di Padang dan di Medan. Toko kue itu menyediakan 2 jenis kue, yaitu; bronis dan bika ambon. Biaya untuk bahan ditangani oleh saudara perempuan dan biaya untuk chef ditangani oleh saudara laki-laki. Biaya untuk tiap-tiap kue seperti pada tabel berikut:

Tabel Biaya Toko di Padang (dalam Rp)

	Bronis	Bika Ambon
Bahan Kue	1.000.000	1.200.000
Chef	2.000.000	3.000.000

Tabel Biaya Toko di Medan (dalam Rp)

	Bronis	Bika Ambon
Bahan Kue	1.500.000	1.700.000
Chef	3.000.000	3.500.000

Berapa total biaya yang diperlukan oleh kedua toko kue?

Banyak permasalahan dalam kehidupan yang penyelesaiannya terkait dengan konsep dan aturan-aturan dalam matema-tika. Secara khusus keterkaitan konsep dan prinsip-prinsip matriks dengan permasalahan masalah nyata yang menyatu/ bersumber dari fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep matriks dapat dibangun/ ditemukan di dalam penyelesaian permasalahan yang kita hadapi. Untuk itu arahkan siswa menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diberikan.

Orientasi Masalah 2.1 kepada siswa. Beri kesempatan kepada siswa menganalisis dan melahirkan berbagai pertanyaan sekitar masalah. Meminta siswa mengamati data bahan dan harga pembuatan dua jenis kue yang tertera pada tabel. Ingatkan kembali pengetahuan yang sudah miliki siswa tentang matriks untuk membangun model matriks dari data yang tersedia.

Alternatif Penyelesaian

Jika kita misalkan matriks biaya di Padang, sebagai matriks A dan matriks biaya di Medan sebagai matriks B, maka matriks biaya kedua toko disajikan sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 1000000 & 1200000 \\ 2000000 & 3000000 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1500000 & 1700000 \\ 3000000 & 3500000 \end{pmatrix}.$$

Total biaya yang dikeluarkan kedua toko kue tersebut dapat diperoleh, sebagai berikut.

Bantu siswa melakukan perhitungan menentukan total biaya bahan untuk semua jenis kue.

- Total biaya bahan untuk bronis = 1.000.000 + 1.500.000 = 2.500.000
- Total biaya bahan untuk bika ambon = 1.200.000 + 1.700.000 = 2.900.000
- Total biaya *chef* untuk bronis = 2.000.000 + 3.000.000 = 5.000.000
- Total biaya *chef* untuk bika ambon = 3.000.000 + 3.500.000 = 6.500.000

Keempat total biaya tersebut dinyatakan dalam matriks berikut:

Tabel Biaya Toko di Medan (dalam Rp)

	Bronis	Bika Ambon
Bahan Kue	2.500.000	2.900.000
Chef	5.000.000	6.500.000

Total biaya pada tabel di atas dapat ditentukan dengan menjumlahkan matriks A dan B.

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 1000000 & 1200000 \\ 2000000 & 3000000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1500000 & 1700000 \\ 3000000 & 3500000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1000000+1500000 & 1200000+1700000 \\ 2000000+3000000 & 3000000+3500000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2500000 & 2900000 \\ 5000000 & 6500000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Penjumlahan kedua matriks biaya di atas dapat dioperasikan karena kedua matriks biaya memiliki ordo yang sama, yaitu 2 × 2. Seandainya ordo kedua matriks biaya tersebut berbeda, kita tidak dapat melakukan penjumlahan dua matriks.

Nah, melalui pembahasan di atas, tentunya dapat didefinisikan penjumlahan dua matriks dalam konteks matematis.

Meminta siswa secara kelompok menuliskan syarat penjumlahan dua matriks berdasarkan proses penjumlahan matriks biaya pada A dan B, serta menuliskan pengertian operasi penjumlahan dua buah matriks. Uji pemahaman siswa terhadap persyaratan dua matriks dapat dijumlahkan

Definisi 2.1

Misalkan *A* dan *B* adalah matriks berordo *m* x *n* dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}. Matriks *C* adalah jumlah matriks *A* dan matriks *B*, ditulis *C*=*A*+*B*, dengan elemen-elemen ditentukan oleh $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (untuk semua *i* dan *j*).

Catatan:

Dua matriks dapat dijumlahkan hanya jika memiliki ordo yang sama. Ordo matriks hasil penjumlahan dua matriks sama dengan ordo matriks yang dijumlahkan.

Ajukan beberapa contoh berikut, minta siswa menerapkan aturan penjumlahan dua matriks. Ingatkan kembali pengetahuan yang sudah dimiliki sebelumnya tentang pengertian dua matriks yang sama, agar siswa dapat menentukan nilai x dan y.

Matriks A dan B di katakan sama apabila ordo kedua matriks sama dan setiap entri pada baris dan kolom yang sama dari kedua matriks bernilai sama.

Contoh 2.1

a). Jika diketahui matriks $P=\begin{bmatrix} x & 2 & 4 \\ 1 & x-7 & 5 \end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & y & 1 \end{bmatrix}$ dan

$P+Q=\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ Tentukan nilai x dan y!

Jika dimisalkan $R = P + Q$, maka jumlah matriks P dan Q adalah

$$R=\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P+Q=\begin{bmatrix} x+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & x-7+y & 5+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 4.2 Bab IV yang sudah dipelajari di Kelas X SMA, tentang kesamaan dua matriks, diperoleh

$x + 2 = 12$ atau $x = 10$

$x - 7 + y = 3$ atay $10 - 7 + y = 3$ atau $y = 0$

Jadi diperoleh nilai $x = 10$ dan $y = 0$

Beri bantuan pada siswa, bahwa matriks O adalah matriks identitas penjumlahan ordo 3×3. Sebarang matriks A, jika dijumlahkan dengan matriks identitas, maka hasilnya adalah matriks A.

b). Diketahui matriks $T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$. Tunjukkan bahwa $T + 0 = T$ dan $0 + T = T$ dengan 0 adalah matriks nol berordo 3×3.

- $T + O = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6+0 & 3+0 & 1+0 \\ 5+0 & 5+0 & 0+0 \\ 1+0 & 3+0 & 7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T$$

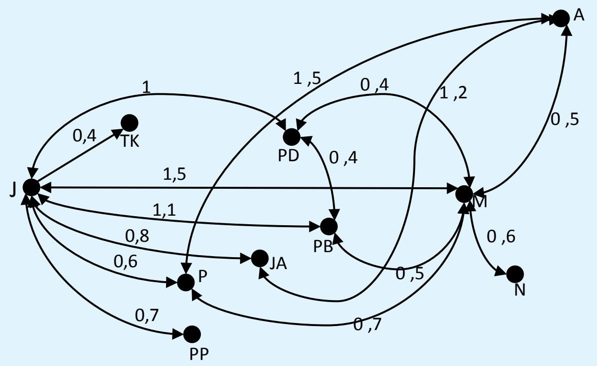
- $O + T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+6 & 0+3 & 0+1 \\ 0+5 & 0+5 & 0+0 \\ 0+1 & 0+3 & 0+7 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T$$

Dalam kajian selanjutnya, jika dikatakan matriks nol, maka kita harus memikirkan matriks nol dengan ordo yang sama dengan matriks yang sedang dikaji. Demikian juga halnya untuk matriks identitas, I.

Masalah-2.2

Cermati skema penerbangan salah satu jenis pesawat dari Bandara Soekarno Hatta Jakarta ke berbagai kota yang ada di Pulau Sumatera yang disajikan sebagai berikut.



Gambar 2.1 : Lintasan Penerbangan Pesawat Antar Dua Kota

a) Sajikan lintasan pesawat dalam bentuk matriks A = (a_{ij}), dengan elemen a_{ij} menyatakan adanya lintasan penerbangan yang langsung antar dua kota.

b) Sajikan biaya penerbangan dalam bentuk matriks B = (b_{ij}), dengan bij menyatakan biaya penerbangan antar dua kota. Selanjutnya tentukan biaya penerbangan yang paling rendah dari kota Jakarta (J) ke kota Aceh (A) dengan bobot biaya penerbangan yang tersedia dalam juta rupiah!

c) Jika matriks pada bagian a) dikalikan dengan dirinya sendiri, apa yang dapat kamu simpulkan dari unsur-unsur matriks tersebut?

Mengajak siswa mengaplikasikan konsep matriks dalam menentukan lintasan terpendek dari sebuah penerbangan ditinjau dari segi harga tiket yang tersedia. Arahkan siswa belajar dalam kelompok untuk mengamati data harga tiket penerbangan dan lintasan yang dilalui pesawat dari bandara ke bandara berikutnya. Minta siswa membangun model matriks yang menyatakan ketersediaan penerbangan dari bandara Soekarno Hatta menuju kota di Sumatera Utara. Cermatilah skema penerbangan di samping.

Alternatif Penyelesaian

Bagian a)

Kata kunci pada persoalan ini adalah adanya lintasan antar dua kota, secara matematis, fungsi lintasan antar dua kota tersebut, dinyatakan sebagai berikut:

Minta siswa mengidentifikasi seluruh penerbangan dari kota jakarta ke kota di Sumatera yang dilengkapi dengan panjang lintasan dan harga *tiket. Bantu siswa untuk mendefinisikan ada tidaknya penerbangan dari suatu kota ke kota lainnya. Selanjutnya menyusun sebuah matriks ada tidaknya lintasan penerbangan pesawat antar dua kota.*

Dari hasil pengamatan lintasan penerbangan pesawat pada skema di atas, diperoleh data sebagai berikut:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{untuk} \quad i = j \\ 1, & \text{untuk} \quad i \neq j \end{cases}$$

i) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Jakarta (J) ke kota yang lain adalah 7 lintasan, yaitu dari Jakarta ke Tanjung Karang (TK); dari Jakarta ke Palembang (P); dari Jakarta ke Pangkal Pinang (PP); dari Jakarta ke Jambi (JA), dari Jakarta ke Padang (PD), dari Jakarta ke Pekan Baru (PB), dan dari Jakarta ke Medan (M).

ii) Banyak lintasan penerbangan pesawat dari Tanjung Karang ke kota lain adalah 1 lintansan, yaitu dari Tanjung Karang (TJ) ke Jakarta (J).

iii) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Palembang (P) ke kota yang lain adalah 3 lintasan, yaitu dari Palembang (P) ke Jakarta (J); dari Palembang ke Aceh (A); dan dari Palembang (P) ke Medan (M).

iv) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Pangkal Pinang (PP) ke kota yang lain adalah 1 lintasan, yaitu dari Pangkal Pinang ke Jakarta.

v) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Jambi (JA) ke kota yang lain adalah 2 lintasan, yaitu dari Jambi (JA) ke Jakarta (J); dari Jambi (JA) ke Aceh (A).

vi) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Padang (PD) ke kota yang lain adalah 3 lintasan, yaitu dari Padang (PD) ke Jakarta (J); dari Padang (PD) ke Medan (M); dari Padang (PD) ke Pekan Baru (PB).

vii) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Pakam Baru (PB) ke kota yang lain adalah 3 lintasan, yaitu dari Pekan Baru (PB) ke Jakarta

(J); dari Pekan Baru (PB) ke Padang (PD); dan dari Pekan Baru (PB) ke Medan (M).

viii) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Medan (P) ke kota yang lain adalah 6 lintasan, yaitu dari Medan (M) ke Jakarta (J); dari Medan (M) ke Padang (PD); dari Medan (M) ke Pekan Baru (PB); dari Medan (M) ke Palembang (P); dari Medan (M) ke Aceh (A); dari Medan (M) ke Nias (N).

ix) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Aceh (A) ke kota yang lain adalah 3 lintasan, yaitu dari Aceh (A) ke Jakarta (J); dari Aceh (A) ke Medan (M); dari Aceh (A) ke Jambi (JA).

Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Nias (N) ke kota yang lain adalah 1 lintasan, yaitu dari Nias (N) ke Medan (M).

Dari data di atas, adanya lintasan penerbangan pesawat antar dua kota, dapat disajikan dalam sebuah matriks A berikut.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} J & TK & P & PP & JA & PD & PB & M & A & N \end{array} \\ \begin{array}{c} J \\ TK \\ P \\ PP \\ JA \\ PD \\ PB \\ M \\ A \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Perhatikan elemen matriks A di atas, jumlah elemen-elemen baris menyatakan banyaknya lintasan penerbangan dari kota pada baris matriks tersebut. Misalnya pada baris pertama matriks A, jumlah elemen matriks adalah 7, artinya ada 7 lintasan penerbangan dari Jakarta ke kota-kota yang lain pada gambar.

Meminta siswa mengamati kembali skema lintasan penerbangan di atas dan memikirkan penyajian biaya tiket dalam bentuk matriks, serta memikirkan mana lintasan terpendek dari Jakarta ke Aceh ditinjau dari segi harga tiket.

Bagian b)

Dari skema penerbangan di atas, biaya penerbangan antar dua kota yang terhubung langsung, dapat disajikan dalam sebuah matriks B berikut.

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} J & TK & P & PP & JA & PD & PB & M & A & N \end{array} \\ \begin{array}{c} J \\ TK \\ P \\ PP \\ JA \\ PD \\ PB \\ M \\ A \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 & 1 & 1{,}1 & 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 1{,}5 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 1{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & 0 & 1{,}2 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Perhatikan Gambar-2.1 dan Matriks B di atas, terdapat 8 cara (lintasan) penerbangan dari kota Jakarta (J) menuju kota Banda Aceh (A), yaitu:

i) Dari Jakarta menuju kota Medan dan dari Medan menuju Aceh dengan total biaya 2 juta Rupiah.

ii) Dari Jakarta menuju Pekan Baru, dari Pekan Baru menuju Medan dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 2,1 juta Rupiah.

iii) Dari Jakarta menuju Pekan Baru, dari Pekan Baru menuju Padang, dari Padang menuju Medan, dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 2,4 juta Rupiah.

iv) Dari Jakarta menuju Palembang, dari Palembang menuju Medan dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 1,8 juta Rupiah.

v) Dari Jakarta menuju Jambi, dan dari Jambi menuju Aceh, dengan total biaya 2 juta Rupiah.

vi) Dari Jakarta menuju Padang, dari Padang menuju Medan, dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 1,9 juta Rupiah.

vii) Dari Jakarta menuju Padang, dari Padang menuju Pekan Baru, dari Pekan Baru Menuju Medan dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 2,4 juta Rupiah.

viii) Dari Jakarta menuju Palembang, dari Palembang menuju Aceh, dengan total biaya 2,1 juta Rupiah.

Dari ke delapan lintasan dari Jakarta menuju Aceh, biaya terendah diperoleh melalui jalur Jakarta menuju Palembang, dari Palembang menuju Medan, dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 1,8 juta Rupiah.

Ingat kembali materi operasi penjumlahan matriks yang kamu sudah pelajari di kelas X, jika kita jumlahkan matriks B dengan dirinya sendiri diperoleh

$$B + B = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 & 1 & 1{,}1 & 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 1{,}5 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 1{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & 0 & 1{,}2 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 1 & 1,1 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 1,5 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 \\ 1,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0,4 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0,6 \\ 0 & 0 & 1,5 & 0 & 1,2 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B + B = 2.\begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 1 & 1,1 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 1,5 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 \\ 1,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0,4 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0,6 \\ 0 & 0 & 1,5 & 0 & 1,2 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan penjumlahan matriks $B + B$, tunjukkan pada siswa, bahwa $kB = B \times B \times B \times B \times \ldots \times B$ sebanyak k faktor, dengan $k \in N$.

$B + B = 2B$.

Makna elemen matriks $2B$ adalah biaya pulang pergi untuk penerbangan antar dua kota. Misalnya biaya penerbangan dari Jakarta menuju Medan, dan sebaliknya, biaya pulang pergi adalah 2 × 1,5 juta = 3 juta Rupiah.

$$\textit{Misalkan matriks } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{B+B+B+\ldots+B}_{8} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}}_{8}$$

$$8B = 8.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.2

Misalkan B sebuah matriks dengan ordo $n \times m$, $n \in N$. Hasilnya penjumlahan matriks B sebanyak k dengan $k \in N$ adalah $k\ B$, ditulis $\underbrace{B+B+B+\ldots+B}_{k} = k\,B$, dan matriks $k\ B$ berordo $n \times n$.

Mengajak siswa menemukan sifat penjumlahan dua matriks dari berbagai contoh dan masalah yang diajukan. Meminta siswa bekerjasama dalam kelompok untuk membuktikan sifat-sifat tersebut serta mempresentasikannya di depan kelas.

b. Sifat Komutatif Penjumlahan Dua Matriks

Masalah-2.3

Perhatikan masalah di bawah ini!
Di suatu pasar terdapat dua orang pedagang mangga, jenis buah yang dijual antara lain mangga dengan kualitas tinggi dan mangga dengan kualitas sedang. Pedagang satu memiliki 3 kg mangga kualitas tinggi dan 6 kg mangga kualitas sedang. Pedagang kedua memiliki 1 kg mangga dengan kualitas tinggi dan 8 kg mangga kualitas sedang. Keesokan harinya kedua pedagang tersebut berbelanja untuk menambah persediaan mangganya. Pedagang satu menambah 20 kg mangga berkualitas tinggi dan 15 mangga kualitas sedang, sedangkan pedagang kedua menambah 20 kg mangga kualitas tinggi dan 10 kg mangga kualitas sedang.
Berapakah persediaan mangga setiap pedagang sekarang?

Arahkan siswa memecahkan Masalah 2.3 untuk memotivasi siswa dengan menunjukkan kebergunaan matematika dalam kehidupan. Meminta siswa memecahkan Masalah dan menemukan sifat penjumlahan matriks yang dapat dituliskan secara umum.

Alternatif penyelesaian

Pedagang satu dan pedagang dua memiliki mangga kualitas tinggi dan sedang dan pada hari berikutnya kedua pedagang menambah persediaan mangga seperti tabel di bawah ini:

Tabel persediaan mangga sebelum penambahan

	Kualitas Tinggi	Kualitas Sedang
Pedagang I	3	6
Pedagang II	1	8

Tabel tambahan persediaan mangga

	Kualitas Tinggi	Kualitas Sedang
Pedagang I	20	15
Pedagang II	20	10

Jika kita misalkan matriks persediaan buah mangga sebelum penambahan sebagai matriks A dan sesudah penambahan sebagai matriks B. Matriks A dan B disajikan sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ingat kembali materi operasi pada matriks yang sudah dipelajari. Dua matriks dapat dijumlahkan apabila kedua matriks tersebut memiliki ordo yang sama. Matriks A dan B memiliki ordo yang sama, yaitu; matriks berordo 2×2.

Maka jumlah keseluruhan persediaan mangga dapat diperoleh sebagai berikut.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3+20 & 6+15 \\ 1+20 & 8+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 21 & 18 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20+3 & 15+6 \\ 20+1 & 10+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 21 & 18 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan hasil operasi di atas dapat disimpulkan (1) total persediaan mangga Pedagang I adalah 23 kg mangga kualitas tinggi dan 21 kg mangga kualitas sedang; (2) total persediaan mangga Pedangang II adalah 21 kg mangga kualitas tinggi dan 18 kg mangga kualitas sedang; (3) ternyata hasil penjumlahan matriks $A + B = B + A$.

Contoh 2.2

Bantu siswa menerapkan aturan penjumlahan matriks, melalui penyelesaian Contoh-22 di samping. Latih siswa berpikir cermat untuk melakukan perhitungan penjumlahan dua matriks.

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ dan matriks

$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+(-3) & -1+(-1) & 2+2 \\ 0+0 & 6+6 & 4+4 \\ 1+1 & 5+(-5) & 1+(-1) \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 12 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3+3 & -1+(-1) & 2+2 \\ 0+0 & 6+6 & 4+4 \\ 1+1 & -5+5 & -1+1 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 12 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan contoh di atas dapat disimpulkan bahwa $A + B = B + A$.

Mari kita buktikan secara umum bahwa operasi penjumlahan pada matriks memenuhi sifat komutatif. Misalkan matriks A dan B berordo $n \times k$. Elemen-elemen matrik A dan B adalah bilangan real yang disajikan sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nk} \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & . & . & , & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & . & . & . & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & . & . & . & b_{3k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & . & . & . & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nk} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & . & . & , & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & . & . & . & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & . & . & . & b_{3k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & . & . & . & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & . & . & . & a_{1k}+b_{1k} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & . & . & . & a_{2k}+b_{2k} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & . & . & . & a_{3k}+b_{3k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & . & . & . & a_{nk}+b_{nk} \end{pmatrix}$$

Karena nilai a_{ij} dan b_{ij} untuk setiap i dan j adalah bilangan real, maka nilai $a_{ij} + b_{ij}$ sama dengan nilai $b_{ij} + a_{ij}$ atau $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$. Dengan demikian hasil penjumlahan $A + B = B + A$.

Latih siswa berpikir analitis melalui pembuktian sifat-sifat penjumlahan matriks secara deduktif dan berikan contoh untuk menerapkan sifat-sifat yang telah dipelajari.

Sifat 2.1

Misalkan matriks A dan B berordo $n \times k$. Penjumlahan matriks A dan B memenuhi sifat komutatif jika dan hanya jika $A + B = B + A$.

Contoh 2.3

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} x-2y & y \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2x & x-y \end{pmatrix}$ dengan hasil

penjumlahan matriks $B + A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}$. Tentukan matriks A dan B!

Alternatif penyelesaian

Berdasarkan Definisi-2.2 di atas, $A + B = B + A$, sehingga diperoleh

$$A + B = \begin{pmatrix} x-2y & y \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2x & x-y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x-2y+5 & y+3 \\ 2x+4 & x-y+1 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan Definisi-2.2 di atas, $A + B = B + A$, sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} x-2y+5 & y+3 \\ 2x+4 & x-y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua matriks, maka diperoleh $x - 2y + 5 = 1$; $y + 3 = 8$; $2x + 4 = 16$, dan $x - y + 1 = 2$. Dari keempat persamaan ini diperoleh nilai x, dan y.

$2x + 4 = 16$ diperoleh $x = 6$.

$y + 3 = 8$ maka $y = 5$

Dengan demikian matriks $A = \begin{pmatrix} x-2y & y \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

c. Sifat Asosiatif Penjumlahan Matriks

Meminta siswa untuk memecahkan masalah berikut dan mencermati sifat yang muncul dari penjumlahan elemen-elemen matriks. Bagaimana sifat penjumlahan matriks dapat dilahirkan dari hasil perpaduan penilaian Juri I, II, dan III, sehingga hasil penilaian peserta lomba dapat ditetapkan secara berkeadilan.

Masalah-2.4

Pada suatu acara perlombaan masak pada acara 17 Agustus di SMA yang terdiri dari tiga sekolah, terdapat tiga peserta perwakilan dari masing-masing sekolah. Terdapat tiga orang anggota tim juri menilai dari setiap hasil masakan dari masing-masing sekolah, dengan nilai rentang nilai 6 sampai 10. Tabel nilai tersebut adalah

Tabel persediaan mangga sebelum penambahan

	Juri I	Juri II	Juri III
SMA I	8	8	9
SMA II	7	8	8
SMA III	10	8	8

Alternatif penyelesaian

Misalkan:

- Nilai dari juri I untuk masing-masing sekolah:

$$\begin{bmatrix} SMAI \\ SMAII \\ SMAIII \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Nilai juri II untuk masing-masing sekolah:

$$\begin{bmatrix} SMAI \\ SMAII \\ SMAII \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- Nilai juri III untuk masing-masing sekolah:

$$\begin{bmatrix} SMAI \\ SMAII \\ SMAII \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Alternatif penyelesaian

$$(\mathrm{I} + \mathrm{II}) + \mathrm{III} = \left(\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 23 \\ 26 \end{bmatrix}$$ **Atau**

$$\mathrm{I} + (\mathrm{II}+\mathrm{III}) = \left(\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 17 \\ 16 \\ 16 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 25 \\ 23 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Dari penyelesaian tersebut dapat diketahui peringkat I adalah SMA III, Peringkat kedua adalah SMA I, dan peringkat ketiga adalah SMA II. Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa matriks I + (II + III) = (I + II) + III. Hal ini dinamakan **sifat asosiatif operasi penjumlahan pada matriks**.

Contoh 2.4

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, dan

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A + B) + C = \left(\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 8 & -7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan contoh di atas dapat disimpulkan bahwa hasil penjumlahan matriks

$$A + (B + C) = (A + B) + C = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Sifat 2.2

Misalkan matriks *A, B* dan *C* berordo *n* x *k*. Penjumlahan matriks *A, B* dan *C* memenuhi sifat asosiatif jika dan hanya jika *A* + *(B+C)* = *(A+B)* + *C*.

Mengorganisasikan siswa belajar dalam kelompok dan melakukan diskusi interaktif untuk memecahkan masalah berikut dan meminta siswa menyajikan masalah dalam pengurangan dua buah matriks serta menganalisis sifat-sifat pengurangan dua matriks. Menanyakan apakah sifat-sifat operasi penjumlahan matriks masih berlaku dalam operasi pengurangan dua matriks?

2. Pengurangan Dua Matriks

Sebagai gambaran awal mengenai operasi pengurangan dua matriks, mari kita cermati contoh masalah berikut ini.

Masalah-2.5

Sebuah pabrik tekstil hendak menyusun tabel aktiva mesin dan penyusutan mesin selama 1 tahun yang dinilai sama dengan 10 % dari harga perolehan sebagai berikut:

Lengkapilah tabel tersebut dengan menggunakan matriks!

Jenis Aktiva	Harga Perolehan (Rp)	Penyusutan Tahun I (Rp)	Harga Baku (Rp)
Mesin A	25.000.000	2.500.000	
Mesin B	65.000.000	6.500.000	
Mesin C	48.000.000	4.800.000	

Alternatif penyelesaian

Misalkan:

Harga perolehan merupakan matriks $A = \begin{bmatrix} 25.000.000 \\ 65.000.000 \\ 48.000.000 \end{bmatrix}$

Penyusutan tahun pertama merupakan matriks

$$B = \begin{bmatrix} 2.500.000 \\ 6.500.000 \\ 4.800.000 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari harga baku pada tabel tersebut adalah

$$A - B = \begin{bmatrix} 25.000.000 \\ 65.000.000 \\ 48.000.000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.500.000 \\ 6.500.000 \\ 4.800.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.500.000 \\ 58.500.000 \\ 43.200.000 \end{bmatrix}$$

Rumusan penjumlahan dua matriks di atas dapat kita diterapkan untuk memahami konsep pengurangan matriks A dengan matriks B.

Misalkan A dan B adalah matriks-matriks berordo $m \times n$. Pengurangan matriks A dengan matriks B didefinisikan sebagai jumlah matriks A dan lawan matriks $-B$, ditulis:

$$A-B=A+(-B).$$

Matriks $-B$ merupakan matriks yang setiap unsurnya berlawanan tanda dengan setiap unsur yang bersesuaian dengan matriks B.

Mengorganisasikan siswa belajar dalam kelompok dan melakukan diskusi interaktif untuk memecahkan masalah berikut dan meminta siswa menyajikan masalah dalam pengurangan dua buah matriks serta menganalisis sifat-sifat pengurangan dua matriks. Menanyakan apakah sifat-sifat operasi penjumlahan matriks masih berlaku dalam operasi pengurangan dua matriks?

3. Perkalian Suatu Bilangan Real dengan Matriks

Dalam aljabar matriks, bilangan real k sering disebut sebagai skalar. Oleh karena itu perkalian real terhadap matriks juga disebut sebagai perkalian skalar dengan matriks.

Sebelumnya, pada kajian pengurangan dua matriks, $A - B = A + (-B)$, $(-B)$ dalam hal ini sebenarnya hasil kali bilangan -1 dengan semua elemen matriks B. Artinya, matriks $(-B)$ dapat kita tulis sebagai :

$$-B = k.B, \text{ dengan } k = -1.$$

Secara umum, perkalian skalar dengan matriks dirumuskan sebagai berikut.

Misalkan A suatu matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan k adalah suatu bilangan real. Matriks C adalah hasil perkalian bilangan real k dengan matriks A, dinotasikan $C = k.A$, bila matriks C berordo $m \times n$ dengan elemen-elemennya ditentukan oleh :

$$c_{ij} = k.a_{ij} \text{ (untuk semua } i \text{ dan } j\text{).}$$

Contoh 2.5

a) Jika $T = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -5 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$,

Maka $2.H = \begin{bmatrix} 2\times(-2) & 2\times(-4) \\ 2\times(-4) & 2\times(-4) \\ 2\times12 & 2\times5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -8 & -10 \\ 24 & 10 \end{bmatrix}$.

b) Jika $S = \begin{bmatrix} 18 & 60 & 15 \\ 9 & 24 & 18 \\ 3 & -3 & -12 \end{bmatrix}$, Maka

$$\frac{1}{3}S = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\times18 & \frac{1}{3}\times60 & \frac{1}{3}\times15 \\ \frac{1}{3}\times9 & \frac{1}{3}\times24 & \frac{1}{3}\times18 \\ \frac{1}{3}\times3 & \frac{1}{3}\times(-3) & \frac{1}{3}\times(-12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 20 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

c) Jika $P = \begin{bmatrix} 16 & 40 & 36 \\ 24 & 60 & 72 \end{bmatrix}$, Maka $\frac{1}{4}P + \frac{3}{4}P$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\times12 & \frac{1}{4}\times40 & \frac{1}{4}\times36 \\ \frac{1}{4}\times24 & \frac{1}{4}\times60 & \frac{1}{4}\times72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\times12 & \frac{3}{4}\times40 & \frac{3}{4}\times36 \\ \frac{3}{4}\times24 & \frac{3}{4}\times60 & \frac{3}{4}\times72 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 10 & 9 \\ 6 & 15 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 30 & 27 \\ 18 & 45 & 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 40 & 36 \\ 24 & 60 & 72 \end{bmatrix} = P$$

Mengorganisir siswa dalam mengamati data persediaan barang dalam beberapa toko yang dimiliki sebuah perusahaan multinasional. Meminta siswa menyajikan data dalam bentuk matriks dan memikirkan secara logik bagaimanan menentukan nilai barang yang tersedia di setiap toko sesuai daftar harga masing-masing jenis barang. Selanjutnya mengarahkan siswa untuk membangun konsep perkalian matriks yang diturunkan dari langkah-langkah pemecahan masalah yang diajukan.

4. Operasi Perkalian Dua Matriks dan Sifat-sifatnya

Masalah-2.6

P.T Melodi adalah sebuah perusahaan multinasional yang bergerak di bidang penjualan alat-alat musik. Perusahaan tersebut memiliki beberapa toko penjulan di beberapa kota besar di Indonesia. Persediaan alat-alat olah raga di setiap toko disajikan pada tabel berikut.

Tabel 1.1: Alokasi setiap sumber yang tersedia

Sumber	Jenis Alat Musik			
	Piano	Gitar	Terompet	Seksopon
Medan	95	68	85	75
Surabaya	70	57	120	80
Makasar	85	60	56	90
Yogya	45	90	87	64
Bandung	75	54	90	65

Tabel di bawah ini menyatakan harga satu buah untuk setiap jenis alat musik

Jenis Alat Musik	Harga (Rp)
Piano	15.000.000,–
Gitar	1.500.000,–
Terompet	5.000.000,–
Seksofon	5.000.000,–

Setiap toko di masing-masing kota telah berhasil menjual berbagai jenis alat musik yang disajikan pada tabel berikut.

Kota/ Terjual	Jenis Alat Musik			
	Piano	**Gitar**	**Terompet**	**Seksopon**
Medan	85	56	84	70
Surabaya	55	52	85	65
Makasar	80	48	43	86
Yogya	42	60	67	62
Bandung	72	51	78	60

Amatilah data di atas dan tentukan nilai dari

a. Nilai persediaan alat musik seluruhnya!

b. Penghasilan kotor perusahaan P.T Melodi

Alternatif Penyelesaian

Misalkan P adalah matriks yang menyatakan persediaan alat musik di setiap kota dan matriks H adalah matriks yang menyatakan harga untuk setiap jenis alat musik serta T adalah matriks yang menyatakan banyaknya barang yang telah berhasil dijual di setiap kota. Matriks P, H, dan T dapat ditulis sebagai berikut.

Kota/ Terjual	Jenis Alat Musik			
	Piano	**Gitar**	**Terompet**	**Seksopon**
Medan	85	56	84	70
Surabaya	55	52	85	65
Makasar	80	48	43	86
Yogya	42	60	67	62
Bandung	72	51	78	60

$$P=\begin{pmatrix}95&68&85&75\\70&57&120&80\\85&60&56&90\\45&90&87&64\\75&54&90&65\end{pmatrix} \text{ dan } H=\begin{pmatrix}15000000\\1500000\\5000000\\5000000\end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$T=\begin{pmatrix}85&56&84&70\\55&52&85&65\\80&48&43&86\\42&60&67&62\\72&51&78&60\end{pmatrix}$$

$$\text{Nilai Barang Keseluruhan}=\begin{pmatrix}95&68&85&75\\70&57&120&80\\85&60&56&90\\45&90&87&64\\75&54&90&65\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}15000000\\1500000\\5000000\\5000000\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}95(15000000)+68(1500000)+85(5000000)+75(5000000)\\70(15000000)+57(1500000)+120(5000000)+80(5000000)\\85(15000000)+60(1500000)+56(5000000)+90(5000000)\\45(15000000)+90(1500000)+87(5000000)+64(5000000)\\75(15000000)+54(1500000)+90(5000000)+65(5000000)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1425000000+102000000+425000000+375000000\\1050000000+85500000+600000000+400000000\\1275000000+80000000+280000000+450000000\\675000000+135000000+435000000+320000000\\11255000000+81000000+450000000+325000000\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2327000000\\2135500000\\2805000000\\7640000000\\1981000000\end{pmatrix}$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, diperoleh nilai barang keseluruhan di setiap toko di masing-masing kota adalah

$$\text{Nilai Inventori Barang} = \begin{pmatrix} 2327000000 \\ 2135500000 \\ 2805000000 \\ 7640000000 \\ 1981000000 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textit{Medan} \\ \textit{Surabaya} \\ \textit{Makasar} \\ \textit{Yogya} \\ \textit{Bandung} \end{matrix}$$

Berdiskusilah dengan temanmu, coba tentukan nilai barang yang terjual di setiap toko di kota.

Masalah-2.7

Suatu perusahaan yang bergerak pada bidang jasa akan membuka tiga cabang besar di pulau Sumatera, yaitu cabang 1 di kota Palembang, cabang 2 di kota Padang, dan cabang 3 di kota Pekanbaru. Untuk itu, diperlukan beberapa peralatan untuk membantu kelancaran usaha jasa tersebut, yaitu handphone, komputer, dan sepeda motor. Di sisi lain, pihak perusahaan mempertimbangkan harga per satuan peralatan tersebut. Lengkapnya, rincian data tersebut disajikan sebagai berikut.

	Handphone (Unit)	**Komputer (Unit)**	**Sepeda Motor (Unit)**
Cabang 1	7	8	3
Cabang 2	5	6	2
Cabang 3	4	5	2

Harga Handphone (jutaan)	2
Harga Komputer (jutaan)	5
Harga Sepeda Motor (jutaan)	15

Perusahaan ingin mengetahui total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang.

Alternatif Penyelesaian

Tidaklah sulit menyelesaikan persoalan di atas. Tentunya kamu dapat menjawabnya. Sekarang, kita akan menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan konsep matriks.

Kita misalkan matriks $C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, yang merepresentasikan jumlah unit setiap peralatan yang dibutuhkan di setiap cabang, dan matriks $D_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$, yang merepresentasikan harga per unit setiap peralatan.

Untuk menentukan total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang, kita peroleh sebagai berikut.

- Cabang 1
  Total biaya = (7 unit handphone × 2 juta) + (8 unit komputer × 5 juta) + (3 unit sepeda motor × 15 juta).
  = Rp99.000.000,00
- Cabang 2
  Total biaya = (5 unit handphone × 2 juta) + (6 unit komputer × 5 juta) + (2 unit sepeda motor × 15 juta)
  = Rp70.000.000,00
- Cabang 3
  Total biaya = (4 unit handphone × 2 juta) + (5 unit komputer × 5 juta) + (2 unit sepeda motor × 15 juta)
  = Rp63.000.000,00

Jadi total biaya pengadaan peralatan di setiap unit dinyatakan dalam matriks berikut:

$$E_{3\times1}\begin{bmatrix} Rp\,99.000.000,- \\ Rp\,70.000.000,- \\ Rp\,63.000.000,- \end{bmatrix}$$

- Matriks C berordo $m \times p$.
- Elemen-elemen matriks C pada baris ke-i dan kolom ke-j, dinotasikan c_{ij}, diperoleh dengan cara mengalikan elemen baris ke-i dari matriks A terhadap elemen kolom ke-j dari matriks B, kemudian dijumlahkan. Dinotasikan $c_{ij}=a_{i1}.b_{1j}+a_{i2}.b_{2j}+a_{i3}.b_{3j}+...+a_{in}.b_{nj}$

Dapat kita cermati dari perkalian di atas, bahwa setiap elemen baris pada matriks C berkorespondensi satu-satu dengan setiap elemen kolom pada matriks D. Seandainya terdapat satu saja elemen baris ke-1 pada matriks C tidak memiliki pasangan dengan elemen kolom ke-1 pada matriks D, maka operasi perkalian terhadap kedua matriks itu tidak dapat dilakukan. Jadi, dapat disimpulkan operasi perkalian terhadap dua matriks dapat dilakukan jika banyak baris pada matriks C sama dengan banyak kolom pada matriks D. Banyak perkalian akan berhenti jika setiap elemen baris ke-n pada matriks C sudah dikalikan dengan setiap elemen kolom ke-n pada matriks D.

Secara matematis, kita dapat menyatakan perkalian dua matriks sebagai berikut. Misalkan matriks $A_{m\times n}$ dan matriks $B_{n\times p}$, matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika banyak baris matriks A sama dengan banyak kolom B. Hasil perkalian matriks A berordo m × n terhadap matriks B berordo $n \times p$ adalah suatu matriks berordo $m \times p$. Proses menentukan elemen-elemen hasil perkalian dua matriks dipaparkan sebagai berikut.

$$A_{m\times n}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{dan} = B_{n\times p}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Jika C adalah matriks hasil perkalian matriks $A_{m \times n}$ terhadap matriks $B_{n \times p}$, dinotasikan $C=A.B$, maka

- Matriks C berordo $m \times p$.
- Elemen-elemen matriks C pada baris ke-i dan kolom ke-j, dinotasikan c_{ij}, diperoleh dengan cara mengalikan elemen baris ke-i dari matriks A terhadap elemen kolom ke-j dari matriks B, kemudian dijumlahkan. Dinotasikan $c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + ... + a_{in}.b_{nj}$

Definisi 2.3

Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks yang berordo $m \times p$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks yang berordo $q \times n$.
Hasil kali matriks A dan B adalah suatu matriks C berordo $m \times n$ dinotasikan $A \times B = C = [c_{ij}]$ berordo $m \times n$ dengan elemen baris ke-i dan kolom ke-j adalah: $c_{ij} = a_{i1}\ b_{1j} + a_{i2}\ b_{2j} + a_{i3}\ b_{3j} + \ldots + a_{ip}\ b_{pj}$, dengan $i = 1,2,3, \ldots, m$; dan $j = 1,2,3,\ldots,n$.

Catatan: Matriks A dan B dapat dikalikan apabila banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B.

Mari kita pelajari contoh-contoh di bawah ini, untuk memudahkan kita mengerti akan konsep di atas!

Contoh 2.7

Gambarkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut ini.

a) Diketahui matriks $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ dan $B_{3 \times 3}$

$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ matriks hasil perkalian matriks A dan matriks B, $A.B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} & a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} + a_{13}.b_{33} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} & a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} + a_{23}.b_{33} \\ a_{31}.b_{11} + a_{32}.b_{21} + a_{33}.b_{31} & a_{31}.b_{12} + a_{32}.b_{22} + a_{33}.b_{32} & a_{31}.b_{13} + a_{32}.b_{23} + a_{33}.b_{33} \end{bmatrix}$$

Sekarang, silahkan tentukan hasil perkalian matriks B terhadap matriks A. Kemudian, simpulkan apakah berlaku atau tidak sifat komutatif pada perkalian matriks? Berikan alasanmu!

b) Mari kita tentukan hasil perkalian matriks

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, dengan menggunakan konsep

perkalian dua matriks di atas, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 + 2.1 & 1.3 + 2.2 & 1.4 + 2.0 \\ 3.2 + 4.1 & 3.3 + 4.2 & 3.4 + 4.0 \\ 5.2 + 6.1 & 5.3 + 6.2 & 5.4 + 6.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 10 & 17 & 12 \\ 16 & 27 & 20 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan hasil diskusi yang kamu peroleh pada contoh a) dan b), silahkan periksa apakah matriks $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dapat dikalikan terhadap matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$? Berikan penjelasanmu!

a. Sifat Asosiatif dan Distributif Operasi Perkalian Matriks

Misalkan Matriks $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$$

Arahkan siswa mencermati beberapa contoh untuk lebih memahami sifat-sifat operasi perkalian matriks. Pastikan bahwa siswa mengetahui bahwa operasi perkalian matriks tidak memenuhi sifat komutatif, tetapi memenuhi sifat assosiatif.

$$A \times B = \begin{pmatrix} -25+36 & 15-3 \\ -60+12 & 36-1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -48 & 35 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -25+36 & -15+3 \\ 60-12 & 36-1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ 48 & 35 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, dapat disimpulkan bahwa perkalian matriks tidak memenuhi sifat komutatif sebab $A \times B \neq B \times A$

Mari kita cek sifat asosiatif!

$$A \times (B \times C) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times (B \times C) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 23 & -13 \end{pmatrix}$$

$$A \times (B \times C) = \begin{pmatrix} 34 & 1 \\ -61 & 83 \end{pmatrix}$$

Sekarang perhatikan hasil perkalian matriks

$$(A \times B) \times C = \left(\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \times B) \times C = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -48 & 35 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A \times B) \times C = \begin{pmatrix} 34 & 1 \\ -61 & 83 \end{pmatrix}$$

Dari hasil perhitungan di atas dapat disimpulkan $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

Sifat 2.3

Misalkan matriks A *berordo* $m \times n$, B *berordo* $n \times p$ dan C *berordo* $p \times q$ dengan $m, n, p, q \in N$. Perkalian matriks memenuhi sifat asosiatif jika dan hanya jika $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

Perhatikan kembali matriks A, B, dan C di atas.

Matriks $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A \times (B + C) &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \left\{ \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -23 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \times B) + (A \times C) &= \\ &\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -48 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ 25 & -11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -23 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan di atas, dapat disimpulkan bahwa $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$.

Sifat 2.4

Misalkan matriks A berordo $m \times n$, B berordo $n \times p$ dan C berordo $n \times p$ dengan $m, n, p, q \in N$. Perkalian matriks memenuhi sifat distributif operasi perkalian terhadap operasi pen–jumlahan matriks jika dan hanya jika $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$.

Nah, sekarang mari kita cermati untuk perkalian berulang suatu matriks A berordo $p \times q$.

Contoh 2.7

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukanlah A^{2013}

Alternatif Penyelesaian

Mari cermati langkah-langkah berikut!

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -I$$

Jika $A^2 = -I$, maka $A^4 = I$. Artinya, untuk setiap pangkat matriks A kelipatan 4, akan ditemukan matriks identitas.

Selanjutnya, 2013 dapat kita tuliskan sebagai berikut:

2013=4.(503)+1.

Akibatnya,

$A^{2013} = A^{(4.(503)+1)} = (A^4)^{503} . A^1$.

Matriks $A^4 = I$, dan $I^n = I, n = 1,2,3,\ldots$, akibatnya berlaku, $(A^4)^{503} = \text{I}$. Oleh karena itu, $A^{2013} = I.A = A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Dari hasil pembahasan Contoh 2.7, secara umum dapat kita nyakan dalam definisi berikut ini.

Arahkan siswa untuk mencermati pertanyaan kritis di samping. $A^4=I$ belum tentu berlaku untuk sebarang matriks A. Misalkan matriks

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

Definisi 2.7

Misalkan matriks A berordo $p \times q$ dan $n \in N$.

$$A^n = \underbrace{A \times A \times A \times \ldots A}_{n\ faktor}$$

A^{2013} pada contoh di atas, dengan $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, kebetulan memiliki pola untuk menentukan hasilnya. Namun, jika kamu menjumpai masalah untuk menentukan A^n, n bilangan asli dapat kamu kerjakan dengan menentukan hasil kali matriks A sebanyak n faktor.

Pertanyaan Kritis: Apakah $A^4 = I$ berlaku untuk sembarang matriks persegi berordo 2 × 2 ?

Uji Kompetensi 2.1

Berikan soal-soal pada Uji Kompetensi 2.1 sebagai pekerjaan rumah sesuaikan dengan materi yang telah dipelajari. Hal ini berguna untuk mengukur penguasaan siswa terhadap konsep dan prinsip matematika yang telah dipelajari.

1. Hasil penjumlahan matriks
   $\begin{pmatrix} p+2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & 6 \\ 6 & q+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$. Tentukan nilai p dan q!.

2. Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} p+2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} p & 6 \\ 6 & q+3 \end{pmatrix}$ Bila $3A = B$, Tentukan nilai p dan q!.

3. Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} -26 & -2 \\ 3 & -35 \end{pmatrix}$ Tunjukkan bahwa $A + B = B^2. + C$.

4. Tentukanlah hasil perkalian matriks-matriks berikut!

   a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

5. Apa yang dapat kamu jelaskan tentang operasi pembagian matriks? Misalnya diketahui persamaan matriks $A.C = B$, dengan matriks A dan B matriks yang diketahui. Bagaimana kita menentukan matriks C? Paparkan di depan kelas!

6. Berikan dua matriks yang memenuhi kesamaan:
   i. $(A + B)^2 = A^2 + B^2$
   ii. $A^2 - B^2 = (A - B).(A + B)$

7. Seorang agen perjalanan menawarkan paket perjalanan ke Danau Toba. Paket I terdiri atas 3 malam menginap, 2 tempat wisata dan 4 kali makan. Paket II dengan 4 malam menginap, 5 tempat wisata dan 8 kali makan. Paket III dengan 3 malam menginap, 2 tempat wisata dan tidak 1 makan. Sewa hotel Rp 250.000,00 per malam, biaya pengangkutan ke tiap tempat wisata Rp 35.000,00, dan makan di restoran yang ditunjuk Rp 75.000,00.
   a) Dengan menggunakan perkalian matriks, tentukan matriks biaya untuk tiap paket.
   b) Paket mana yang menawarkan biaya termurah?

8. Sebuah perusahaan angkutan menawarkan tiket pulang bersama ke Provinsi Jawa Timur. Perusahaan angkutan tersebut mempunyai tiga jenis bus, yaitu Excecutif, Economi, dan AC. Setiap bus dilengkapi dengan kursi penumpang untuk kelas umum, mahasiswa dan pelajar. Jumlah kursi penumpang tiga jenis bus tersebut disajikan pada tabel di bawah ini.

	Eksekutif	**Ekonomi**	**AC**
Umum	40	42	41
Mahasiswa	33	41	35
Pelajar	30	39	28

   Perusahaan telah mendaftar jumlah penumpang yang mengikuti perjalanan wisata ke negara A, seperti pada tabel berikut.

Kategori penumpang	**Jumlah penumpang**
Umum	123
Mahasiswa	109
Pelajar	94

Berapa banyak bus yang harus disediakan untuk perjalaan tersebut?

9. Tentukanlah $B^3 - 4B^2 + B - 4I$, dengan matriks I merupakan matriks identitas berordo 3 × 3 dan matriks

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Jika matriks $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, maka tentukanlah matriks

$D^3 - 4D^2 + D + 4.\mathrm{I}$, dengan matriks I merupakan matriks identitas berordo 3 × 3

11. Tentukanlah nilai x dan y yang memenuhi syarat berikut ini!

a) $R = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & q \end{bmatrix}$ dan $R^2 = \mathrm{I}$

b) $S = \begin{bmatrix} .3 & -1 \\ .2 & -5 \end{bmatrix}$ dan $S^2 = p.S + q.\mathrm{I}$

I adalah matriks identitas berordo 2×2.

Projek

Rancang sebuah permasalahan terkait pekerjaan tukang pos yang melibatkan matriks. Beri bobot lintasan kenderaan dari sisi jarak atau biaya dalam pelaksanaan tugas mengantar surat atau barang dari rumah ke rumah penduduk. Selesaikan tugas ini secara berkelompok. Buat laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

Tugas proyek ini, sebagai tugas kelompok. Setelah tugas ini dikerjakan dalam waktu tertentu, minta siswa untuk menyajikan laporannya di depan kelas.Gunakan rubrik penilaian projek yang telah disajikan di bagain akhir buku ini.

Guru mengorganisasikan siswa belajar dengan mengajukan beberapa masalah terkait penemuan konsep dan sifat-sifat determinan dan invers matriks. Siswa diarahkan mengamati masalah, menuliskan apa yang diketahui dan yang ditanyakan, memikirkan berbagai konsep dan sifat-sifat matriks yang terkait untuk pemecahan masalah.

5. Determinan Dan Invers Matriks

a. Determinan Matriks.

Masalah-2.8

Siti dan teman-temannya makan di sebuah warung. Mereka memesan 3 ayam penyet dan 2 gelas es jeruk di kantin sekolahnya. Tak lama kemudian, Beni datang dan teman-temannya memesan 5 porsi ayam penyet dan 3 gelas es jeruk. Siti menantang Amir menentukan harga satu porsi ayam penyet dan harga es jeruk per gelas, jika Siti harus membayar Rp70.000,00 untuk semua pesanannya dan Beni harus membayar Rp115.000,00 untuk semua pesanannya, berapakah harga satu porsi ayam penyet dan es jeruk per gelasnya?

Alternatif Penyelesaian

Cara I

Petunjuk : Ingat kembali materi sistem persamaan linier yang sudah kamu pelajari. Buatlah sistem persamaan linear dari masalah tersebut, lalu selesaikan dengan matriks.

Misalkan :

x = harga satu porsi ayam penyet

y = harga es jeruk per gelas

Sistem persamaan linearnya : $3x + 2y = 70000$

$5x + 3y = 115000$

Dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \\ 115000 \end{bmatrix} \text{..(1)}$$

Mengingat kembali bentuk umum persamaan linier dua variabel.

$$\left.\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Solusi persamaan tersebut adalah:

$$x = \frac{b_2.c_1 - b_1.c_2}{a_1.b_2 - a_2.b_1} \text{ dan } y = \frac{a_1.c_2 - a_2.c_1}{a_1.b_2 - a_2.b_1}, \; a_1b_2 \neq a_2b_1 \text{ ....(2)}$$

- ➢ Ingat kembali bagaimana menentukan himpunan penyelesain SPLDV. Tentunya, kamu mampu menunjukkannya.

Cara II

Arahkan siswa mengingat kembali bagaimana menentukan himpunan penyelesain SPLDV dengan cara (2) di atas. Selanjutnya memperkenalkan nilai determinan suatu matriks.

Dalam konsep matriks, nilai $a_1.b_2 - a_2.b_1$ disebut sebagai determinan matriks $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, dinotasikan $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ atau *det* (A), dengan matriks $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = A$

Oleh karena itu, nilai x dan y pada persamaan (2), dapat ditulis menjadi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ ....(3)}$$

dengan $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Kembali ke persamaan (1), dengan menerapkan persamaan (3), maka diperoleh:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 70000 & 2 \\ 115.000 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{210.000 - 230.000}{9 - 10} = \frac{-20.000}{-1} = 20.000$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 70.000 \\ 5 & 115.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{345.000 - 350.000}{9 - 10} = \frac{-5.000}{-1} = 5.000$$

Jadi, harga satu porsi ayam penyet adalah Rp20.000,00 dan harga satu gelas Jus adalah Rp5.0000,00.

Notasi Determinan

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Determinan dari matriks A dapat dinyatakan $\det\left(A\right) = \left|A\right| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Meminta siswa mencermati beberapa contoh berikut dan menentukan nilai determinan dari matriks yang diberikan serta menemukan sifat-sifat determinan matriks

b. Sifat-Sifat Determinan.

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det\ \left(A\right) = \left|A\right| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5$$

$$\det\ \left(B\right) = \left|B\right| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -5$$

jadi $\left|A\right| \times \left|B\right| = 25$

$$\text{Matriks } A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} -17 & -16 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian det

$$\left(A \times B\right) = \left|AB\right| = \begin{vmatrix} -17 & -16 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -153 + 128 = -25$$

Sifat 2.5

Misalkan matriks A dan B merupakan matriks persegi berordo $m \times m$ dengan $m \in N$. Jika determinan matriks A dinotasikan $\left|A\right|$ dan determinan matriks B dinotasikan $\left|B\right|$, maka $\left|AB\right| = \left|A\right|.\left|B\right|$.

Contoh 2.8

Gambarkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut ini.

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Tunjukkan bahwa $|A.B| = |A|.|B|$!

Alternatif Penyelesaian

Sebelum kita menentukan determinan $A.B$, mari kita tentukan terlebih dahulu matriks $A.B$, yaitu:

$$|A.B| = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{bmatrix}.$$

Dengan matriks $A.B$ tersebut kita peroleh

$$|A.B| = \begin{vmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{vmatrix} = -28.$$

Sekarang kita akan bandingkan dengan nilai $|A|.|B|$. Dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ Maka $|A| = 14$, dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ Maka $|B| = -2$ nilai $|A|.|B| = 14.(-2) = -28$ $|A.B| = |A|.|B| = -28$

> Soal Tantangan....
>
> - *Selidiki apakah |A.B.C|=|A|.|B|.|C| untuk setiap matriks-matriks A,B, dan C berordo n×n.*
> - *Jika matriks A adalah matriks persegi, dan k adalah skalar. Coba telusuri, nilai determinan matriks k.A.*

Arahkan siswa untuk menyelesaikan soal tantangan di samping. Latih siswa berpikir deduktif untuk membuktikan kebenaran |A.B.C|=|A|.|B|.|C|

Contoh 2.9

Sebuah matriks P ordo 2×2 dengan $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $a, b, c, d \in R$. Jika determinan P adalah α, dengan $\alpha \in R$. tentukanlah determinan matriks $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sb \end{bmatrix}$ dengan $x, y \in R$.

Alternatif Penyelesaian

Jika $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dan determinan matriks P adalah α, maka berlaku $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \alpha$

Elemen matriks Q memiliki hubungan dengan matriks P, yaitu:

q_{21} = hasil kali skalar x terhadap p_{21} – hasil kali skalar s terhadap p_{11}.

q_{22} = hasil kali skalar x terhadap p_{22} – hasil kali skalar s terhadap p_{12}.

Beri penjelasan pada siswa, bahwa jika elemen salah satu baris atau kolom sebuah matrik dikalikan dengan x bilangan real, maka determinannya sama dengan x dikalikan nilai determinan matirks sebelumnya.

Tujuan kita sekarang adalah mereduksi matriks Q menjadi kelipatan matriks P. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sb \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow baris\,1 \\ \rightarrow baris\,2 \end{matrix}$$

Elemen baris 1 matriks Q = elemen baris 1 matriks P. Mereduksi dalam hal ini adalah mengoperasikan elemen baris 2 matriks Q menjadi elemen baris 2 matriks P. Unsur q_{21} dapat dioperasikan menjadi:

$(q_{21})^* = s.q_{11} + q_{21}$, akibatnya kita peroleh:

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc & xd \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow baris\,1^* \\ \rightarrow baris\,2^* \end{matrix}.$$

Menurut sifat determinan matriks (silahkan minta penjelasan lebih lanjut dari guru Matematika), maka $|Q| = x.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = x\alpha, \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha\right)$. jadi $|\mathrm{Q}| = x\alpha$

> Soal Tantangan....
>
> *Misal matriks P adalah matriks berordo 3×3, dengan |P|=α dan matriks Q berordo 3×3 dan mengikuti pola seperti contoh di atas.*
>
> *Tentukan determinan matriks Q.*

Perhatikan kembali matriks A di atas dan ingat kembali menentukan transpose sebuah matriks yang sudah dipelajari, Matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ dan matriks transpose dari matriks $A^t \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Ajukan contoh di samping untuk menunjukkan kepada siswa, bahwa determinan sebuah matriks sama dengan determinan matriks transpos dari matriks tersebut.

Determinan adalah det $\left(A^t\right) = \left|A^t\right| \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5$

Perhatikan dari hasil perhitungan det(A) dan det(A^t) diperoleh det(A) = det(A^t).

Sifat 2.5

Misalkan matriks A dan B berordo $m \times m$ dengan $m \in$ N. Jika det $(A) = |A|$ dan det $\left(A^{-1}\right) = \left|A^{-1}\right|$ maka

Masalah-2.9

Sebuah perusahaan penerbangan menawarkan perjalanan wisata ke negara A, perusahaan tersebut mempunyai tiga jenis pesawat yaitu Airbus 100, Airbus 200, dan Airbus 300. Setiap pesawat dilengkapi dengan kursi penumpang untuk kelas turis, ekonomi, dan VIP. Jumlah kursi penumpang dari tiga jenis pesawat tersebut disajikan pada tabel berikut.

Kategori	Airbus 100	Airbus 200	Airbus 300
Kelas Turis	50	75	40
Kelas Ekonomi	30	45	25
Kelas VIP	32	50	30

Perusahaan telah mendaftar jumlah penumpang yang mengikuti perjalanan wisata ke negara A seperti pada tabel berikut.

Kategori	Jumlah Penumpang
Kelas Turis	305
Kelas Ekonomi	185
Kelas VIP	206

Berapa banyak pesawat masing-masing yang harus dipersiapkan untuk perjalanan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan kita menyelesaikan masalah ini, kita misalkan:

x : banyaknya pesawat Airbus 100

y : banyaknya pesawat Airbus 200

z : banyaknya pesawat Airbus 300

Sistem persamaan yang terbentuk adalah:

$$\left.\begin{array}{l} 50x+75y+40z=305 \\ 30x+45y+25z=185 \\ 32x+50y+30z=206 \end{array}\right\} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$$

Sebelum ditentukan penyelesaian masalah di atas, terlebih dahulu kita periksa apakah matriks A adalah matriks tak singular.

Cara untuk menentukan det (A), dengan Metode Sarrus. berikut:

Misalnya matriks $A_{3\times 3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

Untuk matriks pada Masalah 4.9,

$$\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} 50 & 75 & 40 & 50 & 75 \\ 30 & 45 & 25 & 30 & 45 \\ 32 & 50 & 30 & 32 & 50 \end{array}\right. \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ & & + & + & + \end{array}$$

$$= (50.45.30) + (75.25.32) + (40.30.50) - (32.45.40) - (50.25.50) - (30.30.75)$$

$$= -100.$$

Analog dengan persamaan (2), kita akan menggunakan determinan matriks untuk menyelesaikan persoalan di atas.

Bantu siswa menentukan nilai x, y, dan z pada Masalah 4.9 dengan menggunakan cara determinan. Ingatkan siswa tentang penyelesaian sistem persamaan linear tiga peubah yang sudah dipelajari sebelumnya di Kelas X SMA.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 305 & 75 & 40 \\ 185 & 45 & 25 \\ 206 & 50 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-300}{-100} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 305 & 40 \\ 30 & 185 & 25 \\ 32 & 206 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-100}{-100} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 305 \\ 30 & 45 & 185 \\ 32 & 50 & 206 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-200}{-100} = 2$$

Oleh karena itu:
Banyak pesawat Airbus 100 yang disediakan sebanyak 3 unit
Banyak pesawat Airbus 200 yang disediakan sebanyak 1 unit
Banyak pesawat Airbus 300 yang disediakan sebanyak 2 unit.

- Analog dengan cara II untuk penyelesaian masalah Pembelian Tiket PRJ, coba kamu selesaikan masalah pengadaan pesawat ini dengan cara yang sama. Mintalah bimbingan dari gurumu.

c. Invers Matriks

Perhatikan Masalah-2.8 di atas, kamu dapat menyelesaikan masalah tersebut dengan cara berikut. Perhatikan sistem persamaan linier yang dinyatakan dalam matriks berikut,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70000 \\ 115000 \end{pmatrix} \leftrightarrow A.X = B \leftrightarrow X = A^{-1}.B.$$

Karena A adalah matriks tak singular, maka matriks A memiliki invers. Oleh karena itu, langkah berikutnya adalah menentukan matriks X.

$$X = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70000 \\ 115000 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -20000 \\ -5000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 \\ 5000 \end{pmatrix}$$

Diperoleh $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20000 \\ -5000 \end{pmatrix}$ $x = 20.000$ dan $y = 5.000$

Ditemukan jawaban yang sama dengan cara *I*. Tetapi perlu pertimbangan pemilihan cara yang digunakan menyelesaikan persoalannya.

- Mengajak siswa untuk menemukan aturan untuk menentukan invers sebuah matriks berordo 2 × 2 dengan meninjau kembali langkah-langkah pemecahan masalah di atas. Membuat kesepakatan terkait batasan persyaratan yang diperlukan untuk menentukan invers sebuah matriks.

Mengajak siswa untuk menemukan aturan untuk menentukan invers sebuah matriks berordo 2 × 2 dengan meninjau kembali langkah-langkah pemecahan masalah di atas. Membuat kesepakatan terkait batasan persyaratan yang diperlukan untuk menentukan invers sebuah matriks.

Misalkan A dan B adalah matriks yang memenuhi persamaan berikut.

$A.X = B$..(4)

Persoalan kita: bagaimana menentukan matriks X pada Persamaan (4)?

Pada teori dasar matriks, bahwa tidak ada operasi pembagian pada matriks, tetapi yang ada adalah invers matriks atau kebalikan matriks. Misalkan A matriks persegi, berordo 2 × 2, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Maka invers matriks A, dinotasikan $A^{(-1)}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{(a.d-b.c)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \text{ dengan } a.d. \neq b.c$$

$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ disebut adjoint matriks A, dinotasikan $adj(A)$.

Salah satu sifat invers matriks adalah $A^{(-1)}.A=A.A^{(-1)}=I$

Akibatnya persamaan (4) dapat dimodifikasi menjadi:

$A^{-1}.\ A.\ X=A^{-1}\ B$. (semua ruas dikalikan A^{-1}).

$(A^{-1}.A).\ X=A^{-1}\ B$

$I.X=A^{-1}\ B$

$X=A^{-1}\ B$ (karena $I.\ X=X$)..(5)

Rumusan ini berlaku secara umum, dengan syarat det (A) ≠ 0, namun ada beberapa teknik yang harus diperhatikan. Untuk selanjutnya akan dikaji pada subbab berikut.

Definisi 2.3

Misalkan A sebuah matriks persegi dengan ordo $n \times n$, $n \in N$.

- Matriks A disebut matriks tidak singular, apabila det$(A) \neq 0$.
- Matriks A disebut matriks singular, apabila det$(A) = 0$.
- A^{-1} disebut invers matriks A jika dan hanya jika $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dengan I adalah matriks identitas perkalian matriks.

Masalah-2.10

Agen perjalanan Sumatera Holidays menawarkan paket perjalanan ke Danau Toba, yaitu menginap di Inna Parapat Hotel, transportasi ke tiap tempat wisata, dan makan di Singgalang Restaurant. Paket perjalanan yang ditawarkan yaitu Paket I terdiri 4 malam menginap, 3 tempat wisata dan 5 kali makan dengan biaya Rp2.030.000,00. Paket II dengan 3 malam menginap, 4 tempat wisata dan 7 kali makan dengan biaya Rp1.790.000,00. Paket III dengan 5 malam menginap, 5 tempat wisata dan 4 kali makan dengan biaya Rp2.500.000,00. Berapakah biaya sewa hotel tiap malam, satu kali transportasi dan satu kali makan?

Organisasikan siswa untuk membangun cara menentukan invers matriks berordo 3×3 melalui langkah-langkah pemecahan masalah nyata yang diajukan. Arahkan siswa bekerjasama dalam kelompok belajar dan mendorong siswa berinteraksi secara multiarah untuk mengajukan ide-ide secara bebas terbuka.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan

x : biaya sewa hotel

y : biaya untuk transportasi

z : biaya makan

	Paket 1	Paket 2	Paket 3
Sewa hotel	4	3	5
Transportasi	3	4	5
Makan	5	7	4
Biaya Total	2.030.000	1.790.000	2.500.000

Dalam bentuk matriks adalah seperti berikut :

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2030000 \\ 1790000 \\ 2500000 \end{bmatrix}$$

Determinan untuk matriks masalah 2.10 di atas :

$$A=\begin{bmatrix}4&3&5\\3&4&5\\5&7&4\end{bmatrix} \text{ Maka det } A=\left|\begin{matrix}4&3&5\\3&4&5\\5&7&4\end{matrix}\right|\begin{matrix}4&3\\3&4\\5&7\end{matrix}$$

$$=(4\times4\times4)+(3\times5\times5)+(5\times3\times7)-(5\times4\times5)-$$
$$(4\times5\times7)-(3\times3\times4)=-32$$

$$x=\frac{\begin{bmatrix}2030000&3&5\\1790000&4&5\\2500000&7&4\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}4&3&5\\3&4&5\\5&7&4\end{bmatrix}}=-\frac{17520000}{-32}=547500$$

$$y=\frac{\begin{bmatrix}4&2030000&5\\3&1790000&5\\5&2500000&4\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}4&3&5\\3&4&5\\5&7&4\end{bmatrix}}=-\frac{18960000}{-32}=592500$$

$$z=\frac{\begin{bmatrix}4&3&2030000\\3&4&1790000\\5&7&2500000\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}4&3&5\\3&4&5\\5&7&4\end{bmatrix}}=-\frac{3740000}{-32}=116875$$

Organisasikan siswa mengamati sebuah matriks A, untuk menentukan matriks kofaktor A yang elemen-elemennya adalah nilai determinan sub bagian matriks A atau minor dari matriks A.

Oleh karena itu, biaya sewa hotel tiap malam adalah Rp547.500,00; biaya transportasi adalah Rp592.500,00; dan biaya makan adalah Rp116.875,00

Cobalah kamu selesaikan masalah tersebut dengan cara menentukan invers matriks. Mintalah bimbingan dari gurumu.

d. Metode Kofaktor

Terlebih dahulu kamu memahami tentang minor suatu matriks. Minor suatu matriks A dilambangkan dengan M_{ij} adalah determinan matriks bagian dari A yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar berordo $n \times n$, maka minor elemen a_{ij} yang dinotasikan dengan M_{ij}, didefinisikan sebagai determinan dari sub matriks A berordo $(n-1) \times (n-1)$ setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan.

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

minor elemen a_{11} adalah $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

sehingga $M_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

M_{11}, M_{12}, dan M_{13} merupakan submatriks hasil ekspansi baris ke–1 dari matriks A. Matriks kofaktor matriks A dilambangkan

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \text{ dan } c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{11}) = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -19$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13 \qquad c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 23$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -9 \qquad c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -13$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5 \qquad c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

Dari masalah di atas diperoleh matriks kofaktor A, dengan menggunakan rumus :

$$C(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -19 & 13 & 1 \\ 23 & -9 & -13 \\ -5 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriks adjoin dari matriks A adalah transpose dari kofaktor-kofaktor matriks tersebut, dilambangkan dengan adj(A) = $(C_{ij})^t$, yaitu:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^t = \begin{bmatrix} -19 & 23 & -5 \\ 13 & -9 & -5 \\ 1 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

Dari masalah 2.10 di atas, diperoleh inver matriks A. Dengan rumus :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A)$$

Sehingga:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A) = \frac{1}{-32}\begin{pmatrix} -19 & 23 & -5 \\ 13 & -9 & -5 \\ 1 & -13 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{32} & \frac{-23}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{-13}{32} & \frac{9}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{-1}{32} & \frac{13}{32} & \frac{-7}{32} \end{pmatrix}$$

Berdiskusilah dengan temanmu satu kelompok, coba tunjukkan bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dengan I adalah matriks identitas 3×3.

Bentuk matriks permasalahan 2.10 adalah

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2030000 \\ 1790000 \\ 2500000 \end{pmatrix}$$

Bentuk ini dapat kita nyatakan dalam bentuk persamaan $AX = B$. Untuk memperoleh matriks X yang elemen-elemennya menyatakan biaya sewa hotel, biaya transportasi dan biaya makan, kita kalikan matriks A^{-1} ke ruas kiri dan ruas kanan persamaan $AX = B$, sehingga diperoleh

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{19}{-13} & \frac{-23}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{-13}{32} & \frac{9}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{-1}{32} & \frac{13}{32} & \frac{-7}{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2030000 \\ 1790000 \\ 2500000 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 547500 \\ 592500 \\ 116875 \end{pmatrix}$$

Hasil yang diperoleh dengan menerapkan cara determinan dan cara invers, diperoleh hasil yang sama, yaitu; biaya sewa hotel tiap malam adalah Rp547.500,00; biaya transportasi adalah Rp592.500,00; dan biaya makan adalah Rp116.875,00.

Arahkan siswa menemukan sifat-sifat invers matriks melalui berbagai contoh-contoh dan meminta siswa untuk membuktikan sifat tersebut secara umum.

Berdasarkan langkah-langkah pemecahan masalah di atas, dapat disimpulkan

Sifat 2.6

Misalkan matriks A berordo n × n dengan n $\in$ N. Jika det(A) ≠ 0, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$ *adj* (A)dan $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, I adalah matriks identitas perkalian matriks

e. Sifat-Sifat Invers Matriks

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

det (A) = 2(-2) – 1(-3) = -1

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{\det(A^{-1})} adj(A^{-1}) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = A$$

Perhatikan uraian di atas diperoleh bahwa $(A^{-1})^{-1} = A$.

Coba buktikan sifat berikut setelah kamu mempelajari invers matriks

Sifat 2.7

Misalkan matriks A dan B berordo $m \times m$ dengan $m \in N$.
Jika det $(A) = |A|$ dan det $(A^{-1}) = |A^{-1}|$ maka $|A^{-1}| = 1/|A|$

Sifat 2.8

Misalkan matriks A dan B berordo $m \times m$ dengan $m \in N$. det(A) $\neq$ 0, Jika A^{-1} adalah invers matriks A, maka $(A^{-1})^{-1} = A$.

Perhatikan pertanyaan, apakah $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

det (A) = 2(-2) – 1(-3) = -1

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

det (B) = 0(-2) – 3(-1) = 3

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} adj(B) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian dipereloh det(AB) = -3 – 0 = -3.

Selanjutnya,

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)} Adj(AB) = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dari perhitungan di atas diperoleh $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Sifat 2.9

Misalkan matriks A dan B berordo $n \times n$ dengan $n \in N$. det(A) ≠ 0 dan det(B) ≠ 0, Jika A^{-1} dan B^{-1} adalah invers matriks A, dan B maka $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Coba kamu diskusikan dengan temanmu satu kelompok, apakah $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. Jika tidak, beri alasannya!.

Ajak siswa untuk mencoba menyelesaiakan berbagai soal-soal yang terdapat pada Uji Kompetensi 2.2 di samping. Soal-soal uji kompetensi ini bertujuan untuk mengetahui apakah siswa memahami tentang konsep determinan dan invers matriks. Soal-soal ini juga dapat diberikan sebagai tugas di rumah.

Uji Kompetensi 2.2

1. Misalkan A sebarang matriks persegi. Jika pertukaran elemen-elemen sebarang dua baris atau dua kolom dari matriks A, maka buktikan bahwa nilai determinannya berubah tanda.
2. Misalkan A sebarang matriks persegi. Buktikan bahwa jika semua unsur dalam suatu baris (atau kolom) matriks A dikalikan dengan sebuah bilangan $k \in R$, maka determinannya juga dikalikan dengan bilangan itu.
3. Jika B matriks persegi dengan det $(B) \times 0$, tunjukkan bahwa $\left[B^t\right]^{-1} = \left[B^{-1}\right]^t$.
4. Selidiki bahwa det (K^n)=(det K $)^n$, untuk matriks;

   a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ dengan $n = 2$

   b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ dengan $n = 6$

5. Diketahui $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ = -8, tentukanlah:

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$!

6. Tentukanlah nilai z yang memenuhi persamaan berikut!

$$\begin{vmatrix} z & -3 \\ 3 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & z & -6 \\ 1 & 3 & z-5 \end{vmatrix}.$$

7. Selidiki bahwa det $(C+D)$=det C + det D ! untuk setiap matrik C dan D merupakan matriks persegi. i.

8. Diberikan matriks M adalah matriks berordo 2×2, dengan $|M| \neq 0$. Tentukan hubungan $|M|$ dengan det (M^{-1}). Coba kamu generalisasikan untuk matriks M berordo $n \times n$!

9. Tentukanlah nilai z yang memenuhi persamaan berikut ini!

$$\begin{vmatrix} z & -1 \\ 3 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & z & -6 \\ 1 & 3 & z-5 \end{vmatrix}$$

10. Jika semua elemen baris ke-1 suatu matriks persegi adalah nol. Tentukanlah determinan matriks tersebut!

11. Diketahui matriks R adalah matriks berordo $n \times n$ dengan semua elemen kolom ke-1 adalah nol. Tentukanlah determinan matriks tersebut. Berikan juga contohnya!

12. Periksalah kebenaran setiap pernyataan berikut ini. Berikanlah contoh penyangkal untuk setiap pernyataan yang tidak berlaku!
    a) $\det(2A)=2.\det(A)$
    b) $|A^2|=|A|^2$
    c) $\det(I+A)=1+\det(A)$

13. Misalkan matriks-matriks P dan Q adalah matriks berordo $n \times n$, dengan $PQ \neq QP$. Apakah $\det(PQ) = \det(QP)$? Jelaskan!

14. Masalah Nutrisi
    Winarno bermaksud mengikuti ujian saringan masuk perwira. Setelah berkonsultasi dengan seorang perwira dan memperoleh saran mengenai pola makan yang hendak dikonsumsi lebih baik dimasak sendiri. Pengalaman perwira tersebut menyarankan untuk mencampurkan dua sumber zat gizi dalam jumlah yang berbeda untuk menghasilkan tiga jenis biskuit. Jumlah (dalam satuan gram) kalsium, protein, dan karbohidrat dalam setiap sumber gizi ditunjukkan oleh matriks G, dan jumlah (dalam satuan gram) setiap sumber zat gizi yang dikonsumsi dalam setiap biskuit ditunjukkan oleh matriks J.

$$G = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Sumber I} & \text{Sumber II} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 32 & 24 \\ 20 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Kalsium} \\ \text{Protein} \\ \text{Karbohidrat} \end{array} \qquad J = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Biskuit a} & \text{Biskuit b} & \text{Biskuit c} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 24 & 18 & 25 \\ 25 & 32 & 16 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Sumber I} \\ \text{Sumber II} \end{array}$$

    a) Tentukanlah jumlah kalsium dalam biskuit B!
    b) Hitunglah $G.J$ dan jelaskan arti setiap elemen matriks tersebut!

15. Masalah alokasi sumber daya.
    Agen perjalanan menawarkan paket perjalanan ke Bali. Paket I terdiri 4 malam menginap, 3 tempat wisata dan 5 kali makan. Paket II dengan 3 malam menginap, 4 tempat wisata dan 7 kali makan. Paket III dengan 5

malam menginap, 4 tempat wisata dan tidak ada makan. Sewa hotel Rp400.000,00 per malam, tranprotasi ke tiap tempat wisata Rp80.000,00, dan makan di restoran yang ditunjuk Rp90.000,00.

a. Nyatakan matriks harga sewa hotel, tranportasi dan makan.
b. Nyatakan matriks paket yang ditawarkan.
c. Dengan menggunakan perkalian matriks, tentukan matriks biaya untuk tiap paket.
d. Paket mana yang menawarkan biaya termurah?

16. Masalah Persediaan Toko Cat.

Sebuah toko penjual cat eceran memiliki persedian tiga jenis cat eksterior yaitu regular, deluxe, dan commercial. Cat-cat tersebut tersedia dalam empat pilihan warna yaitu, biru, hitam, kuning, dan coklat. Banyak penjualan cat (dalam gallon) selama satu minggu dicatat dalam matriks R, sedangkan inventaris toko pada awal minggu dalam matriks S berikut ini.

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Biru} & \text{Hitam} & \text{Kuning} & \text{Cokelat} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \textit{Regular} \\ \textit{Deluxe} \\ \textit{Commercial} \end{array}$$

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Biru} & \text{Hitam} & \text{Kuning} & \text{Cokelat} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \textit{Regular} \\ \textit{Deluxe} \\ \textit{Commercial} \end{array}$$

a) Tentukan inventaris toko pada akhir minggu
b) Jika toko tersebut menerima kiriman stok baru yang dicatat dalam matriks *T*. Tentukan inventaris toko yang baru.

17. Dengan menggunakan matriks persegi, tunjukkan bahwa $(B^{-1})^{-1} = B$ dan $[B^{t\,-1})=[B^{-1}]^{t}$!

18. Tentukanlah determinan dari matriks

$$M=\begin{bmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{bmatrix}!$$

19. Diberikan suatu sistem persamaan linier dua variabel

$$x+y=3$$
$$2x-y=0$$

20. Tentukanlah nilai x dan y yang memenuhi sistem tersebut dengan menggunakan konsep matriks.

Tugas proyek ini, sebagai tugas kelompok. Setelah tugas ini dikerjakan dalam waktu tertentu, minta siswa untuk menyajikan laporannya di depan kelas.Gunakan rubrik penilaian projek yang telah disajikan di bagain akhir buku ini.

Arahkan siswa membuat rangkuman dari materi yang sudah dipelajari. Uji pemahaman siswa terhadap penguasaan konsep dan sifat-sifat determinan dan invers matriks.

Projek

Rancang sebuah permasalahan terkait transportasi yang melibatkan determinan dan invers matriks. Beri bobot lintasan kenderaan dari sisi jarak atau biaya transportasi. Selesaikan tugas ini secara berkelompok. Buat laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Setelah telah selesai membahas materi matriks di atas, ada beberapa hal penting sebagai kesimpulan yang dijadikan pengangan dalam mendalami dan membahas materi lebih lanjut, antara lain:

1. Penjumlahan sebarang matriks dengan matriks identitas penjumlahan hasilnya matriks itu sendiri. Matriks identitas penjumlahan adalah matriks nol.
2. Dalam operasi penjumlahan dua matriks berlaku sifat komutatif dan assosiatif, misal jika A dan B adalah matriks, maka

a. $\underbrace{A+A+A+\cdots+A}_{k} = kA$

b. $A + B = B + A$

c. $A + I = I + A$, dengan I adalah matriks identitas penjumlahan matriks

d. $A + (B + C) = (A + B) + C$

3. Hasil kali sebuah matriks dengan suatu skalar atau suatu bilangan real k akan menghasilkan sebuah matriks baru yang berordo sama dan memiliki elemen-elemen k kali elemen-elemen matriks semula.

4. Dua matriks hanya dapat dikalikan apabila banyaknya kolom matriks yang dikali sama dengan banyaknya baris matriks pengalinya.

5. Matriks A dan B dapat dikalikan apabila banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B. Hasil kali matriks A dan B menghasilkan matriks C yang elemen-elemennya merupakan hasil kali elemen baris matriks A dan elemen kolom matriks B, ditulis $A_{p \times q} \times B_{q \times r} = C_{p \times r}$.

6. Hasil perkalian matriks A dengan matriks identitas, hasilnya adalah matriks A.

7. Perkalian dua atau lebih matriks, tidak memenuhi sifat komutatif. Tetapi perkalian matriks memenuhi sifat asosiatif.

8. Matriks yang memiliki invers adalah matriks persegi dengan nilai determinannya tidak nol (0).

Catatan:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bab
3

FUNGSI KOMPOSISI DAN FUNGSI INVERS

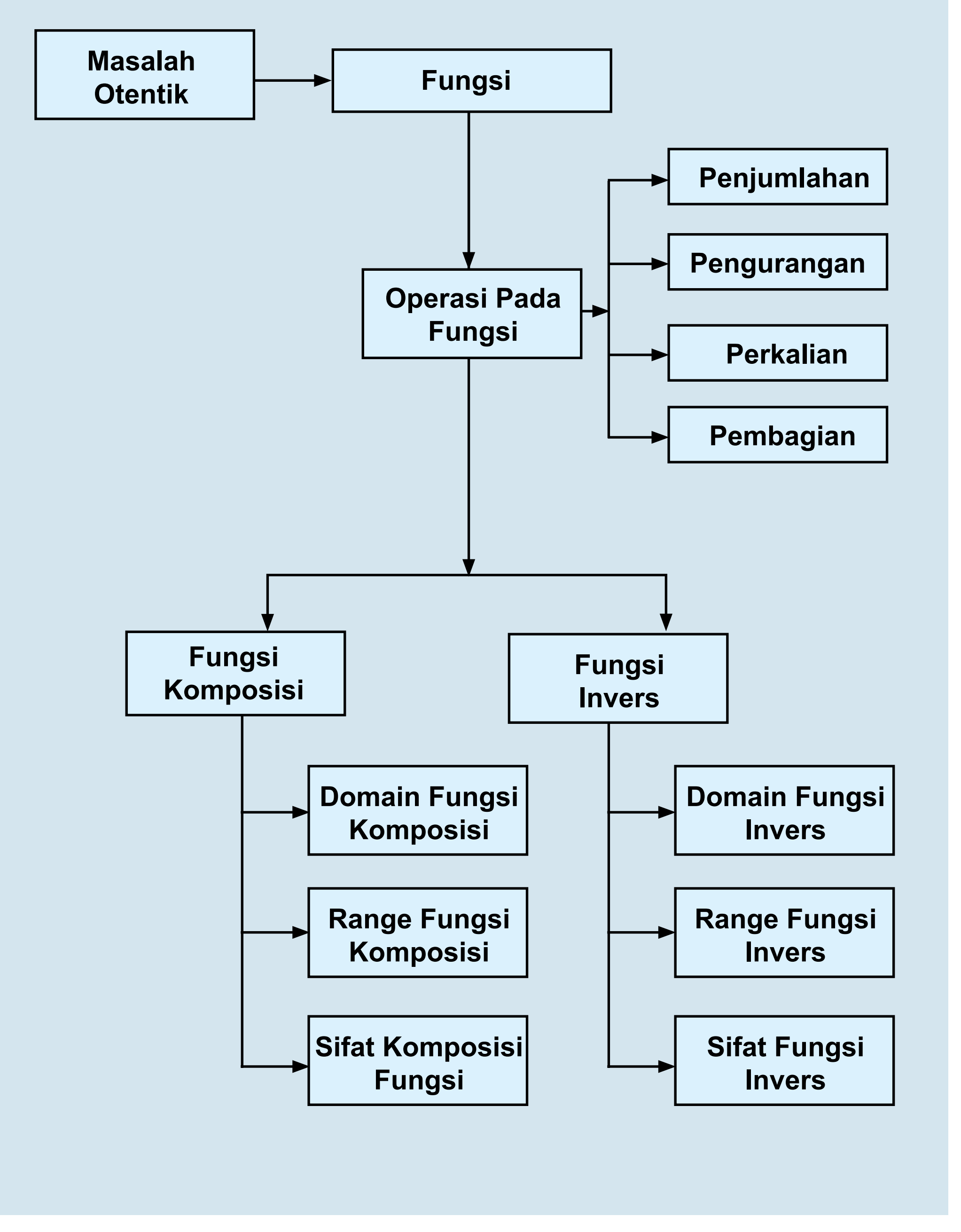
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1. Mendeskripsikan konsep fungsi dan menerapkan operasi aljabar (penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian) pada fungsi. 2. Menganalisis konsep dan sifat suatu fungsi dan melakukan manipulasi aljabar dalam menentukan invers fungsi dan fungsi invers. 3. Mendeskripsikan dan menganalisis sifat suatu fungsi sebagai hasil operasi dua atau lebih fungsi yang lain. 4. Mendeskripsikan konsep komposisi fungsi dengan menggunakan konteks sehari-hari dan menerapkannya. 5. Mengolah data masalah nyata dengan menerapkan aturan operasi dua fungsi atau lebih dan menafsirkan nilai variabel yang digunakan untuk memecahkan masalah. 6. Memilih strategi yang efektif dan menyajikan model matematika dalam memecahkan masalah Nyata terkait fungsi invers dan invers fungsi. 6. Merancangdan mengajukan masalah dunia nyata yang berkaitan dengan Komposisi fungsi dan menerapkan berbagai aturan dalam menyelesaikannya.	Melalui pembelajaran materi fungsi komposisi dan fungsi invers, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Menjelaskan karakteristik masalah autentik yang penyelesaiannya terkait dengan fungsi komposisi dan fungsi invers. • Merancang model matematika dari permasalahan autentik yang merupakan fungsi komposisi dan fungsi invers. • Menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan. • Menginterpretasikan hasil penyelesaian masalah yang diberikan. • Menuliskan konsep fungsi komposisi dan fungsi invers berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri.

Istilah Penting

- *Fungsi*
- *Fungsi komposisi*
- *Fungsi invers*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Pada Bab 5 kelas X, kita telah mempelajari konsep relasi dan fungsi. Konsep tersebut merupakan materi prasyarat dalam mempelajari materi pada bab ini. Kita mempelajari dan menemukan konsep fungsi komposisi dan fungsi invers dengan melakukan pengamatan dan pemahaman pada beberapa masalah dan contoh. Pertama sekali, mari kita memahami operasi aljabar pada fungsi.

1. Operasi Aljabar Pada Fungsi

Pada subbab ini, kita akan mempelajari operasi aljabar (penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada fungsi). Perhatikan masalah berikut.

Masalah-3.1

Seorang photografer dapat menghasilkan gambar yang bagus melalui dua tahap, yaitu; tahap pemotretan dan tahap *editing*. Biaya yang diperlukan pada tahap pemotretan (B_1) adalah Rp500,- per gambar, mengikuti fungsi: $B_1(g) = 500g + 2500$ dan biaya pada tahap *editing* (B_2) adalah Rp100,- per gambar, mengikuti fungsi: $B_2(g) = 100g + 500$, dengan g adalah banyak gambar yang dihasilkan.

a) Berapakah total biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 10 gambar dengan kualitas yang bagus?
b) Tentukanlah selisih antara biaya pada tahap pemotretan dengan biaya pada tahap *editing* untuk 5 gambar.

Alternatif Penyelesaian

Fungsi biaya pemotretan: $B_1(g) = 500g + 2500$

Fungsi biaya editing: $B_2(g) = 100g + 500$

Untuk menemukan konsep operasi pada fungsi, ajukan pada siswa Masalah 3.1 untuk dipecahkan. Upayakan siswa lebih dahulu berusaha memikirkan, bersusah payah mencari ide-ide, berdiskusi dalam kelompok, mencari pemecahan masalah di dalam kelompok. Guru boleh memberikan bantuan pada siswa, tetapi upayakan mereka sendiri yang berusaha menuju tingkat pemahaman dan proses berpikir yang lebih tinggi.

Masalah 3.1 diberikan sebagai pengantar agar siswa memahami operasi pada fungsi. Minta siswa untuk menyelesaikan dengan caranya sendiri. Jika siswa mengalami kesulitan arahkan siswa untuk memahami tentang fungsi yang telah dipelajari sebelumnya.

a) Untuk menghasilkan gambar yang bagus, harus dilalui 2 tahap proses yaitu pemotretan dan *editing*, sehingga fungsi biaya yang dihasilkan adalah:

$$B_1(g) + B_2(g) = (500g + 2500) + (100g + 500) = 600g + 3000$$

Total biaya untuk menghasilkan 10 gambar (g = 10) adalah:

$B_1(g) + B_2(g) = 600g + 3000$

$B_1(10) + B_2(10) = (600 \times 10) + 3000$

$= 9000$

Jadi total biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 10 gambar dengan kualitas yang bagus adalah Rp9000,-

b) Selisih biaya tahap pemotretan dengan tahap *editing* adalah:

$B_1(g) - B_2(g) = (500g + 2500) - (100g + 500)$

$= 400g + 2000$

Selisih biaya pemotretan dengan biaya *editing* untuk 5 gambar (g = 5) adalah:

$B_1(g) - B_2(g) = 400g + 2000$

$B_1(5) - B_2(5) = (400 \times 5) + 2000$

$= 4000$

Jadi selisih biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 5 gambar dengan kualitas yang bagus adalah Rp4000,-

Arahakan siswa memahami proses $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ berdasarkan proses di samping

Perhatikan jumlah biaya pada bagian (a) dan selisih biaya pada bagian (b).

$B_1(g) = 500g + 2500$ sehingga $B_1(5) = 5000$ dan $B_1(10) = 7500$.

$B_2(g) = 100g + 500$ sehingga $B_2(5) = 1000$ dan $B_2(10) = 1500$

$B_J(g) = B_1(g) + B_2(g) = 600g + 3000$ sehingga $B_J(10) = 9000$ dan $B_1(10) + B_2(10) = 7500 + 1500 = 9000$

Demikian juga,

$B_S(g) = B_1(g) - B_2(g) = 400g + 2000$ sehingga $B_S(5) = 4000$ dan $B_1(5) - B_2(5) = 5000 - 1000 = 4000$.

Definisi 3.1

Jika f suatu fungsi dengan daerah asal D_f dan g suatu fungsi dengan daerah asal D_g, maka pada operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dinyatakan sebagai berikut.

a) Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.

b) Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.

c) Perkalian f dan g ditulis $f \times g$ didefinisikan sebagai $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ dengan daerah asal $D_{f\times g} = D_f \cap D_g$.

d) Pembagian f dan g ditulis $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$.

Guru bersama-sama dengan siswa menemukan 4 aturan yang terkait dengan operasi penjumlahan dua fungsi, selisih dua fungsi, perkalian dua fungsi, dan pembagian dua fungsi seperti yang ditulis pada Definisi 3.1 dengan catatan jika terdapat dua buah fungsi maka

Contoh 3.1

Diketahui fungsi $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = x^2 - 9$. Tentukanlah fungsi-fungsi berikut dan tentukan pula daerah asalnya!

a) $(f + g)(x)$

b) $(f + g)(x)$

c) $(f \times g)(x)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Guru memberikan Contoh 3.1 pada siswa yang bertujuan untuk membiasakan siswa melakukan operasi aljabar pada fungsi. Guru dapat memberikan contoh-contoh lain yang sesuai.

Pandu siswa memahami proses penyelesaian di-samping dengan meman-faatkan Definisi 3.1

Alternatif Penyelesaian

Daerah asal fungsi $f(x) = x + 3$ adalah $D_f = \{x|x \in R\}$ dan daerah asal fungsi $g(x) = x^2 - 9$ adalah $D_g = \{x|x \in R\}$

a) $$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (x+3) + (x^2 - 9)\\ &= x^2 + x - 6\end{aligned}$$

Daerah asal fungsi $(f + g)(x)$ adalah:

$$\begin{aligned}D_{f+g} &= D_f \cap D_g\\ &= \{x|x \in R\} \cap \{x|x \in R\}\\ &= \{x|x \in R\}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (x+3) - (x^2 - 9)\\ &= -x^2 + x + 12\end{aligned}$$

Daerah asal fungsi $(f - g)(x)$ adalah:

$$\begin{aligned}D_{f-g} &= D_f \cap D_g\\ &= \{x|x \in R\} \cap \{x|x \in R\}\\ &= \{x|x \in R\}\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}(f \times g)(x) &= f(x) \times g(x)\\ &= (x + 3) \times (x^2 - 9)\\ &= x^3 + 3x^2 - 9x - 27\end{aligned}$$

Daerah asal fungsi $(f \times g)(x)$ adalah

$$\begin{aligned}D_{f\times g} &= D_f \cap D_g\\ &= \{x|x \in R\} \cap \{x|x \in R\}\\ &= \{x|x \in R\}\end{aligned}$$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$= \frac{x+3}{x^2-9}$$

$$= \frac{x+3}{(x+3)\times(x-3)}$$

$$= \frac{1}{x-3},\ x \neq -3,\ x \neq 3$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g dan\ g(x) \neq 0$$

$$= \left\{x \middle| x \in R\right\} \cap \left\{x \middle| x \in R\right\} dan\ x^2 - 9 \neq 0$$

$$= \left\{x \middle| x \in R\right\} dan (x+3)(x-3) \neq 0$$

$$= \left\{x \middle| x \in R\right\} dan\ x \neq -3, x \neq 3$$

$$= \{x | x \in R,\ x \neq -3, x \neq 3\}$$

Latihan

Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ dan $g(x) = \sqrt{x-2}$. Tentukanlah fungsi-fungsi berikut dan tentukan pula daerah asalnya!

a) $(f+g)(x)$ c) $(f \times g)(x)$

b) $(f-g)(x)$ d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

Berikan Latihan ini kepada siswa dan minta siswa untuk menyelesaikannya secara individual. Latihan ini bertujuan untuk melihat kompetensi siswa tentang konsep operasi fungsi yang didefinisikan di Definisi 3.1

Alternatif Penyelesaian

a) $(f+g)(x) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2}$

b) $(f-g)(x) = \sqrt{x^2-4} - \sqrt{x-2}$

c) $(f \times g)(x) = \left(\sqrt{x^2-4}\right)\left(\sqrt{x-2}\right)$

$$= (x-2)\left(\sqrt{x+2}\right)$$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{\left(\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x+2}$

Pandu siswa menentukan daerah asal masing-masing fungsi

(Menentukan daerah asal diserahkan pada siswa; lihat Definisi 3.1)

Setelah operasi aljabar dipahami oleh siswa, selanjutnya guru memberikan Masalah 3.2 pada siswa. Masalah ini berkaitan dengan penukaran mata uang, guru memberikan penjelasan bahwa penukaran uang dapat berbentuk uang elektronik sehingga nilai uang Rp 3.169,54 dapat diterima oleh siswa.

2. Menemukan Konsep Fungsi Komposisi

Setelah kita memahami operasi aljabar pada fungsi, maka pada subbab ini, kita akan membicarakan fungsi komposisi dari suatu fungsi. Untuk mendapatkan konsep fungsi komposisi, kamu pahami dan pelajarilah beberapa masalah kasus dan contoh-contoh berikut.

Masalah-3.2

Suatu bank di Amerika menawarkan harga tukar Dollar Amerika (USD) ke Ringgit Malaysia (MYR), yaitu; 1 USD = 3,28 MYR, dengan biaya penukaran sebesar 2 USD untuk setiap transaksi penukaran. Kemudian salah satu bank di Malaysia menawarkan harga tukar ringgit Malaysia (MYR) ke Rupiah Indonesia (IDR), yaitu; 1 MYR = Rp3.169,54, dengan biaya penukaran sebesar 3 MYR untuk setiap transaksi penukaran.
Seorang turis asal Amerika ingin bertamasya ke Malaysia kemudian melanjutkannya ke Indonesia dengan membawa uang sebesar 2.000 USD.
Berapa IDR akan diterima turis tersebut jika pertama dia menukarkan semua uangnya ke mata uang Ringgit Malaysia di Amerika dan kemudian menukarnya ke Rupiah Indonesia di Malaysia?

Alternatif Penyelesaian

Masalah ini dapat diselesaikan dua tahap penukaran.

Langkah 1:

Uang sebesar 2.000 USD akan ditukar ke Ringgit Malaysia di Amerika dengan biaya penukaran sebesar 2 USD, maka jumlah uang yang diterima turis tersebut adalah:

(2.000 – 2) × 3,28 MYR = 1.998 × 3,28 MYR = 6.553,44 MYR

Langkah 2:

Uang sebesar 6.553,44 MYR akan ditukar ke mata uang Rupiah Indonesia, dan perlu di ingat bahwa biaya penukaran sebesar 3 MYR. Uang yang diterima turis tersebut adalah:

(6.553,44 – 3) × 3.169,54 = 6.550,44 × 3.169,54 = 20.761.881,60 IDR

Turis tersebut menerima uang rupiah Indonesia sebesar 20.761.881,60 IDR.

Perhitungan kedua transaksi di atas dapat kita buat model matematikanya ke dalam dua fungsi sebagai berikut.

Misalkan :

t = jumlah uang dalam USD

x = jumlah uang dalam MYR

y = jumlah uang dalam IDR

Transaksi penukaran pertama dapat kita tuliskan dengan

$x = 3{,}28\ (t - 2)$

$x = 3{,}28\ t - 6{,}56$

karena x merupakan sebuah fungsi t, maka dapat ditulis:

$x\ (t) = 3{,}28\ t - 6{,}56$.. (1)

Untuk transaksi penukaran kedua dapat ditulis sebagai berikut.

$y = 3.169{,}54\ (x - 3)$

$y = 3.169{,}54\ x - 9.508{,}62$

karena y fungsi dari x, maka dapat ditulis

$y\ (x) = 3.169{,}54\ x - 9.508{,}62$....................................(2)

Dengan mensubstitusi persamaan 1 ke persamaan 2 kita peroleh:

$$
\begin{aligned}
y\ (x) &= y(x(t)), \text{ misal } f\ (t) = y(x(t)), \text{ maka}\\
f\ (t) &= y(x(t))\\
&= 3.169{,}54\ (3{,}28\ t - 6{,}56) - 9.508{,}62\\
&= 10.396{,}09\ t\ - 20792.18\ - \ 9.508{,}62\\
f\ (t) &= 10.396{,}09\ t\ - 30.300{,}80
\end{aligned}
$$

Fungsi $f(t) = y(x(t))$ ini merupakan fungsi komposisi x dan y dalam t yang dilambangkan dengan $(y \circ x)(t)$ dan didefinisikan dengan $(y \circ x)(t) = y(x(t))$.

Maka fungsi komposisi x dan y pada masalah di atas adalah

$(y \circ x)\ (t) = 10.396{,}09\ t - 30.300{,}80$..............................(3)

Dengan menggunakan fungsi komposisi $(y \circ x)(t)$ seperti pada persamaan 3, maka dapat kita hitung jumlah uang turis tersebut dalam mata uang rupiah Indonesia untuk $t = 2000$ USD seperti berikut.

$$\begin{aligned}(y \circ x)(t) &= 10.396{,}09\ t - 30.300{,}80\\ &= 10.396{,}09 \times (2.000) - 30.300{,}80\\ &= 20.792.180 - 30.300{,}80\\ &= 20.761.881{,}60\end{aligned}$$

Jumlah uang turis tersebut dalam rupiah adalah Rp20.761.881,60 Perhatikan bahwa hasilnya sama dengan langkah pertama yang kita lakukan.

Agar kamu lebih memahami fungsi komposisi, perhatikanlah masalah berikut.

Arahkah siswa bahwa dengan menggunakan konsep fungsi komposisi banyak masalah yang dapat diselesaikan. Agar siswa lebih memahami fungsi komposisi, berikan Masalah 3.3 berikut. Masalah ini melibatkan proses sebuah pabrik mengolah kayu untuk dijadikan kertas. Diharapkan dengan diselesaikannya masalah ini akan membantu siswa untuk membuat konsep tentang fungsi komposisi.

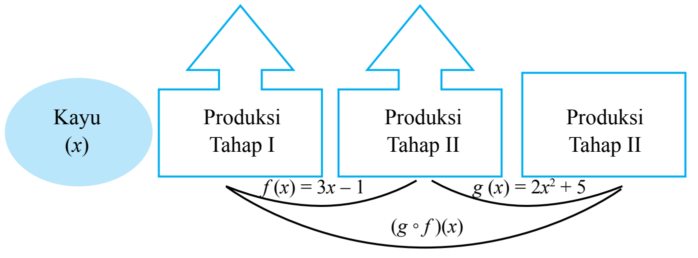
Masalah-3.3

Suatu pabrik kertas berbahan dasar kayu memproduksi kertas melalui dua tahap. Tahap pertama dengan menggunakan mesin I yang menghasilkan bahan kertas setengah jadi, dan tahap kedua dengan menggunakan mesin II yang menghasilkan kertas. Dalam produksinya mesin I menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi $f(x) = 0{,}9x - 1$ dan mesin II mengikuti fungsi $g(x) = 0{,}02x^2 - 2{,}5x$, dengan x merupakan banyak bahan dasar kayu dalam satuan ton. Jika bahan dasar kayu yang tersedia untuk suatu produksi sebesar 200 ton, berapakah kertas yang dihasilkan? (kertas dalam satuan ton).

Alternatif Penyelesaian

Minta siswa memberi komentar atau pendapat tentang Gambar 3.1

Tahap-tahap produksi pabrik kertas tersebut dapat kita gambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.1. Tahapan Produksi Pabrik Kertas

Dari Gambar 3.1. di atas, terlihat jelas bahwa tahap produksi kertas terdiri atas dua tahap. Hasil produksi setiap tahap kita hitung sebagai berikut

Hasil produksi tahap I

Rumus fungsi pada produksi tahap I adalah: $f(x) = 0{,}9x - 1$

Untuk $x = 200$, diperoleh:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0{,}9x - 1\\
&= 0{,}9(200) - 1\\
&= 179
\end{aligned}
$$

Maka hasil produksi tahap I adalah 179 ton bahan kertas setengah jadi.

Hasil produksi tahap II

Rumus fungsi pada produksi tahap II adalah:

$g(x) = 0{,}02x^2 - 2{,}5x$

Karena hasil produksi pada tahap I akan dilanjutkan pada produksi tahap II, maka hasil produksi tahap I menjadi bahan dasar produksi tahap II, sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 0{,}02x^2 - 2{,}5x\\
&= 0{,}02(200)^2 - 2{,}5(200)\\
&= 640{,}82 - 447{,}5\\
&= 193{,}32
\end{aligned}
$$

Dengan demikian hasil produksi tahap II adalah 193,32 ton bahan jadi kertas.

Hasil produksi yang dihasilkan pabrik kertas tersebut jika bahan dasar kayunya sebanyak 200 ton adalah 193,32 ton bahan jadi kertas.

Masalah 3.3 di atas dapat kita selesaikan dengan menggunakan cara yang berbeda sebagai berikut.

Diketahui fungsi-fungsi produksi berikut.

$f(x) \quad = 0{,}9x - 1$..(1)

$g(x) \quad = 0{,}02x^2 - 2{,}5x$...(2)

dengan mensubstitusikan persamaan 1 ke persamaan 2, kita peroleh fungsi

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= 0{,}02(0{,}9x - 1)^2 - 2{,}5(0{,}9x - 1) \\ &= 0{,}02(0{,}81x^2 - 1{,}8x+1) - 2{,}5(0{,}9x - 1) \\ &= 0{,}0162\, x^2 - 0{,}036x + 0{,}02 - 2{,}25x + 2{,}5 \\ &= 0{,}0162\, x^2 - 2{,}286x + 2{,}52 \end{aligned}$$

Kita peroleh fungsi

$g(f(x)) = 0{,}0162\, x2 - 2{,}286x + 2{,}52$.................................(3)

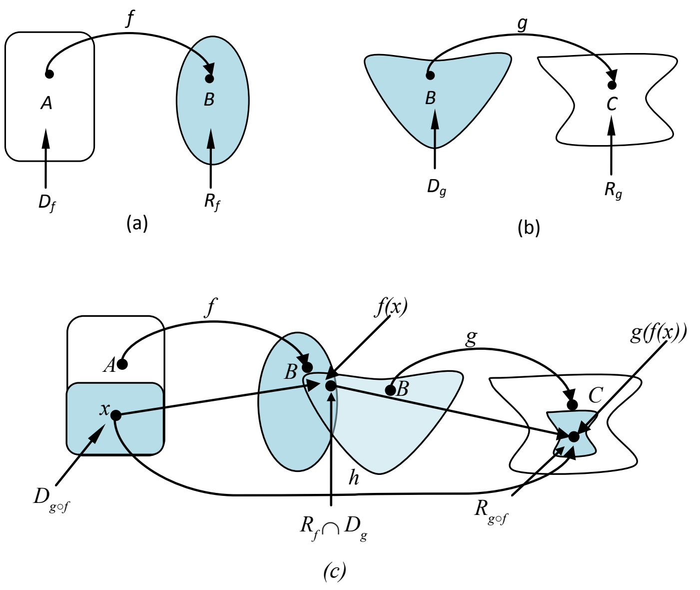
Jika disubstitusikan nilai x = 200 ke persamaan 3, kita peroleh:

$$\begin{aligned} g\,(f\,(x)) &= 0{,}0162\, x^2 - 2{,}286x + 2{,}52 \\ &= 0{,}0162\,(200)^2 - 2{,}286(200) + 2{,}52 \\ &= 648 - 457{,}2 + 2{,}52 \\ &= 193{,}32 \end{aligned}$$

Terlihat bahwa hasil produksi sebesar 193,32 ton. Nilai ini sama hasilnya dengan hasil produksi dengan menggunakan perhitungan cara pertama di atas.

Nilai $g(f(x))$ merupakan nilai suatu fungsi yang disebut fungsi komposisi f dan g dalam x yang dilambangkan dengan $g \circ f$. Karena itu nilai $g \circ f$ di x ditentukan dengan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Perhatikan Gambar 3.2 berikut.



Gambar 3.2. Fungsi Komposisi

Berdasarkan Gambar 3.2 di atas dapat dikemukakan beberapa hal berikut.

1) D_f = daerah asal fungsi f; R_f = daerah hasil fungsi f; D_g = daerah asal fungsi g; R_g = daerah hasil fungsi g; $D_{g\circ f}$ = daerah asal fungsi komposisi $g \circ f$; = daerah hasil fungsi komposisi $g \circ f$
2) Fungsi f memetakan himpunan A ke himpunan B, ditulis $f: A \to B$.
   Setiap unsur $x \in D_f$ dipetakan ke $y \in R_f$ dengan fungsi $y = f(x)$. Perhatikan Gambar 3.2(a).
3) Fungsi g memetakan himpunan B ke himpunan C, ditulis $g : B \to C$.
   Setiap unsur $y \in D_g$ dipetakan ke $z \in R_g$ dengan fungsi $z = g(y)$. Perhatikan Gambar 3.2(b).
4) Fungsi h memetakan himpunan A ke himpunan C melalui himpunan B, ditulis: $h: A \to C$. Setiap unsur $x \in D_h$ dipetakan ke $z \in h$ dengan fungsi $z = h(x)$. Perhatikan Gambar 3.2(c).

Guru meminta siswa untuk mengamati Gambar 3.2 dan memahami arti dari gambar tersebut. Berdasarkan pengamatan yang dilakukan siswa, minta siswa untuk menjelaskan maksud dari gambar itu dan siswa lain mendengarkan dan bertanya tentang hal-hal yang tidak dimengerti dan tidak benar terkait dengan penjelasan temannya. Jika siswa mengalami kesulitan guru boleh memberikan bantuan berupa pertanyaan-pertanyaan terkait daerah asal dan daerah hasil dari dua fungsi.

Berdasarkan beberapa hal di atas kita peroleh definisi berikut.

Guru bersama-sama dengan siswa membuat Definisi 3.2 dan diharapkan guru dapat memastikan bahwa semua siswa dapat memahami definisi itu dengan baik. Jika siswa mengalami kesulitan minta siswa untuk mengingat kembali tentang beberapa konsep dan prinsip Himpunan.

Definisi 3.2

Jika *f* dan g fungsi dan $R_f \cap D_g \neq \varnothing$, maka terdapat suatu fungsi *h* dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g yang disebut fungsi komposisi *f* dan *g* (ditulis: $g \circ f$) yang ditentukan dengan

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

daerah asal fungsi komposisi *f* dan *g* adalah,

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g \right\}$$

dengan

D_f = daerah asal (domain) fungsi *f*; D_g = daerah asal (*domain*) fungsi *g*;

R_f = daerah hasil (range) fungsi *f*; R_g = daerah hasil (*range*) fungsi *g*.

Pertanyaan kritis!

Untuk fungsi komposisi *f* dan *g* atau $g \circ f$.

1) Apa akibatnya jika $R_g \cap D_f = 0$? Mengapa?
2) Bagaimana hubungan $D_{g \circ f}$ dengan D_f? Apakah $D_{g \circ f} \subseteq D_f$? Mengapa?
3) Bagaimana hubungan dengan R_g? Apakah $R_{g \circ f} \subseteq R_g$? Mengapa?

Untuk lebih memahami konsep fungsi komposisi, perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.2

Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = 2x + 1$ dan fungsi g: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $g(x) = x^2 - 1$.

1) Apakah fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ terdefinisi?
2) Tentukan fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$!

Berikan Contoh 3.2 kepada siswa untuk melatih siswa memahami tentang konsep fungsi komposisi. Contoh ini terdiri atas satu fungsi linear dan satu fungsi kuadrat.

Alternatif Penyelesaian

$f(x) = 2x + 1$; $g(x) = x^2 - 1$

$D_f = \{ x \mid x \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R}$; $R_f = \{ y \mid y \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R}$

$D_g = \{ x \mid x \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R}$; $R_g = \{ y \mid y \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R}$

(1) Untuk menentukan apakah fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ terdefinisi, diketahui berdasarkan:

- Jika $R_f \in Dg \neq \emptyset$ maka $(g \circ f)(x)$ terdefinisi.
  $\{ y \mid y \in R\} \cap \{ x \mid x \in R\} = R \cap R = R \neq \emptyset$, karena $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ maka $(g \circ f)(x)$ terdefinisi.
- Jika $R_g \in D_f \neq 0$ maka $(f \circ g)(x)$ terdefinisi.
  $\{ y \mid y \in R\} \cap \{ x \mid x \in R\} = R \cap R = R \neq \emptyset$, karena $Rg \cap D_f \neq \emptyset$ maka $(f \circ g)(x)$ terdefinisi.

(2) Untuk menentukan apakah fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ terdefinisi, sebagai berikut:

- $$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x + 1)\\ &= (2x + 1)^2 - 1\\ &= (4x^2 + 4x + 1) - 1\\ &= 4x^2 + 4x\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(x^2 - 1)\\ &= 2(x^2 - 1) + 1\\ &= 2x^2 - 2 + 1\\ &= 2x^2 - 1\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1$.

Perhatikan kembali Contoh 3.2 di atas! Contoh tersebut diberikan untuk menentukan fungsi komposisi jika fungsi-fungsi yang lain telah diketahui. Berikut ini diberikan contoh bagaimana menentukan fungsi jika diketahui fungsi komposisi dan suatu fungsi yang lain.

Berikan Contoh 3.3 kepada siswa untuk melatih siswa memamahi tentang konsep fungsi komposisi. Keduanya merupakan fungsi kuadrat yang ditampilkan pada contoh ini.

Contoh 3.3

Diketahui fungsi komposisi $(g \circ f)(x) = 18x^2 + 24x + 2$ dan fungsi $g(x) = 2x^2 - 6$. Tentukanlah rumus untuk

a) fungsi $f(x)$

b) fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$!

Alternatif Penyelesaian

Jika diketahui $(g \circ f)(x) = 18x^2 + 24x + 2$ dan $g(x) = 2x^2 - 6$

a) Menentukan fungsi $f(x)$

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= 18x^2 + 24x + 2 \\
\Leftrightarrow 2f(x)^2 - 6 &= 18x^2 + 24x + 2 \\
\Leftrightarrow 2f(x)^2 &= 18x^2 + 24x + 2 + 6 \\
\Leftrightarrow f(x)^2 &= \frac{18x^2 + 24x + 8}{2} \\
\Leftrightarrow f(x)^2 &= 9x^2 + 12x + 4 \\
\Leftrightarrow f(x) &= \pm\sqrt{9x^2 + 12x + 4} \\
\Leftrightarrow f(x) &= \pm(3x + 2)
\end{aligned}
$$

Jadi ada dua fungsi f yang mungkin, yaitu; $f(x) = 3x + 2$ dan $f(x) = -3x - 2$.

b) Menentukan fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 18x^2 + 24x + 2$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= -3\,g(x) - 2, \text{ karena } f(x) = -3x - 2 \\ &= -3\,(2x^2 - 6) - 2 \\ &= -6x^2 + 18 - 2 \\ &= -6x^2 + 16\end{aligned}$$

Jadi, fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = -6x^2 + 16$

Pertanyaan kritis!

Guru memberikan pertanyaan-pertanyaan kritis berikut untuk memunculkan rasa ingin tahu siswa.

Untuk fungsi komposisi f dan g atau $g \circ f$.

1) Apa akibatnya jika $R_f \cap D_g = \emptyset$?

Alternatif Penyelesaian

Jika $R_f \cap D_g = \emptyset$ maka f dan g tidak dapat dikomposisikan sebab domain fungsi komposisi f dan g adalah himpunan kosong.

2) Bagaimana hubungan $D_{g \circ f}$ dengan D_f? Apakah $D_{g \circ f} \subseteq D_f$? Mengapa?

untuk soal nomor 2), setelah menyelesaikan $f \circ g$ tanyakan pada siswa apakah $D_{g \circ f} \subseteq D_f$

Alternatif Penyelesaian

Berikan dua fungsi berikut

$f(x) = \sqrt{x+3}$ dan $g(x) = x^2$ minta siswa menyelesaikan $g \circ f$

3) Bagaimana hubungan $R_{g \circ f}$ dengan R_g? Apakah $R_{g \circ f} \subseteq R_g$? Mengapa?

untuk soal nomor 3), setelah menyelesaikan $f \circ g$ tanyakan pada siswa apakah $R_{g \circ f} \subseteq R_f$

Alternatif Penyelesaian

Berikan dua fungsi berikut

$f(x) = 2x$ dan $g(x) = \tan x$, minta siswa untuk menyelesaikan $g \circ f$

3. Sifat-sifat Operasi Fungsi Komposisi

Lakukanlah pengamatan pada beberapa contoh soal berikut untuk menentukan sifat-sifat operasi fungsi komposisi. Dari pengamatan yang kamu lakukan, tariklah sebuah kesimpulan terkait sifat operasi fungsi komposisi.

Minta siswa untuk mengamati Contoh 3.4 yang diberikan. Minta salah seorang siswa untuk menjelaskan penyelesaian dari contoh yang diberikan. Dengan diselesaikannya contoh ini diharapkan siswa dapat mengetahui bahwa dalam operasi fungsi komposisi tidak berlaku sifat komutatif, yaitu $g \circ f \neq f \circ g$.

Contoh 3.4

Diketahui fungsi f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 4x + 3$ dan fungsi g: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $g(x) = x-1$.

a) Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$

b) Selidiki apakah $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$!

Alternatif Penyelesaian

a) Menentukan rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$

* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$= g(4x + 3)$
$= (4x + 3) - 1$
$= 4x + 2$

* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= f(x - 1)$
$= 4(x - 1) + 3$
$= 4x - 4 + 3$
$= 4x - 1$

Dengan demikian $(g \circ f)(x) = 4x + 2$ dan $(f \circ g)(x) = 4x - 1$.

b) Selidiki apakah $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$!

Berdasarkan hasil perhitungan butir (a) di atas diperoleh
$(g \circ f)(x) = 4x + 2$, dan
$(f \circ g)(x) = 4x - 1$
Andaikan $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$
$4x + 2 = 4x - 1$
$2 = -1$
Ternyata hasil yang diperoleh adalah kontradiksi dari pernyataan.

Jadi, $g \circ f \neq f \circ g$

Berdasarkan Contoh 3.4 di atas, disimpulkan bahwa pada umumnya sifat komutatif pada operasi fungsi komposisi tidak berlaku, yaitu; $g \circ f \neq f \circ g$.

Contoh 3.5

Ajukan Contoh 2.5 kepada siswa.
Pandu siswa memahami proses penyelesaian disamping

Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = 2x - 1$ dan fungsi g: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan $g(x) = 4x+5$, dan fungsi h: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan $h(x) = 2x - 3$.

a) Tentukanlah fungsi komposisi $(g\circ(f \circ h))(x)$ dan $((g \circ f) \circ h)(x)$.
b) Tentukanlah fungsi komposisi $(f\circ(g \circ h))(x)$ dan $((f \circ g) \circ h)(x)$.
c) Selidiki apakah: i) $(g \circ (f \circ h))(x) = ((g \circ f) \circ h)(x)$, dan
ii) $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$

Alternatif Penyelesaian

a) Rumus fungsi komposisi $(g\circ(f \circ h))(x)$ dan $((g \circ f) \circ h)(x)$

i) Misalkan $k(x) = (f \circ h)(x)$

$$
\begin{aligned}
k(x) &= f(h(x)) \\
&= 2h(x) - 1 \\
&= 2(2x - 3) - 1 \\
&= 4x - 6 - 1 \\
&= 4x - 7 \\
(g \circ (f \circ h))(x) &= (g \circ k)(x) \\
&= g(k(x)) \\
&= 4(k(x)) + 5 \\
&= 4(4x - 7) + 5 \\
&= 16x - 28 + 5 \\
&= 16x - 23
\end{aligned}
$$

Jadi fungsi komposisi $(g \circ (f \circ h))(x) = 16x - 23$

$$\begin{aligned}
\text{ii) Misalkan } l(x) &= (g \circ f)(x)\\
l(x) = g(f(x)) &= 4(f(x)) + 5\\
&= 4(2x - 1) + 5\\
&= 8x - 4 + 5\\
&= 8x + 1\\
((g \circ f) \circ h)(x) &= (l \circ h)(x)\\
&= l(h(x))\\
&= 8(h(x)) + 1\\
&= 8(2x - 3) + 1\\
&= 16x - 24 + 1\\
&= 16x - 23
\end{aligned}$$

Jadi rumus fungsi komposisi $((g \circ f)\ h)(x) = 16x - 23$.

b) Rumus fungsi komposisi $f \circ (g \circ h)$ dan $(f \circ g)\ h$

$$\begin{aligned}
\text{i) Misalkan } m(x) &= (g \circ h)(x)\\
m(x) = g(h(x)) &= 4(h(x)) + 5\\
&= 4(2x - 3) + 5\\
&= 8x - 12 + 5\\
&= 8x - 7\\
(f \circ (g \circ h)(x) &= (f \circ m)(x)\\
&= f(m(x))\\
&= 2(m(x)) - 1\\
&= 2(8x - 7) - 1\\
&= 16x - 14 - 1\\
&= 16x - 15
\end{aligned}$$

Jadi rumus fungsi komposisi $(f \circ (g \circ h))(x) = 16x - 15$

$$\begin{aligned}
\text{ii) Misalkan } n(x) &= (f \circ g)(x)\\
n(x) &= f(g(x))\\
&= 2(4x + 5) - 1\\
&= 8x + 10 - 1\\
&= 8x + 9\\
((f \circ g) \circ h)(x) &= (n \circ h(x))\\
&= n(h(x))\\
&= 8(h(x)) + 9\\
&= 8(2x - 3) + 9\\
&= 16x - 24 + 9\\
&= 16x - 15
\end{aligned}$$

Jadi rumus fungsi komposisi $((f \circ g) \circ h))(x) = 16x - 15$

iii) Dari butir (a) dan butir (b), diperoleh nilai

i) $(g \circ (f \circ h))(x) = 16x - 23$ dan $((g \circ f) \circ h)(x) = 16x - 23$

ii) $(f \circ (g \circ h))(x) = 16x - 15$ dan $((f \circ g) \circ h)(x) = 16x - 15$

Berdasarkan nilai-nilai ini disimpulkan bahwa

i) $(g \circ (f \circ h))(x) = ((g \circ f) \circ h)(x) = 16x - 23$

ii) $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x) = 16x - 15$

Sifat 3.1

Diketahui f, g, dan h suatu fungsi. Jika $R_h \cap D_g \neq \emptyset$; $\emptyset$; $Rg \cap Df \neq \emptyset$; $\emptyset$, maka pada operasi komposisi fungsi berlaku sifat asosiatif, yaitu;

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Arahkan siswa agar siswa dapat membuat prinsip bahwa berlaku sifat asosiatif dalam operasi fungsi komposisi

Contoh 3.6

Diketahui fungsi f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 5x - 7$ dan fungsi I: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $I(x) = x$.

a) Rumus fungsi komposisi $f \circ I$ dan $I \circ f$.

b) Selidikilah apakah $f \circ I = I \circ f = f$.

Alternatif Penyelesaian

a) Rumus fungsi komposisi $f \circ I$ dan $I \circ f$

✔ $(f \circ I)(x) = f(I(x))$
$= f(x)$
$= 5x - 7$

✔ $(I \circ f)(x) = I(f(x))$
$= I(f(x))$
$= 5x - 7$

a) Berdasarkan hasil-hasil pada butir (a) di atas disimpulkan bahwa: $f \circ I = I \circ f = f$

Berdasarkan penyelesaian Contoh 3.6 kita peroleh sifat berikut.

Minta siswa untuk mengamati Contoh 3.6 kemudian minta salah seorang siswa menjelaskan tentang penyelesaian contoh ini. Jika siswa mengalami kesulitan ingatkan siswa tentang operasi fungsi komposisi yang sudah dipelajari. Contoh ini bertujuan untuk menunjukkan sebuah prinsip bahwa jika f sebuah fungsi dan I merupakan fungsi identitas maka berlaku $f \circ I = I \circ f = f$. *jika siswa masih mengalami kesulitan berikan beberapa contoh lain sehingga nantinya siswa dapat membuat prinsip tentang sifat tersebut.*

Berdasarkan contoh yang telah diselesaikan pada contoh, minta siswa untuk dapat membuat sebuah kesimpulan bahwa berlaku $f \circ I = I \circ f = f$

Sifat 3.2

Diketahui *f* suatu fungsi dan *I* merupakan fungsi identitas. Jika $R_i \cap D_f \neq \varnothing$ maka terdapat sebuah fungsi identitas yaitu: $I(x) = x$, sehingga berlaku sifat identitas, yaitu; $f \circ I = I \circ f = f$

Agar kamu lebih memahami sifat 3.2, selesaikanlah latihan berikut.

Latihan

Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = \dfrac{2x-3}{5}$ dan fungsi identitas I: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan $I(x) = x$. Buktikanlah bawah $(f \circ I) = (I \circ f) = f$.

Alternatif Penyelesaian

$$f \circ I = \frac{2x-3}{5}$$

$$I \circ f = \frac{2x-3}{5}$$

Berikan Uji Kompetensi 3.1 kepada siswa sebagai tugas di rumah. Uji kompetensi ini bertujuan untuk mengukur kemampuan siswa tentang konsep dan prinsip fungsi komposisi

Uji Kompetensi 3.1

1. Suatu pabrik kertas berbahan dasar kayu memproduksi kertas melalui dua tahap. Tahap pertama dengan menggunakan mesin I yang menghasilkan bahan kertas setengah jadi, dan tahap kedua dengan menggunakan mesin II yang menghasilkan bahan kertas. Dalam produksinya mesin I menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi $f(x) = 0{,}7x + 10$ dan pada mesin II terdapat bahan campuran lain sehingga mengikuti fungsi $g(x) = 0{,}02x^2 + 12x$, x merupakan banyak bahan dasar kayu dalam satuan ton.

   a) Jika bahan dasar kayu yang tersedia untuk suatu produksi sebesar 50 ton, berapakah kertas yang dihasilkan? (kertas dalam satuan ton).

   b) Jika bahan setengah jadi untuk kertas yang dihasilkan oleh mesin I sebesar 110 ton, berapa ton kah kayu yang sudah terpakai? Berapa banyak kertas yang dihasilkan?

2. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x-3}{x}$, $x \neq 0$ dan $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.Tentukan rumus fungsi berikut bila terdefinisi dan tentukan daerah asal dan daerah hasilnya.

   a) $(f + g)(x)$

   b) $(f - g)(x)$

   c) $(f \times g)(x)$

   d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

3. Misalkan f fungsi yang memenuhi untuk
   $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x} f(-x) = 2x$ setiap $x \neq 0$.

   Tentukanlah nilai $f(2)$.

4. Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = x^2 - 4x + 2$ dan fungsi g: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $g(x) = 3x - 7$.

   a) $(g \circ f)(x)$ c) $(g \circ f)(5)$

   b) $(f \circ g)(x)$ d) $(f \circ g)(10)$

5. Jika $f(xy) = f(x + y)$ dan $f(7) = 7$. Tentukanlah nilai $f(49)$!

6. Diketahui fungsi f dan g dinyatakan dalam pasangan terurut

   $f = \{(1,5), (2,6), (3,-1), (4,8)\}$

   $g = \{(2,-1), (1,2), (5,3), (6,7)\}$

   Tentukanlah

   a) $(g \circ f)(x)$

   b) $(f \circ g)(x)$

7. Jika f fungsi yang memenuhi persamaan $f(1) = 4$ dan $f(x+1) = 2\,f(x)$. Tentukanlah $f(2014)$!

8. Jika $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ dan $x^2 \neq 1$, buktikanlah bahwa $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

9. Untuk pasangan fungsi yang diberikan tentukanlah daerah asal dan daerah hasil fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$.

   a) $f(x) = 2x$ dan $g(x) = \sin x$

   b) $f(x) = -x$ dan $g(x) = \ln x$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ dan $g(x) = 2 \sin x$

10. Jika $f(x) = 2^{2x} + 2^{x+1} - 3$ dan $g(x) = 2^x + 3$. Tentukanlah nilai $\dfrac{f(x)}{g(x)}$!

11. Diketahui fungsi $f(x) = 2^{x+2} \times 6^{x-4}$ dan $g(x) = 12^{x-1}$ untuk x bilangan asli. Tentukanlah nilai $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

12. Diketahui $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $g(x) = x^2 - 1$. Tentukanlah nilai $f(x - 2)$.

4. Fungsi Invers

Berikutnya, kita akan mempelajari balikan dari fungsi yang disebut dengan fungsi invers. Dengan demikian, mari kita memahami masalah berikut.

Minta siswa untuk memahami Masalah 3.4. setelah siswa memahami maksud dan tujuan dari masalah yang berikan, minta siswa untuk menyelesaikan dengan caranya sendiri.

Masalah-3.4

Seorang pedagang kain memperoleh keuntungan dari hasil penjualan setiap x potong kain sebesar $f(x)$ rupiah. Nilai keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 1000$, (dalam ribuan rupiah) x adalah banyak potong kain yang terjual.

a) Jika dalam suatu hari pedagang tersebut mampu menjual 50 potong kain, berapa keuntungan yang diperoleh?
b) Jika keuntungan yang diharapkan sebesar Rp100.000,00 berapa potong kain yang harus terjual?
c) Jika *A* merupakan daerah asal (*domain*) fungsi *f* dan *B* merupakan daerah hasil (*range*) fungsi *f*, gambarkanlah permasalahan butir (*a*) dan butir (*b*) di atas.

Alternatif Penyelesaian

Pandu siswa memahami proses penyelesaian di samping

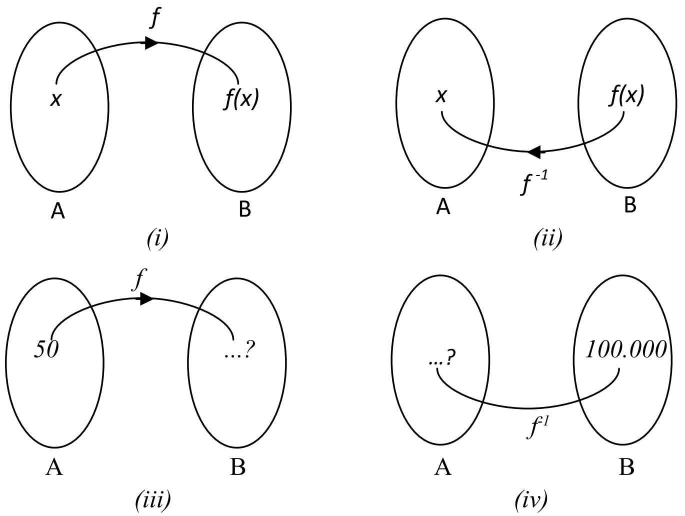
Keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 1000$, untuk setiap x potong kain yang terjual.

a) Penjualan 50 potong kain, berarti $x = 50$ dan nilai keuntungan yang diperoleh adalah:
$f(x)= 500x + 1000$
untuk $x = 50$ berarti $f(50) = (500 \times 50) + 1000$
$= 2500 + 1000$
$= 3600$
Jadi keuntungan yang diperoleh dalam penjualan 50 potong kain sebesar Rp3.600.000,-

b) Agar keuntungan yang diperoleh sebesar Rp100.000,-, maka banyak potong kain yang harus terjual adalah:
$f(x) = 500x + 1000$
$100.000 = 500x + 1000$
$500x = 100.000 – 1.000$
$500x = 99.000$
$x = \frac{99.000}{500}$
$= 198$
Jadi banyak potong kain yang harus terjual adalah 198 potong.

Penyelesaian bagian c) ini bertujuan untuk mengantarkan siswa kepada prinsip invers fungsi komposisi.

c) Jika A merupakan daerah asal fungsi f dan B merupakan daerah hasil fungsi f, permasalahan butir (a) dan butir (b) di atas digambarkan seperti berikut.



Gambar 3.3. Invers Fungsi

Guru bersama-sama dengan siswa menyimpulkan beberapa hal terkait dengan penyelesaian bagian c) dari permasalahan yang diberikan.

Berdasarkan Gambar 3.3 di atas, dikemukakan beberapa hal sebagai berikut.

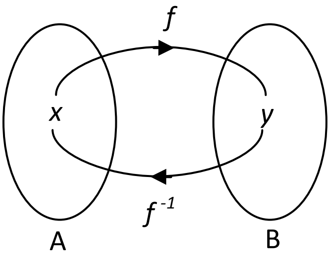
(a) Gambar 3.3 (i) menunjukkan bahwa fungsi f memetakan A ke B, ditulis: f: $A \rightarrow B$.

(b) Gambar 3.3 (ii) menunjukkan bahwa f^{-1} memetakan B ke A, ditulis: f^{-1}: $B \rightarrow A$. f^{-1} merupakan invers fungsi f.

(c) Gambar 3.3 (iii) menunjukkan bahwa untuk nilai $x = 50$ maka akan dicari nilai $f(x)$.

(d) Gambar 3.3 (iv) menunjukkan kebalikan dari Gambar 3.3 (iii) yaitu mencari nilai x jika diketahui nilai $f(x) = 100.000$.

Untuk lebih memahami konsep invers suatu fungsi, perhatikan kembali Gambar 3.4 berikut.



Minta siswa untuk memahami Gambar 3.4 tentang Invers fungsi. Jika siswa mengalami kesulitan ingatkan siswa tentang menyatakan fungsi ke dalam bentuk pasangan terurut.

Berdasarkan Gambar 3.4 di samping, diketahui beberapa hal sebagai berikut. Pertama, fungsi f memetakan $x \in A$ ke $y \in B$. Ingat kembali pelajaran Kelas X tentang menyatakan fungsi ke dalam bentuk pasangan berurutan. Jika fungsi f dinyatakan ke dalam bentuk pasangan berurutan, maka dapat ditulis sebagai berikut.

$f = \{(x, y) \mid x \in A$ dan $y \in B\}$. Pasangan berurut (x , y) merupakan unsur dari fungsi f.

Kedua, invers fungsi f atau f^{-1} memetakan $y \in B$ ke $x \in A$. Jika invers fungsi f dinyatakan ke dalam pasangan berurutan, maka dapat ditulis $f^{-1} = \{(y , x) \mid y \in B$ dan $x \in A\}$. Pasangan berurut (y, x) merupakan unsur dari invers fungsi f.

Berdasarkan uraian-uraian di atas, diberikan definisi invers suatu fungsi sebagai berikut.

Berdasarkan kesimpulan yang diperoleh dari pemahaman Gambar 3.4, guru bersama-sama dengan siswa membuat Definisi 3.3 yaitu tentang invers fungsi.

Definisi 3.3

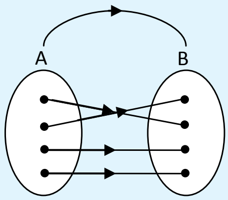
Jika fungsi f memetakan A ke B dan dinyatakan dalam pasangan berurutan $f = \{(x, y) \mid x \in A$ dan $y \in B\}$, maka invers fungsi f (dilambangkan f^{-1}) adalah relasi yang memetakan B ke A, dalam pasangan berurutan dinyatakan dengan $f^{-1} = \{(y, x) \mid y \in B$ dan $x \in A\}$.

Untuk lebih memahami konsep invers suatu fungsi, selesaikanlah Masalah 3.5 berikut.

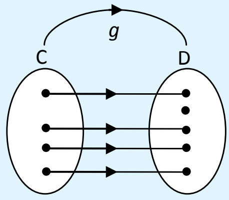
Guru memberikan Masalah 3.5 sebagai penerapan dari konsep invers yang sudah didefinisikan sebelumnya. Diharapkan dengan diselesaikannya masalah ini konsep invers fungsi dapat dipahami siswa dengan baik

Masalah-3.5

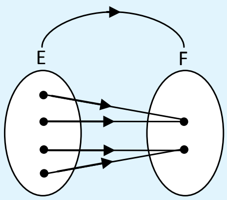
Diketahui fungsi *f*: *A* → *B* merupakan fungsi bijektif, fungsi *g*: *C* → *D* merupakan fungsi injektif, dan fungsi *h*: *E* → *F* merupakan fungsi surjektif yang digambarkan seperti Gambar 3.5 di bawah ini.



i



ii



iii

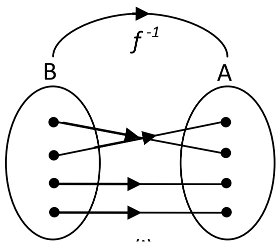
Gambar 3.5. Fungsi *f*, *g*, dan *h*

a) Jika invers fungsi *f* memetakan *B* ke *A*, invers fungsi g memetakan *D* ke *C*, dan invers fungsi *h* memetakan *F* ke *E*, gambarlah ketiga invers fungsi tersebut!

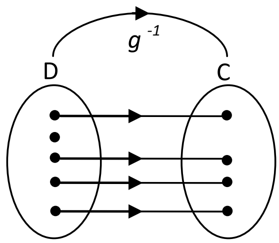
b) Dari ketiga invers fungsi tersebut, tentukanlah mana yang merupakan fungsi.

Alternatif Penyelesaian

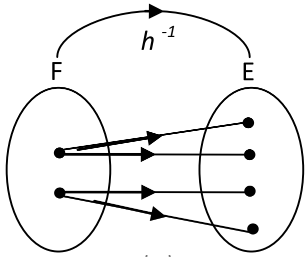
a) Gambar ketiga invers fungsi tersebut ditunjukkan sebagai berikut.



i



ii



iii

Gambar 3.6.Invers fungsi f, g, dan h

b) Berdasarkan Gambar 3.6, disimpulkan sebagai berikut.
- Gambar 3.6 (i) merupakan fungsi. Mengapa?
- Gambar 3.6 (ii) bukan fungsi. Mengapa?
- Gambar 3.6 (iii) bukan fungsi. Mengapa?

Penyelesaian butir b) menuntut siswa untuk mengingat kembali konsep tentang fungsi. Selanjutnya diharapkan siswa memahami bahwa invers dari suatu fungsi tidak selalu merupakan fungsi.

Berdasarkan alternatif penyelesaian pada Masalah 3.5 di atas, dapat disimpulkan bahwa invers suatu fungsi belum tentu merupakan fungsi tetapi dapat hanya berupa relasi biasa. Invers fungsi g dan h **bukan** suatu fungsi melainkan hanya relasi biasa. Invers suatu fungsi yang merupakan fungsi disebut **fungsi invers**. Invers fungsi f merupakan suatu fungsi invers.

Berdasarkan uraian di atas, ditemukan sifat berikut.

Sifat 3.3

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan memiliki fungsi invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi bijektif.

Berdasarkan penyelesaian Masalah 3.5 minta siswa untuk membuat prinsip tentang invers dari sebuah fungsi bijektif pasti merupakan fungsi juga.

Perhatikan kembali Sifat 3.3 di atas, pada fungsi bijektif f: $A \rightarrow B$, A merupakan daerah asal fungsi f dan B merupakan daerah hasil fungsi f . Secara umum, definisi fungsi invers diberikan sebagai berikut.

Berdasarkan prinsip bahwa invers fungsi bijektif selalu bijektif dan dengan bantuan guru, minta siswa untuk dapat membuat Definisi 3.4.

Definisi 3.4

Jika fungsi f: $D_f \rightarrow R_f$ adalah fungsi bijektif, maka invers fungsi f adalah fungsi yang didefinisikan sebagai f^{-1}: $R_f \rightarrow D_f$ dengan kata lain f^{-1} adalah fungsi dari R_f ke D_f.

Perhatikan kembali Definisi 3.4 di atas. Fungsi f: $D_f \rightarrow R_f$ adalah fungsi bijektif, jika $y \in R_f$ merupakan peta dari $x \in D_f$, maka hubungan antara y dengan $f(x)$ didefinisikan dengan $y = f(x)$. Jika f^{-1} adalah fungsi invers dari fungsi f, maka untuk setiap $x \in R_{f^{-1}}$ adalah peta dari $y \in D_{f^{-1}}$. Hubungan antara x dengan $f^{-1}(y)$ didefinisikan dengan rumus $x = f^{-1}(y)$.

Guru meminta siswa untuk memahami Masalah 3.6. Selanjutnya minta siswa untuk menyelesaikan permasalahan yang diberikan. Permasalahan ini melibatkan konsep dan prinsip invers fungsi. Dengan diselesaikannya Masalah 3.6 diharapkan secara induktif dapat ditarik kesimpulan untuk membentuk Sifat 3.4

Jika dengan diselesaikan masalah ini tetapi, siswa masih belum memahami dengan baik tentang penyelesaiannya, diharapkan guru dapat memberikan contoh soal lain yang bertujuan agar Sifat 3.4 nantinya dapat dipahami.

5. Menentukan Rumus Fungsi Invers

Masalah-3.6

Salah satu sumber penghasilan yang diperoleh klub sepak bola adalah hasil penjualan tiket penonton jika timnya sedang bertanding. Besar dana yang diperoleh bergantung pada banyaknya penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut. Suatu klub memberikan informasi bahwa besar pendapatan yang diperoleh klub dari penjualan tiket penonton mengikuti fungsi $f(x) = 50.000x + 20.000$, dengan x merupakan banyak penonton yang menyaksikan pertandingan.

a) Tentukanlah invers fungsi pendapatan dari tiket penonton klub sepak bola tersebut.

b) Jika dalam suatu pertandingan, klub memperoleh dana hasil penjualan tiket penonton sebesar Rp55.570.000,-. Berapa penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui bahwa fungsi pendapatan klub sepak bola tersebut adalah $f(x) = 50.000x + 20.000$

Pandu siswa untuk menentukan invers suatu fungsi

a) Invers fungsi pendapatan dari tiket penonton klub sepak bola

Untuk menentukan rumus fungsi invers $f(x)$ dilakukan sebagai berikut.

$y = f(x) = 50.000x + 20.000$

$y = 50.000x + 20.000$

$50.000x = y - 20.000$

$$x = \frac{y-20.000}{50.000}$$

Karena $x = f^{-1}(y)$ maka $f^{-1}(y) = \dfrac{y-20.000}{50.000}$

Karena $f^{-1}(y) = \dfrac{y-20.000}{50.000}$ maka

$f^{-1}(x) = \ f^{-1}(x) = \dfrac{x-20.000}{50.000}$

Jadi, fungsi invers dari $f(x) = 50.000x + 20.000$ adalah

$f^{-1}(x) = \dfrac{x-20.000}{50.000}$ atau $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{50.000}(x-20.000)$.

Minta siswa mensketsa grafik fungsi $f(x)$ dan inversnya

b) Jika dana hasil penjualan tiket penonton sebesar Rp 55.570.000, maka banyak penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut adalah

$$f^{1}(x) = \frac{x-20.000}{50.000}$$

$$f^{1}(5.000.000) = \frac{55.570.000-20.000}{50.000}$$

$$= \frac{55.570.000-20.000}{50.000}$$

$$= 1111$$

Jadi, penonton yang menyaksikan pertandingan itu sebanyak 1111 orang.

Berdasarkan alternatif penyelesaian Masalah 3.6 di atas, diperoleh sifat sebagai berikut.

Guru bersama-sama dengan siswa membuat Sifat 3.4.

Sifat 3.4

Misalkan f^{-1} adalah fungsi invers fungsi f. Untuk setiap $x \in D_f$ dan $y \in R_f$ berlaku $y = f(x)$ jika dan hanya jika $f^{-1}(y) = x$.

Guru meminta siswa untuk memahami Contoh 3.7 dan 3.8, setelah itu minta perwakilan siswa untuk menjelaskan penyelesaian dari contoh itu. Contoh ini bertujuan untuk melatih kemampuan siswa dalam menerapkan konsep dan prinsip invers fungsi.

Contoh 3.7

Diketahui fungsi f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 5x + 7$.

Tentukanlah fungsi inversnya!.

Alternatif Penyelesaian

Karena $y = f(x)$, maka $y = 5x + 7$

$5x = y - 7$

$x = \dfrac{x-7}{5}$

Karena $x = f^{-1}(y)$, maka $f^{-1}(y) = \dfrac{x-7}{5}$

Karena $f^{-1}(y) = \dfrac{x-7}{5}$, maka $f^{-1}(x) \quad = \dfrac{x-7}{5}$,

$$= \frac{1}{5}(x-7)$$

Jadi fungsi invers $f(x) = 5x + 7$ adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{5}(x-7)$.

Contoh 3.8

Diketahui fungsi f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 3x - 1$. Tentukanlah fungsi inversnya!.

Alternatif Penyelesaian

Karena $y = f(x)$, maka $y = 3x - 1$

$y = 3x - 1$

$3x = y + 1$

$x = \dfrac{y+1}{3}$

Karena $f^{-1}(y) = x$, maka $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$

Karena $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$, maka $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$,

Jadi fungsi invers $f(x) = 3x - 1$ adalah $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$.

Contoh 3.9

a) Tunjukan rumus fungsi komposisi $(f \circ f^{-1})(x)$ dan $(f^{-1} \circ f)(x)$

b) Kesimpulan apa yang bisa kamu temukan?

Alternatif Penyelesaian

(1) Berdasarkan Contoh 3.7, diketahui bahwa $f(x) = 5x + 7$ dan $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x - 7)$.)

a) Rumus fungsi komposisi $(f \circ f^{1})(x)$ dan $(f^{1} \circ f)(x)$ ditentukan sebagai berikut.

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x))$$
$$= 5(f^{-1}(x)) + 7$$
$$= 5(\frac{1}{5}(x - 7)) + 7$$
$$= x - 7 + 7$$
$$= x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x))$$
$$= \frac{x-7}{5}$$
$$= \frac{f(x)-7}{5}$$
$$= \frac{(5x+7)-7}{5}$$

Berdasarkan penyelesaian Contoh 3.7 dan Contoh 3.8 minta siswa untuk menyelesaikan $(f \circ f^{1})(x)$ dan $(f^{-1} \circ f)(x)$ dan menarik kesimpulan dan penyelesaian yang siswa lakukan.

$$= \frac{5x}{5}$$
$$= x$$

b) Berdasarkan hasil pada butir (a) disimpulkan bahwa nilai $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$

(2) Sebagai latihanmu, silahkan buktikan bahwa $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$ juga berlaku pada Contoh 3.8.

Berdasarkan penyelesaian Contoh 3.7 dan Contoh 3.8 diperoleh sifat berikut

Berdasarkan kesimpulan penyelesaian dari masalah di atas minta siswa untuk bersama-sama memahami tentang Sifat 3.5

Sifat 3.5

Misalkan f sebuah fungsi bijektif dengan daerah asal D_f dan daerah hasil R_f sedangkan $I(x) = x$ merupakan fungsi identitas. Fungsi f^{-1} merupakan fungsi invers dari fungsi f jika dan hanya jika

$(f \circ f^{-1})(x) = x = I(x)$ untuk setiap $x \in D_f$, dan

$(f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$ untuk setiap $x \in R_f$.

Sifat 3.5 di atas dapat digunakan untuk mengetahui apakah suatu fungsi merupakan fungsi invers dari fungsi f atau tidak. Agar kamu lebih memahami, perhatikan kembali Contoh 3.10 berikut.

Berikan Contoh 3.10 yang bertujuan untuk melatih kemampuan siswa tentang fungsi invers

Contoh 3.10

Buktikanlah bahwa $f(x) = 10x - 1$ dan $g(x) = \frac{x+1}{10}$ merupakan fungsi yang saling invers.

Alternatif Penyelesaian

Untuk membuktikan bahwa $f(x)$ dan $g(x)$ saling invers, cukup menunjukkan fungsi komposisi $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

Bukti.

(i) $f(g(x)) \quad = f\left(\frac{x+1}{10}\right)$

$= 10(g(x)) - 1$

$= 10\left(\frac{x+1}{10}\right) - 1$

$= x + 1 - 1$

$= x$

(ii) $g(f(x))$ $= g(10x - 1)$

$= \frac{(10x-1)+1}{10}$

$= \frac{(10x-1)+1}{10}$

$= \frac{10x}{10}$

$= x$

Karena $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, maka kedua fungsi saling invers.

Perhatikan kembali Contoh 3.11 berikut.

Contoh 3.11

Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = x - 1$. Tentukanlah $(f^{-1})^{-1}(x)$!

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan rumus $(f^{-1})^{-1}(x)$ maka langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan $f^{-1}(x)$ sebagai berikut.

Diketahui bahwa $f(x) = x - 1$, karena $f(x) = y$, maka: $y = x - 1$ atau $x = y + 1$

Oleh karena $x = f^{-1}(y)$, maka $f^{-1}(y) = y + 1$ sehingga $f^{-1}(x) = x + 1$.

Langkah kedua adalah menentukan fungsi invers dari $f^{-1}(x)$, sebagai berikut.

Misalkan $f^{-1}(x) = h(x)$, maka fungsi invers dari $h(x)$ adalah $h^{-1}(x)$, yang ditentukan seperti berikut.

Berikan Contoh 3.10 untuk memantapkan siswa dalam memahami fungsi invers. Selain itu tujuan contoh ini adalah untuk menunjukkan bahwa $(f^{-1} = f)$. Jika siswa masih belum memahami penyelesaian dari contoh yang diberikan guru dapat memberikan contoh lain yang relevan dengan tujuan.

Misalkan h^{-1} adalah fungsi invers fungsi h. Untuk setiap $x \in D_h$ dan $y \in R_h$ berlaku $y = h(x)$ jika dan hanya jika $x = h^{-1}(y)$.

Karena $h(x) = x + 1$ dan $h(x) = y$, kita peroleh hubungan $y = x + 1$ atau $x = y - 1$.

Karena $x = h^{-1}$ (y), maka $h^{-1}(y) = y - 1$ sehingga $h^{-1}(x) = x - 1$.

Karena $f^{-1}(x) = h(x)$ dan $h^{-1}(x) = x - 1$, maka $(f^{-1})^{-1}(x) = x - 1$.

Jadi,$(f^{-1})^{-1}(x) = x - 1$.

Perhatikan kembali rumus fungsi $(f^{-1})^{-1}(x)$ yang kita peroleh dengan rumus fungsi $f(x)$ yang diketahui, dari kedua nilai ini kita peroleh bahwa $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) = x - 1$

Berdasarkan hasil uraian pada Contoh 3.11 di atas, maka diperoleh sifat fungsi invers sebagai berikut.

Berdasarkan penyelesaian dari beberapa contoh yang diberikan, diharapkan siswa dapat memahami Sifat 3.6

Sifat 3.6

Jika f sebuah fungsi bijektif dan f^{-1} merupakan fungsi invers f, maka fungsi invers dari f^{-1} adalah fungsi f itu sendiri, disimbolkan dengan $(f^{-1})^{-1} = f$

Sebagai penguatan bagi siswa untuk meningkatkan kompetensinya terkait denngan Sifat 3.6, berikan Contoh 3.11 berikut ini, kemudian minta siswa untuk memahami penyelesaian dari contoh soal tersebut dan minta perwakilan dari siswa menjelaskan tentang penyelesaian soal yang diberikan.

Contoh 3.12

Diketahui fungsi f dan g adalah fungsi bijektif yang ditentukan dengan $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = x - 2$. Tentukanlah

a) $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$
b) $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$
c) $(g \circ f)^{-1}(x)$ dan $(f \circ g)^{-1}(x)$
d) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ dan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$
e) hubungan antara $(g \circ f)^{-1}(x)$ dengan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$
f) hubungan antara $(f \circ g)^{-1}(x)$ dengan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Alternatif Penyelesaian

a) $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$

(i) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= f(x) - 2$

$= (2x + 5) - 2$

$= 2x + 3$

(ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= 2(g(x)) + 5$

$= 2(x - 2) + 5$

$= 2x + 1$

b) $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$

(i) $f^{-1}(x)$

$f(x) = 2x + 5$

karena $f(x) = y$ maka $y = 2x + 5$

$2x = y - 5$

$$x = \frac{y-7}{5}$$

Karena $f^{-1}(y) = x$ maka $f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2}$

sehingga $f^{-1}(x) = f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2}$

(ii) $g^{-1}(x)$

$g(x) = x - 2$

karena $g(x) = y$ maka $y = x - 2$ sehingga $x = y + 2$
karena $g^{-1}(y) = x$ maka $g^{-1}(y) = y + 2$

sehingga $g^{-1}(x) = x + 2$

c) $(g \circ f)^{-1}(x)$ dan $(f \circ g)^{-1}(x)$

(i) $(g \circ f)^{-1}(x)$

$(g \circ f)(x) = 2x + 3$

Misalkan $(g \circ f)(x) = h(x)$ sehingga $h(x) = 2x + 3$

karena $h(x) = y$ maka $y = 2x + 3$ sehingga $x = \dfrac{y-3}{2}$

karena $h^{-1}(y) = x$ maka $h^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2}$ sehingga

$h^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$

karena $(g \circ f)(x) = h(x)$ maka $(g \circ f)^{-1}(x) = h^{-1}(x)$

sehingga $(g \circ f)^{-1}(x)$

(ii) $(f \circ g)^{-1}(x)$

$(f \circ g)(x) = 2x + 1$

Misalkan $(f \circ g)(x) = k(x)$ sehingga $k(x) = 2x + 1$

karena $k(x) = y$ maka $y = 2x + 1$ sehingga $x = \dfrac{y-1}{2}$

karena $k^{-1}(y) = x$ maka $k^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$ sehingga

$k^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

karena $(f \circ g)(x) = k(x)$ maka $(f \circ g)^{-1}(x) = k^{-1}(x)$

sehingga $(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

d) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ dan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

(i) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Pada butir (b) telah ditemukan bahwa $g^{-1}(x) = x + 2$ dan

$f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$

$$
\begin{aligned}
(g^{-1} \circ f^{-1})(x) &= g^{-1}(f^{-1}(x)) \\
&= (f^{-1}(x)) + 2 \\
&= \frac{x-5}{2} + 2 \\
&= \frac{x-5+4}{2} \\
&= \frac{x-1}{2}
\end{aligned}
$$

(ii) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

$$
\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= f^{-1}(g^{-1}(x)) \\
&= \frac{g^{-1}(x)-5}{2} \\
&= \frac{(x+2)-5}{2} \\
&= \frac{x-3}{2}
\end{aligned}
$$

e) hubungan antara $(g \circ f)^{-1}(x)$ dengan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

Hasil perhitungan di atas menunjukkan bahwa rumus fungsi $(g \circ f)^{-1}(x)$ sama dengan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ atau $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \dfrac{x-1}{2}$.

f) hubungan antara $(f \circ g)^{-1}(x)$ dengan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Hasil perhitungan di atas menunjukkan bahwa rumus fungsi $(f \circ g)^{-1}(x)$ sama dengan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ atau $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

Berdasarkan Contoh 3.12 di atas dapat kita simpulkan sifat berikut.

Diharapkan dengan diselesaikan Contoh 3.11 siswa dapat menarik kesimpulan yaitu tentang Sifat 3.7

Sifat 3.7

Jika f dan g fungsi bijektif maka berlaku
$(g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1})$

Berikan Latihan berikut kepada siswa untuk mengasah kemampuan siswa dalam memahami Sifat 3.7

Agar kamu lebih memahami Sifat 3.7, selesaikanlah latihan berikut.

Latihan

Fungsi f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan g: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh rumus $f(x) = 5x - 4$ dan $g(x) = 3x$. Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan $(g \circ f)^{-1}(x)$!

Contoh 3.13

Tentukanlah invers fungsi $f(x)$ berikut.

a. $f(x) = 2x - 4$

b. $f(x) = x^2 - 4x + 2$

c. $f(x) = \dfrac{2x-1}{4x-1}$

Alternatif Penyelesaian

a. Menentukan invers $f(x) = 2x - 4$

Misalkan $y = 2x - 4$ sehingga $x = \dfrac{y+4}{2}$

Dengan demikian, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2}$

b. Menentukan invers $f(x) = x^2 - 4x + 2$

Misalkan $y = x^2 - 4x + 2$ sehingga dengan kuadrat sempurna diperoleh:

$$\begin{aligned} y = x^2 - 4x + 4 - 4 + 2 &\Leftrightarrow y = (x-2)^2 - 2 \\ &\Leftrightarrow y + 2 = (x-2)^2 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{y+2} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{y+2} \end{aligned}$$

sehingga $f^{-1}(x) = 2$

c. Menentukan invers $f(x) = \dfrac{2x-1}{4x-1}$

Misalkan $y = \dfrac{2x-1}{4x-1}$ sehingga dengan proses aljabar,

$$
\begin{aligned}
y = \frac{2x-1}{4x-1} &\Leftrightarrow y(4x-1) = 2x-1 \\
&\Leftrightarrow 4xy - y = 2x - 1 \\
&\Leftrightarrow 4xy - 2x = y - 1 \\
&\Leftrightarrow x(4y-2) = y - 1 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{y-1}{4y-2}
\end{aligned}
$$

sehingga $f^{1}(x) = \dfrac{x-1}{4x-2}$

Uji Kompetensi 3.2

1. Seorang pedagang kain memperoleh keuntungan dari hasil penjualan setiap x potong kain sebesar $f(x)$ rupiah. Nilai keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 100x + 500$, x merupakan banyak potong kain yang terjual.
   a) Jika dalam suatu hari pedagang tersebut mampu menjual 100 potong kain, berapa keuntungan yang diperoleh?
   b) Jika keuntungan yang diharapkan sebesar Rp500.000,00 berapa potong kain yang harus terjual?
   c) Jika A merupakan himpunan daerah asal (*domain*) fungsi $f(x)$ dan B merupakan himpunan daerah hasil (*range*) fungsi $f(x)$, gambarkanlah permasalahan butir (a) dan butir (b) di atas.

Berikan Uji Kompetensi 3.2 ini sebagai pengukur kemampuan siswa dalam memahami beberapa konsep dan prinsip tentang fungsi invers. Soal-soal uji kompetensi ini juga dapat digunakan sebagai tugas untuk dikerjakan siswa di rumah.

2. Tentukanlah fungsi invers dari fungsi-fungsi berikut jika ada.
   a) $f(x) = 2x^2 + 5$
   b) $g(x) = \dfrac{2x - 1}{6}$
   c) $h(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

3. Diketahui f dan g suatu fungsi dengan rumus fungsi $f(x) = 3x + 4$ dan $g(x) = \dfrac{x - 4}{3}$. Buktikanlah bahwa $f^{-1}(x) = g(x)$ dan $g^{-1}(x) = f(x)$.

4. Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan rumus fungsi $f(x) = x^2 - 4$. Tentukanlah daerah asal fungsi f agar fungsi f memiliki invers dan tentukan pula rumus fungsi inversnya untuk daerah asal yang memenuhi!

5. Untuk mengubah satuan suhu dalam derajat Celcius (^0C) ke satuan suhu dalam derajat Fahrenheit (^0F) ditentukan dengan rumus $F = \dfrac{9}{5}C + 32$.
   a) Tentukanlah rumus untuk mengubah satuan derajat Fahrenheit (^0F) ke satuan suhu dalam derajat Celcius (^0C).
   b) Jika seorang anak memiliki suhu badan 86^0F, tentukanlah suhu badan anak itu jika diukur menggunakan satuan derajat Celcius!

6. Jika $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{5}$ dan $g^{-1}(x) = \dfrac{3 - x}{2}$ dan, tentukanlah nilai $(f \circ g)^{-1}(x)$!

7. Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan g: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dirumuskan dengan $f(x) = \dfrac{x - 1}{x}$, untuk $x \neq 0$ dan $g(x) = x + 3$. Tentukanlah $(g \circ f)^{-1}(x)$!

8. Diketahui $f(x) = 3^{x-1}$. Tentukanlah rumus fungsi $f^{-1}(x)$ dan tentukan juga $f^{-1}(81)$!

9. Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 1$ dan $(f \circ g)(x + 1) = -2x^2 - 4x - 1$. Tentukanlah $g^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(-2)$!

10. Fungsi f: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dan g: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh rumus $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = 2x$. Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan $(g \circ f)^{-1}(x)$!

11. Diketahui $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ dan
$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x-2}\sqrt{x^2 - 4x + 5}\quad .$$
Tentukanlah $(f \circ g)^{-1}(x)$

12. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x+1}{x}, x \neq 0$ dan f^{-1} adalah invers fungsi f. Jika k adalah banyaknya faktor prima dari 210, tentukanlah nilai $f^{-1}(k)$.

Projek

Rancanglah sebuah permasalahan kehidupan nyata dan selesaikan dengan menggunakan konsep fungsi komposisi. Buatlah laporannya dan persentasikan di depan kelas.

Berikan tugas projek kepada siswa dan berikan batasan waktu kepada siswa secara berkelompok untuk menyelesaikannya, setelah itu minta untuk dipresentasikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Bagian penutup ini berisikan tentang beberapa hal penting terkait operasi fungsi termasuk komposisi fungsi. Selain itu bab penutup ini juga merangkum tentang fungsi invers.

Berdasarkan uraian materi pada Bab 3 ini, beberapa kesimpulan yang dapat dinyatakan sebagai pengetahuan awal untuk mendalami dan melanjutkan bahasan berikutnya. Beberapa kesimpulan disajikan sebagai berikut.

1. Jika f suatu fungsi dengan daerah asal D_f dan g suatu fungsi dengan daerah asal D_g, maka pada operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dinyatakan sebagai berikut.

(1) Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.

(2) Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.

(3) Perkalian f dan g ditulis $f \times g$ didefinisikan sebagai $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ dengan daerah asal $D_{f\times g} = D_f \cap D_g$.

(4) Pembagian f dan g ditulis $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x|\, g(x) = 0\}$.

2. Jika f dan g fungsi dan $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka terdapat suatu fungsi h dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g yang disebut fungsi komposisi f dan g (ditulis: $g \circ f$) yang ditentukan dengan
$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

3. Sifat komutatif pada operasi fungsi komposisi tidak memenuhi, yaitu; $(g \circ f) \neq (f \circ g)$.

4. Diketahui f, g, dan h suatu fungsi. Jika $R_h \cap D_g \neq \emptyset$; $\emptyset$; $R_{g\circ h} \cap D_f \neq \emptyset$; $R_g \cap D_f \neq \emptyset$; $R_h \cap D_{f\circ g} \neq \emptyset$;, maka pada operasi komposisi fungsi berlaku sifat asosiatif, yaitu; $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

5. Diketahui f fungsi dan I merupakan fungsi identitas. Jika $R_I \cap D_f \neq \emptyset$ maka terdapat sebuah fungsi identitas yaitu: $I(x) = x$, sehingga berlaku sifat identitas, yaitu; $f \circ I = I \circ f = f$.

6. Jika fungsi f memetakan A ke B dan dinyatakan dalam pasangan berurutan $f = \{(x , y) \mid x \in A$ dan $y \in B\}$, maka invers fungsi f (dilambangkan f^{-1}) memetakan B ke A, dalam pasangan berurutan dinyatakan dengan $f^{-1} = \{(y , x) \mid y \in B$ dan $x \in A\}$.

7 Suatu fungsi $f : A \to B$ disebut memiliki fungsi invers $f^{-1}: B \to A$ jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi yang bijektif.

8 Jika fungsi f: $D_f \to R_f$ adalah fungsi bijektif, maka invers dari fungsi f ada–lah fungsi f^{-1} yang didefinisikan sebagai f^{-1}: $R_f \to D_f$.

9 Jika f fungsi bijektif dan f^{-1} merupakan fungsi invers f, maka fungsi invers dari f^{-1} adalah fungsi f itu sendiri.

10 Jika f dan g fungsi bijektif maka berlaku $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1})$.

Beberapa hal yang telah kita rangkum di atas adalah modal dasar bagi kamu dalam belajar fungsi secara lebih mendalam pada jenjang pendidikan yang lebih tinggi. Konsep-konsep dasar di atas harus kamu pahami dengan baik karena akan membantu dalam pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Catatan:

Bab 4

PERSAMAAN GARIS LURUS

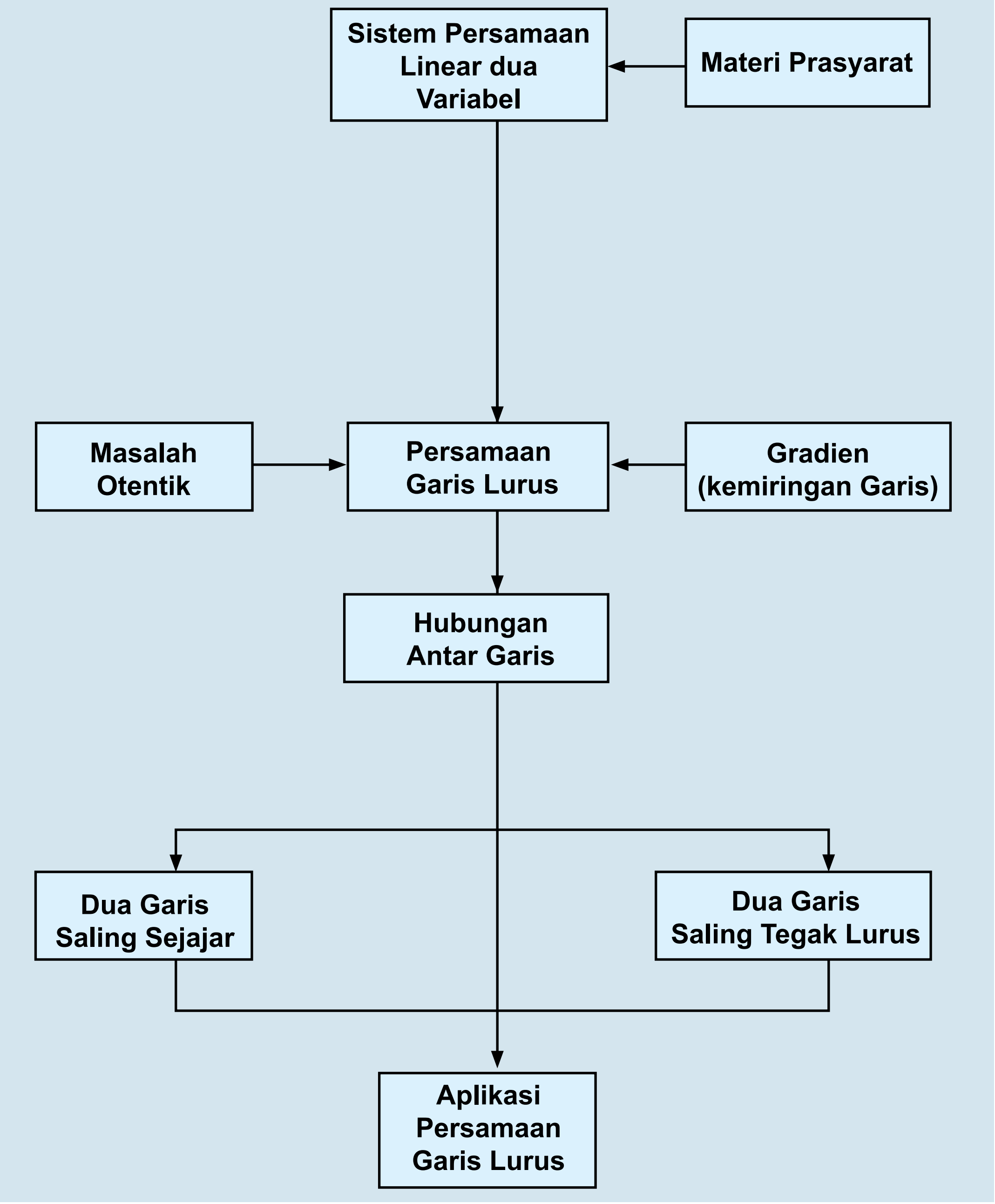
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1. Mampu mentransformasi diri dalam berpilaku jujur, tangguh mengadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 2. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 3. Menganalisis sifat dua garis sejajar dan saling tegak lurus dan menerapkannya dalam menyelesaikanmasalah. 4. Menganalisis kurva-kurva yang melalui beberapa titik untuk menyimpulkan berupa garis lurus,garis-garis sejajar, atau garis-garis tegak lurus.	Melalui pembelajaran persamaan garis lurus, siswa memperoleh pengalaman belajar: • berlatih untuk tangguh menghadapi masalah • berlatih siswa untuk berpikir kritis, jujur, dan disiplin • menunjukkan sikap bertanggung jawab dalam menyelesaikan masalah • menunjukkan sikap rasa ingin tahu dan peduli terhadap lingkungan • berlatih menganalisis masalah secara konsisten dan jujur

Istilah Penting

- *gradien*
- *dua garis sejajar*
- *dua garis tegak lurus*
- *titik potong garis*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

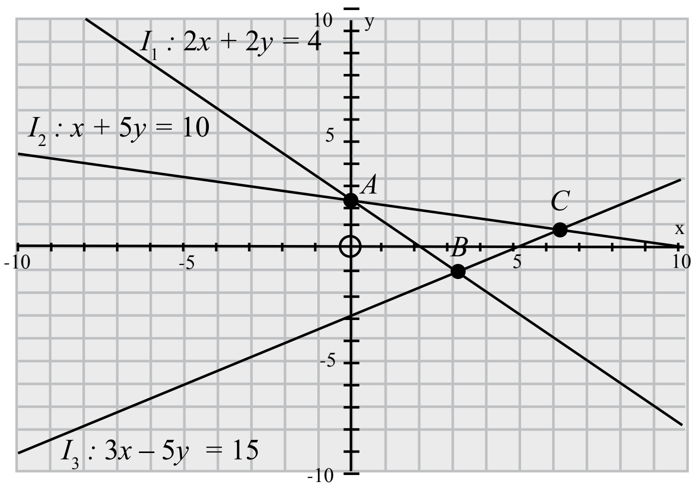
1. Garis dan Gradien

Memulai subbab ini, kita awali dengan mengingat kembali materi yang sudah pernah kamu pelajari di SMP (Kelas VIII) tentang bagaimana menentukan persamaan garis lurus dan gradien suatu garis. Coba perhatikan bentuk persamaan garis dan gradien garis di bawah ini.

1. Garis dengan persamaan $ax + by = c$ gradien $m = -\frac{a}{b}$.
2. Garis dengan persamaan $y = ax + c$ gradien $m = a$.
3. Garis dengan persamaan $y - y_1 = p(x - x_1)$ gradien $m = p$
4. Garis dengan persamaan $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ gradien

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. $a, b, c, x_1, y_1 \in R$

Mari kita amati gambar di bawah ini!



Gambar 4.1: Tiga perpotongan 3 garis lurus

Menjelaskan kepada siswa kompetensi-kompetensi dasar yang harus dimiliki siswa setelah menyelesaikan materi program persamaan garis lurus. Tanyakan kepada siswa tentang konsep persamaan garis lurus yang digunakan dalam berbagai bidang dalam kehidupan.

Guru mengajak siswa untuk mengingat kembali materi tentang garis dan gradien yang telah di pelajari di SMP melalui persamaan berikut.

Selanjutnya ajak siswa untuk mencermati Gambar 4.1.
Pastikan siswa memiliki keterampilan dalam menggambar garis l_1, l_2, dan l_3. Dengan mengajukan pertanyaan-pertanyaan, misalnya sebutkan titik potong garis l_1 dengan sumbu x dan sumbu y.

Dengan menggunakan konsep gradien, ajak siswa memerika gradien masing-masing garis.

Dari gambar di atas, tentunya kamu dapat menentukan gradien dan titik titik potong antara garis dan titik potong garis dengan setiap sumbu y dan sumbu x .

i. Dari persamaan garis l_1 , kamu sudah dapat mengetahui gradien garis tersebut. Tetapi, gradien garis l_1 dapat juga ditentukan melalui dua titik pada garis tersebut, misalnya A dan B. Tentunya hasilnya pasti sama.

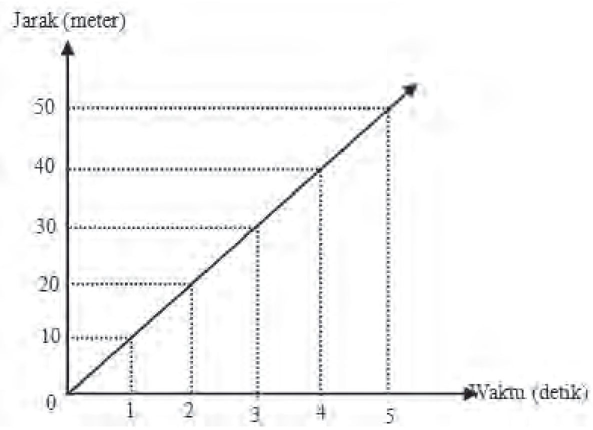
ii. Demikian halnya untuk garis l_2 dan l_3.

Dengan adanya persamaan garis atau dengan melalui titik potong garis, tentunya bukan sesuatu yang sulit menentukan gradien garis tersebut.

Mari kita telaah kondisi berikut ini.

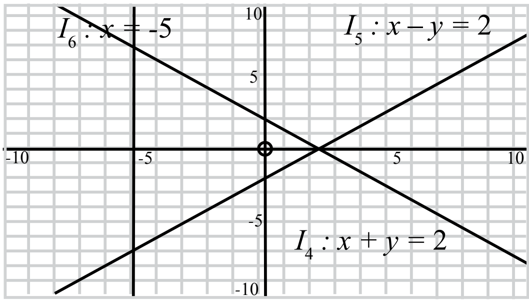
Di jalan yang lurus dan datar mungkin kelajuan mobil dapat diusahakan tetap. Gerak pesawat terbang pada ketinggian tertentu akan memiliki kecepatan tetap. Kecepatan tetap dapat disajikan sebagai garis lurus. Kedua contoh tadi adalah contoh dari gerak lurus beraturan (GLB), lintasan benda berupa garis lurus dan arah gerak selalu tetap sehingga perpindahan dapat diganti dengan jarak dan kelajuan tetap dapat diganti dengan kecepatan tetap. Sebuah benda yang bergerak dengan kecepatan tetap akan menempuh jarak yang sama untuk selang waktu t yang sama.

Dari Gambar 4.2, minta siswa untuk membaca grafik dan menarik kesimpulan dengan mempresentasikan di depan kelas. Faktor pengali "k" dengan waktu akan menghasilkan besar jarak. Dalam Gambar 4.2, k = 10. Nilai k tersebut merupakan gradien kecepatan.



Gambar 4.2: Grafik jarak terhadap waktu

Bandingkan grafik pada Gambar 4.2 dengan grafik di bawah ini.



Gambar 4.3

Pastikan siswa memahami perbedaan grafik pada Gambar 4.2 dan 4.3melalui mengajukan pertanyaan-pertanyaan. Misalnya, coba sebutkan minimal dua titik yang dilalui garis l_4, l_5, l_6. Selanjutnya minta siswa untuk menentukan gradien setiap garis tersebut.

Kita sebut gradien l_4 adalah m_4=-1 gradien l_5 adalah $m_5 = 1$.
Dari Gambar 4.1, 4.2, dan 4.3 dapat kita rangkum gradien tiap-tiap garis:

a) $l_1 : 2x + 2y = 4$ dengan $m_1 = -1$;

b) $l_2 : x + 5y = 10$ dengan $m_2 = -\dfrac{1}{5}$;

c) $l_3 : 3x - 5y = 15$ dengan $m_3 = \dfrac{3}{5}$;

d) $v : v = 10t$ dengan $m_v = 10$;

e) $l_4 : x + y = 2$ dengan $m_4 = -1$;

d) $l_5 : x - y = 2$ dengan $m_5 = 1$.

Kesimpulan yang bisa kita tarik dari ke enam garis di atas (kecuali garis l_6), setiap garis memiliki kemiringan terhadap sumbu x atau garis yang dimaksud membentuk sudut terhadap sumbu x.

Oleh karena itu, garis tidak mempunyai gradien (mengapa?)

Berikut ini kita akan mengkaji masalah tentang penampungan air yang terjadi di daerah-daerah yang kesulitan air untuk keperluan sehari-hari.

Ajak siswa berpikir untuk menemukan alasan, mengapa garis l_6 tidak memiliki gradien.
Jika siswa kesulitan menemukan alasannya, berikan petunjuk melalui grafik yang menggambarkan bahwa gradien merupakan kemiringan garis.

Motivasi siswa untuk menyadari kebermaknaan matematika dalam kehidupan sehari-hari.

Berikan waktu kepada siswa untuk memahami Masalah 4.1 hingga siswa mampu menemukan masalah yang dihadapi keluarga Pak Bambang.

Masalah-4.1

Keluarga Pak Bambang memiliki sumur dan mesin pompa untuk menyediakan air untuk keperluan minum, cuci dan mandi. Setelah melalui proses penyaringan, air sumur tersebut dialirkan ke bak mandi keluarga tersebut. Setiap hari, keluarga Pak Bambang memerlukan 1000 liter air, yang diperoleh dengan dua kali mengisi bak mandi (setiap pengisian 500 liter). Karena keterbatasan daya listrik di rumah Pak Bambang, mesin pompa hanya dapat digunakan pada saat alat-alat listrik lain di rumah tersebut tidak dioperasikan. Jumlah air yang tertampung setiap menit dinyatakan dalam tabel berikut ini.

Tabel 4.1: Volume air pada bak mandi setiap menit.

Waktu (menit)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Volume (Liter)	2	5	8	11	14	17	20	23	...

a) Dengan tanpa menunggu bak mandi hingga penuh, dapatkah kamu memberi tahu Pak Bambang tentang durasi waktu hingga bak tersebut penuh?

b) Jika Pak Bambang ingin mengurangi 50% durasi waktu pengisian bak mandi tersebut, berapakah volume air pe rmenit yang ditambah?

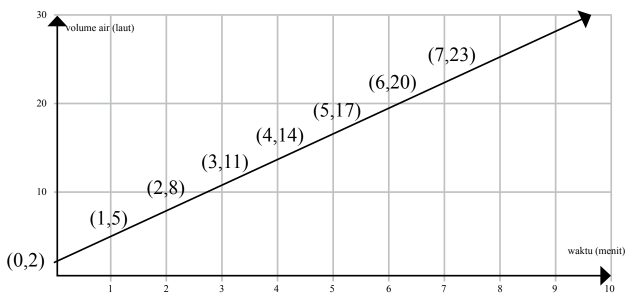
Ajukan pertanyaan-pertanyaan kepada siswa untuk mengetahui keterampilan siswa dalam membaca grafik hubungan volume air dengan waktu.

Misalnya, minta siswa menyelidiki kebenaran persamaan l: $-3t + v = 2$.

Atau tanyakan siswa konsep menentukan persamaan garis lurus yang telah dipelajari pada kelas VIII SMP.

Alternatif Penyelesaian

Hubungan volume air pada bak mandi dengan waktu dapat dideskripsikan pada grafik berikut ini.



Gambar 4.4: Hubungan volume air dengan waktu.

Sebaran koordinat waktu dan volume air berada pada satu garis lurus, dengan persamaan $l : -3t + v = 2$ (tunjukkan!). Persamaan $-3t + v = 2$ atau $v = 3t + 2$ memiliki gradien $m = 3$.

a) Ternyata, gradien persamaan garis tersebut merupakan faktor penentu besar tidaknya durasi waktu yang dibutuhkan untuk mengisi bak mandi keluarga Pak Bambang, selain konstanta. Karena volume air pada saat bak mandi penuh adalah 500 liter, akibatnya: $500 = 3t + 2$ diperoleh $t = 166$ menit atau 2,76 jam.

   Jadi durasi waktu yang dibutuhkan Pak Bambang hingga bak mandi tersebut penuh adalah 166 menit.

b) Coba kamu kerjakan. Jika kamu kesulitan, tanyakan kepada gurumu!

Alternatif Penyelesaian

Volumen bak mandi penuh adalah 500 liter, tetapi Pak Bambang ingin waktu yang dibutuhkan hingga bak penuh berkurang 50%. Artinya, volume air per menit harus diperbesar. Misal, k adalah volume air permenit.

Akibatnya : $500 = k\,(83) + 2$, diperoleh $k = 6$.

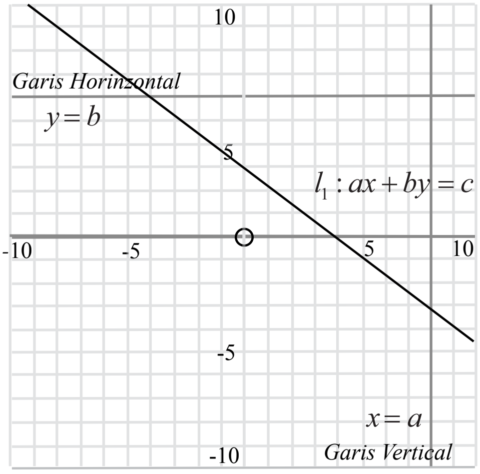
Jadi, untuk mengurangi 50 % waktu mengisi bak hingga penuh, debit air permenit harus ditambah 3 liter.

Cermati gambar di bawah ini, terdapat garis horizontal $y = b$, garis vertikal $x = a$ dan garis l_1 dengan persamaan $ax + by = c$. Tentu kamu sudah tahu mana dari ketiga garis tersebut yang memiliki gradien.

Pastikan siswa memahami makna persamaan l: -3t + v = 2 atau v = 3t + 2 dengan mengajukan pertanyaan-pertanyaan. Misalnya, apa arti angka 3 dan 2 pada persamaan tersebut.

Angka 3 pada persamaan tersebut berarti volume bak selalu bertambah 3 liter untuk setiap menit. Sedangkan angka 2 berarti, volume awal bak mandi.

Berikan waktu kepada siswa untuk mencoba menyelesaikan pertanyaan b). Berikan apresiasi kepada siswa yang mampu menjawab dengan benar atau seperti alternatif penyelesaian di samping.



Gambar 4.5: Garis vertikal, horizontal, dan garis l_1: $ax + by = c$.

Koordinasi siswa untuk berdiskusi menyelesaikan masalah di samping.

Persamaan garis l_1: $ax + by = c$ a,b dan c *merupakan bilangan real:*

$m - \frac{a}{b}$

- $m > 0$ *jika* $a > 0$ *dan* $b < 0$, *atau* $a < 0$ *dan* $b > 0$.
- $m < 0$ *jika* $a > 0$ *dan* $b > 0$ *atau* $a < 0$ *dan* $b < 0$.
- $m = 0$ *jika* $a = 0$ *dan* $b \neq 0$.
- *Garis* l *tidak memiliki gradien jika* $b = 0$.

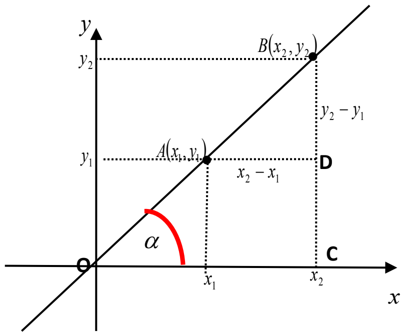
➢ Untuk memastikan pemahaman kamu akan eksistensi gradien suatu garis, dengan memperhatikan bentuk persamaan garis l_1: $ax + by = c$ a,b dan c merupakan bilangan real, selidiki syarat untuk:
- $m > 0$;
- $m < 0$;
- $m = 0$ dan
- garis l tidak memiliki gradien.

Rangkum secara rinci untuk setiap syarat yang kamu temukan!

Secara geometri, gradien atau kemiringan garis dijelaskan melalui grafik berikut ini.

Dari titik A ke B titik, terdapat suatu kenaikan (perubahan tegak) sebesar dan perubahan mendatar sebesar$(y_2 - y_1)$. Jadi kemiringan ($x_2 - x_1$) garis itu dinyatakan:

$$m = \frac{perubahan\ \ kenaikan}{perubahan\ \ mendatar}$$
$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 \neq x_1$$



Gambar 4.6

Pada Gambar 4.6, mari kita cermati segitiga siku-siku *OBC*, dengan siku-siku di titik *C*. Dengan mengingat kembali konsep perbandingan sudut pada segitiga siku-siku yang telah kamu pelajari pada kelas X, kita akan menentukan nilai tangen sudut α .

$$\tan \alpha = \frac{BC}{OC} = \frac{y_2}{x_2}$$

Sudut α merupakan besar sudut yang dibentuk garis yang melaui titik *A* dan *B* terhadap sumbu *x*.

- Perhatikan kembali Gambar 4.6, apakah besar $\angle BAD$ = besar $\angle \alpha$? Berikan Alasannya.

Alternatif Penyelesaian:

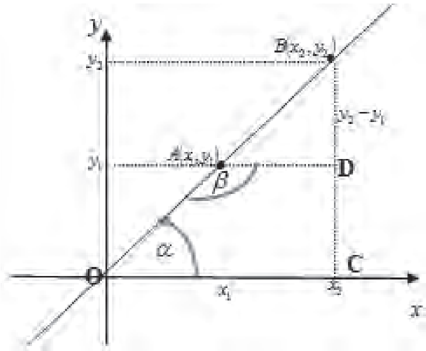
Perhatikan gambar di bawah ini.

$\angle\alpha$ dan $\angle\beta$ merupakan sudut-sudut sepihak dalam, dengan $\angle\alpha + \angle\beta = 180^o$ atau $= 180^o - \angle\alpha$.

Sedangkan $\angle\beta$ dan $\angle BAD$ merupakan dua sudut berpelurus, dituliskan:

$\angle\beta + \angle BAD = 180^o$ atau $\angle\beta = 180^o - \angle BAD$.

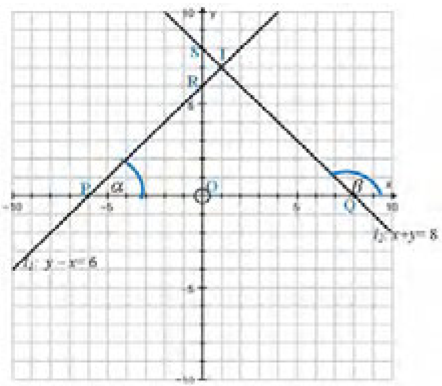
Ingatkan siswa akan konsep hubungan antar sudut pada materi garis dan sudut pada kelas VII SMP. $\angle BAD = \angle\alpha$.
Minta siswa menyajikan hubungan $\angle BAD = \angle\alpha$ di depan kelas.
Jika siswa menemukan jawaban seperti alternatef jawaban di samping, berikan apresiasi. Demikian jika ada cara lain yang ditemukan siswa.



Akibatnya: $\angle BAD = \angle\alpha$.

Contoh 4.1

Tentukan nilai tangen sudut setiap garis seperti pada gambar di bawah ini.



Gambar 4.7: Sudut-sudut yang dibentuk oleh garis l_1 dan l_2.

Keterangan:

Sudut merupakan sudut yang dibentuk oleh garis l_1 dengan Sumbu-X dan β merupakan sudut yang dibentuk oleh garis l_2 dengan Sumbu-X

Sudut α merupakan besar sudut yang dibentuk garis yang melaui titik A dan B terhadap sumbu x.

Alternatif Penyelesaian

Pada Gambar 4.7, kita akan menentukan nilai $\tan\alpha$ dan $\tan\beta$. Dengan segitiga siku-siku *POR* kita akan tentukan $\tan\alpha$, sedangkan dengan segitiga siku-siku *QOS* kita akan menentukan $\tan\beta$.

a) Cermati segitiga *POR*.
   Panjang sisi $PO = 6$, dan $OR = 6$.
   $$\tan\alpha = \frac{OR}{PO} = \frac{6}{6} = 1$$
   Nilai $\tan\alpha$ tersebut, mari kita bandingkan dengan gradien garis l_1: $y - x = 6.$; $m_1 = 1$.
   Hubungan m_1 dengan nilai, $\tan\alpha$ dituliskan sebagai berikut; $m_1 = \tan\alpha$.

b) Dengan cara yang sama untuk segitiga *SQO*, diketahui panjang sisi *QO* dan *OS* berturut-turut adalah 8 dan 8.
   Oleh karena itu, $\tan\left(180^\circ - \beta\right) = \dfrac{OQ}{OS} = \dfrac{8}{8} = 1$.
   Gradien garis l_2: $x + y = 8.$; $m_2 = -1$.
   Hubungan m_2 dengan nilai $\tan\left(180^\circ - \beta\right)$ dituliskan sebagai berikuti: $m_2 = \tan\left(180^\circ - \beta\right) = -\tan\beta$.

Bepikir Kritis

- Dari pembahasan contoh 4.1 , kesimpulan apa yang dapat ditarik ?
- Cermati kembali Gambar 4.7, coba tentukan nilai tangen sudut *PTQ*!

Jadi, hubungan gradien dengan besar sudut yang dibentuk garis dengan sumbu x adalah sebagai berikut:

Misal garis l: $ax + by = c$, dengan a, b, $c \in R$, a dan b tidak keduanya nol. Jika garis l membentuk sudut sebesar α (berlawanan arah jarum jam dari sumbu x positif) terhadap sumbu x, maka $\tan\alpha = m$.

Ingat......!!!!

$\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha$

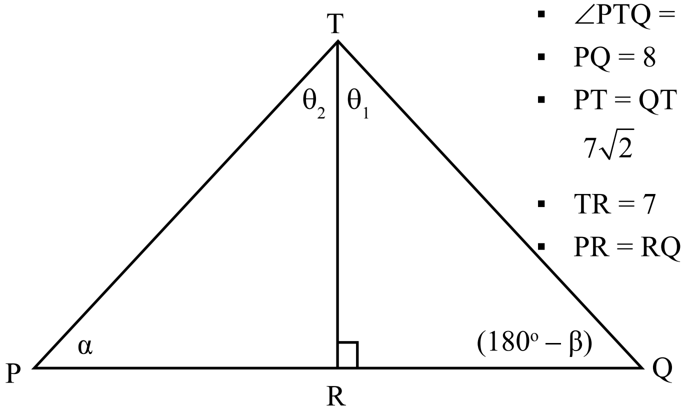
$\cos(180^o - \alpha) = \cos\alpha$

$\tan(180^o - \alpha) = \tan\alpha$

Bersama dengan siswa, guru menyimpulkan dari pembahasan Contoh 4.1 tentang konsep gradien suatu garis dengan nilai tangen sudut yang terkait garis.

Untuk pertanyaan kritis, berikan kesempatan kepada siswa untuk mencoba menyelesaikan. Bentuk kelompok belajar yang heterogen untuk membentuk sikap kemampuan bekerja sama antar siswa. Minta siswa untuk mampu menggambarkan setiap persamaan garis.

Sekarang perhatikan ΔPTQ.



- $\angle PTQ = \theta$
- $PQ = 8$
- $PT = QT = 7\sqrt{2}$
- $TR = 7$
- $PR = RQ = 7$

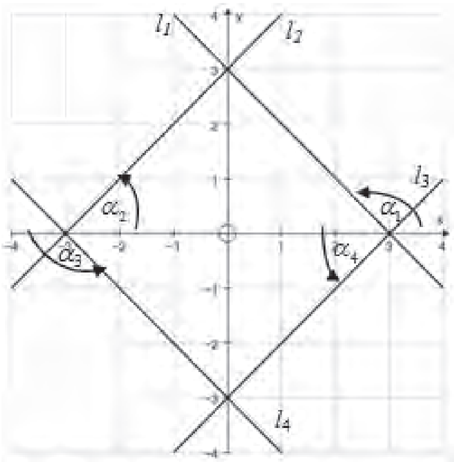
Perhatikan ΔTRQ, tan $\theta_1 = 1$, atau $\theta_1 = 45^o$. Dengan cara yang sama, diperoleh $\theta_2 = 45^o$. Karena $\theta_1 + \theta_2$, maka $\theta = 90^o$.

Jadi tan $\angle PTQ$ = tidak terdefinisi.

Untuk menjawab pertanyaan menantang, beri kepada siswa untuk menggali ide-ide untuk memecahkan masalah tersebut.
Guru hanya diperkenakan memberikan petunjuk-petunjuk untuk menyelesaikan pertanyaan tersebut.
Misalnya, arahkan siswa untuk menggambarkan l_1, l_2, l_3, dan l_4 dalam koordinat kartesius.
Ingatkan siswa bagaimana menentukan besar sudut yang dibentuk garis terhadap sumbu x.

Pertanyaan Menantang:
Diberikan persamaan garis:
l_1: $x + y = 3$
l_2: $-x + y = 3$
l_3: $x - y = 3$
l_4: $x + y = -3$
Hitunglah besar sudut yang dibentuk setiap garis dengan sumbu-x.

Untuk menentukan besar sudut yang dibentuk setiap garis l_1, l_2, l_3, dan l_4 dapat ditemukan dengan menentukan gradien setiap garis.



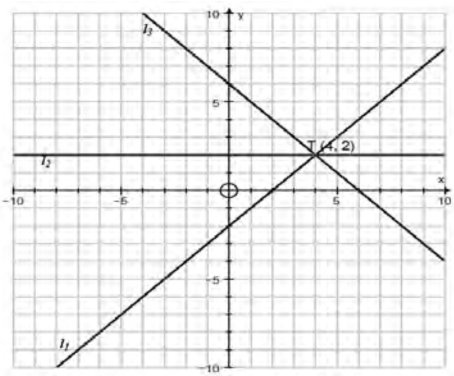
Minta siswa mengingat kembali nilai tangen sudut-sudut istimewa seperti yang telah dipelajari pada Bab 8 Kelas X SMA.

- Gradien l_1; m_1 = -1. Karena m_1 = tan α_1 = -1, maka = 135°.
- Gradien l_2; m_2 = 1. Karena m_2 = tan α_2 = 1, maka = 45°.
- Gradien l_3; m_3 = 1. Karena m_3 = tan α_3 = 1, maka = 225°.
- Gradien l_4; m_4 = -1. Karena m_4 = tan α_4 = –1, maka = 315°.

Uji Kompetensi 4.1

Motivasi siswa untuk mengasah pengetahuan dan keterampilan mereka tentang gradien garis melalui pemberi tugas mengerjakan soal-soal pada Uji Kompotensi 4.1. Guru harus memeriksa semua hasil pekerjaan siswa sebagai salah satu cara membangun kepercayaan diri siswa dan mengapresiasi hasil pemikiran mereka.

1. Tentukan gradien setiap garis pada grafik berikut ini.



Gambar 4.8

Jika ada garis yang tidak memiliki gradien, berikan alasannya!

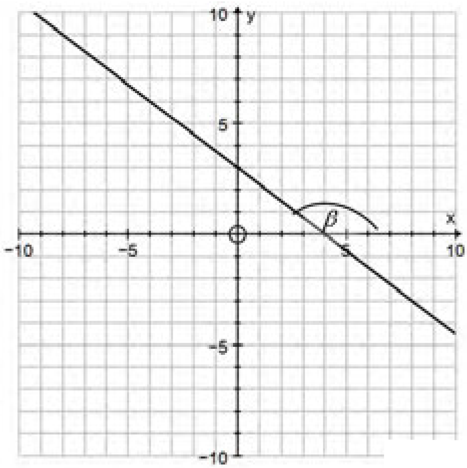
2. Tentukan nilai p untuk setiap koordinat di bawah ini.
   a. $A\,(2,p)$ dan $B(2,2p-3)$ dengan $m = 7$.
   b. $A\,(12-3p,4)$ dan $B(8,7p-3)$ dengan $m = 5$.
   c. $A\,(5-6p,3p)$ dan $B(8,7p-3)$ dengan $m = \dfrac{1}{2}$.

3. Jika $P(x_p, y_p)$ dan $Q(x_q, y_q)$, tentukan syarat yang harus dipenuhi agar garis yang melalui titik tersebut memiliki gradien yang positif.

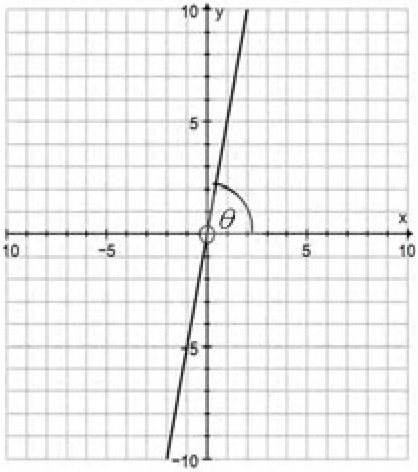
4. Tentukanlah nilai k untuk setiap persamaan garis berikut, untuk
   a. g_1: $(3k)x - 6y = 20$ dengan gradiennya sama dengan gradien g_2: $(3k)x - 2y = 16$.
   b. l_1: $(3k + 2)x + ky = 12$ dengan gradiennya sama dengan gradien l_2: $7x + (k-6)y = 16$.

5. Cermati grafik berikut ini.

(i)



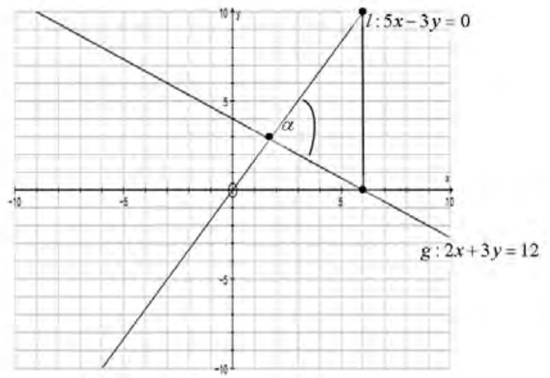
(ii)



Gambar 4.9

Tentukan persamaan garis untuk masing-masing garis pada gambar (i) dan (ii). Selanjutnya hitunglah nilai tangen setiap sudut yang diberikan pada gambar.

6. Perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 4.10

Tentukan besar sudut α .

7. Diberikan dua persamaan garis:
   $l : 2x + 3y = 6$
   $g: 4x - 5y = 0$
   Tentukan nilai sinus sudut yang dibentuk oleh garis l dan g .

8. Gradien suatu garis sama dengan nilai tangen sudut yang dibentuk garis dengan sumbu X. Tentukan persamaan garis melalui titik potong garis $3x + 4y = 12$ dan $x - 4y = 0$ dan memiliki gradien sama dengan nilai tangen sudut pada soal No.6.

9. Diberikan dua persamaan garis:

   $l_1 : a_1x + b_1y = c_1$; $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ dan $l_2 : a_2x + b_2y = c_2$; $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$.

   $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ bilangan real.

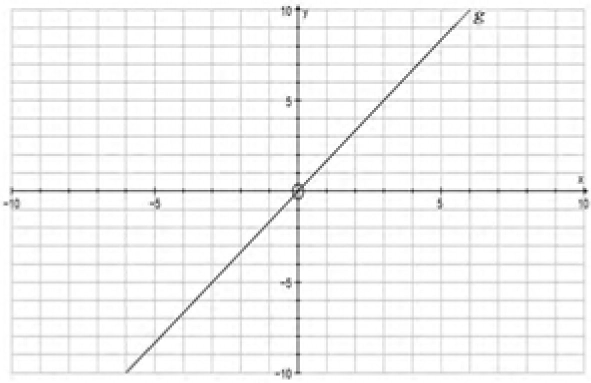
   Tentukan syarat yang harus dipenuhi apabila:

   a. $m_1 > m_2$

   b. $m_1 < m_2$

   dimana: m_1 : gradien garis l_1 dan m_2 : gradien garis l_2.

10. Perhatikan gambar garis di bawah ini.



Gambar 4.11

Tentukanlah persamaan garis paling sedikit dua garis yang:

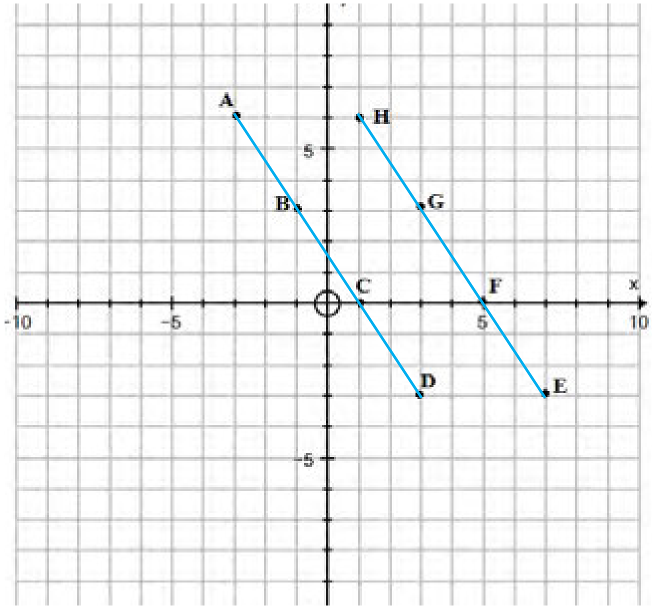
a. Sejajar dengan garis g

b. Tegak lurus dengan garis g

2. Hubungan Antar Garis

a. Garis Garis Sejajar

Perhatikan titik-titik yang terdapat pada bidang kartesius berikut ini.



Gambar 4.12

Pastikan siswa tetap memiliki motivasi untuk menggali ide-ide dalam menemukan hubungan garis dengan menggunakan konsep gradien.

Ajukan pertanyaan-pertanyaan kepada siswa untuk membekali pikiran mereka terhadap materi garis-garis sejajar. Misalnya, Apakah ciri-ciri dua garis sejajar?

Berikan kesempatan kepada siswa untuk mencoba membentuk pasangan garis lurus yang sejajar yang minimal melalui tiga titik dan melalui 2 titik.

- Dari gambar di atas, coba tarik garis yang melalui minimal tiga titik. Kemudian tentukan persamaan garis yang kamu peroleh.

  Ada dua garis yang melalui minimal tiga titik, yaitu garis l_1 dan l_2. Garis l_1 melalui titik A(-3,6), B(-1,3), dan D(3,-3).

  Jadi persamaan garis l_1 ditentukan melalui:

  $$\frac{x-(-3)}{-1-(-3)} = \frac{y-6}{3-6} \text{ atau } 3x+2y=3. \qquad (1)$$

  Garis l_2 melalui titik H(1,6), G(3,3), dan F(5,0). Jadi persamaan garis l_2:

  $$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-6}{3-6} \text{ atau } 3x+2y=15.$$

Minta siswa menentukan persamaan garis lurus yang melalui minimal tiga titik yang sudah ditemukan pada Gambar 4.12.

Pastikan siswa mampu menemukan garis yang melalui 2 titik dengan mampu menyebutkan titik yang dilalui garis tersebut.
Selanjutnya minta siswa untuk menemukan persamaan setiap garis.

- Dari gambar di atas, coba tarik garis yang melalui dua titik. Kemudian tentukan persamaan tiap-tiap garis yang kamu peroleh.
  Misalnya garis yang melalui titik D(3,3) dan F(5,0), yaitu:
  $\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-3}{0-3}$ atau $3x + 2y = 15$.
  Pada Gambar 4.12, terdapat 15 garis lain yang melalui 2 titik.
  Minta siswa menemukan ke 15 garis yang melalui 2 titik dengan lengkap menyajikan titik-titik yang dilalui setiap garis tersebut.

Ajak siswa mencermati kembali garis yang ditemukan, yaitu garis yang minimal melalui 3 titik dan garis yang melalui 2 titik.
Minta siswa menyelidiki garis yang berpotongan dan garis yang tidak berpotongan (sejajar).

- Dari semua garis yang kamu peroleh, adakah kamu temukan garis yang saling berpotongan? Jika ya tentukan titik potongnya.
  Untuk garis yang melalui minimal tiga titik, ada 1 pasang garis yang tidak saling berpotongan, yaitu: garis l_1 dan l_2. Sedangkan untuk garis yang melalui 2 titik, terdapat 11 pasang garis yang tidak berpotongan. Misalnya, garis yang melalui titik A(-3,6) dan F(5,0) dan garis yang melalui titik B(-1,3) dan E(7,-3).

Ingatkan kembali kepada siswa konsep garis dan sudut pada kelas VII SMP, bahwa untuk garis l_1 dan l_2 sejajar, jika garis l_3 memotong garis l_1 maka l_3 memotong l_2.

Motivasi siswa untuk mampu menyimpulkan syarat suatu titik dilalui oleh suatu garis.
Jika titik B(-1,3) dilalui garis l1, maka kesamaan 3x + 2y =3 adalah benar.

Pastikan siswa sudah memiliki keterampilan untuk menentukan persamaan garis yaitu

Untuk menentukan titik potong antar garis, minta siswa memperhatikan Gambar 4.12 atau menggunakan konsep eliminasi, subsitusi.

Bandingkan hasil kerjamu dengan temanmu.

Dari Gambar 4.12, dapat kita tentukan persamaan garis yang melalui titik A (-3,6) dan D(3,-3).

$$\frac{y-(-3)}{x-3} = \frac{6-(-3)}{-3-3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y+3}{x-3} = \frac{-3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x + 2y = 3$$

Sebut $l_1 : 3x + 2y$

- Selidiki apakah garis l_1 melalui titik B(-1,3) dan titik C(1,0)!

Dengan persamaan garis $l_1 : 3x + 2y = 3$, bandingkan dengan persamaan garis yang kamu peroleh.

Persamaan garis $l_2 : 3x + 2y = 15$ melalui titik E(7,-3) dan titik H(1,6) (selidiki!). Selain itu, garis l_2 juga melalui titik G(4,3) dan titik F(5,0).

- Melalui grafik garis l_1 dan l_2, kemudian tentukan gradien kedua garis, dan analisis gradien kedua garis tersebut

Selanjutnya, dari hasil kerja menentukan persamaan garis yang melalui dua titik, kita peroleh persamaan-persamaan berikut ini:

i. $l_3 : 2y - 3x = 9$ merupakan persamaan garis yang melalui titik B(-1,3) dan H(1,6).

ii. $l_4 : 3x - 2y = 3$ merupakan persamaan garis yang melalui titik C(1,0) dan G(3,3).

iii. $l_5 : 3x - 2y = 15$ merupakan persamaan garis yang melalui titik D(3,-3) dan F(5,0).

iv. $l_6 : x - 2y = 9$ merupakan persamaan garis yang melalui titik A(-3,6) dan G(3,3).

v. $l_7 : x - 2y = 5$ merupakan persamaan garis yang melalui titik B(-1,3) dan F(5,0).

vi. $l_8 : x - 2y = 1$ merupakan persamaan garis yang melalui titik C(1,0) dan E(7,-3).

Pada kesempatan ini, kita tidak mengkaji garis-garis horizontal dan garis-garis vertikal

- Dari persamaan garis l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, dan l_8, selidiki pasangan garis yang saling sejajar. Tunjukkan grafik dan hubungan gradien setiap pasangan garis.

dengan meminta siswa untuk menyelidiki kebenaran persamaan garis l_2.

Ajak siswa untuk menentukan gradien garis l_1: $3x + 2y = 3$ dan garis l_2: $3x + 2y = 15$.
Untuk l_1; $m_1 = -\frac{3}{2}$ sedangkan untuk l_2; $m_2 = -\frac{3}{2}$.

Minta siswa mampu menyimpulkan hubungan gradien garis l_1 dan l_2.
Jadi ditemukan dua garis yang tidak saling berpotongan memiliki gradien yang sama.

Berikan kesempatan kepada siswa untuk berlatih menggambar garis l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7 dan l_8. Kemudian ajak siswa untuk memahami grafik garis l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, dan l_8.
Untuk memastikan siswa paham akan grafik di samping ajukan pertanyaan-pertanyaan.

Misalnya:
- *Sebutkan garis-garis yang kemiringannya sama dengan garis l_3.*
- *Sebutkan garis-garis berpotongan dengan garis l_3.*

Dari aktivitas ini, diharapkan siswa memiliki pengetahuan dan keterampilan tentang garis-garis sejajar.

Arahkan siswa untuk mampu membuat kesimpulan tentang sifat-sifat atau ciri-ciri garis-garis sejajar.

Berikan penjelasan kepada siswa akan keterpaduan materi-materi dalam belajar matematika. Salah satu diantaranya, hubungan antar himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan gradien garis.

Misalkan:

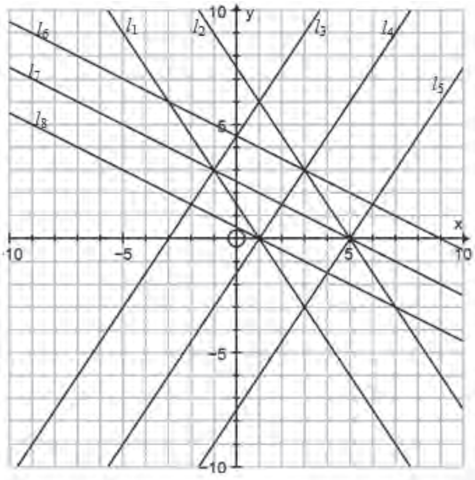
l_1: $ax +$ [illegible]

dengan $m_1 - \frac{a}{b}$

l_2: $rx +$ [illegible]

dengan $m_2 - \frac{r}{s}$.

Ajak siswa mengetahui eksistensi penyelesaian sistem persamaan linear melalui perbandingan koefisiennya. Hal ini, analog untuk menyelidiki dua garis yang saling sejajar.



➢ Pada Kelas X, kita telah mengkaji tentang sistem persamaan linear dua variabel. Coba kamu ingat kembali, apa syarat yang harus dipenuhi sistem;

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ rx + sy &= t \end{aligned}\right\}$$

Agar memiliki himpunan penyelesaian dan tidak memiliki himpunan penyelesaian. Jika memiliki himpunan penyelesaian, apakah tunggal atau banyak?

Sistem persamaan $\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ rx + sy &= t \end{aligned}\right\}$

- memiliki himpunan penyelesaian tunggal jika $\frac{a}{b} \neq \frac{r}{s}$.
- memiliki himpunan penyelesaian tak hingga banyaknya jika $\frac{a}{b} = \frac{r}{s} = \frac{c}{t}$.
- tidak memiliki himpunan penyelesaian, jika $\frac{a}{b} = \frac{r}{s} \neq \frac{c}{t}$.

Contoh 4.2

a) $\left.\begin{aligned} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3x - 5y = 15 \\ -6x + 10y = 15 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 3x - 2y = 14 \\ 2x + 3y = 5 \end{aligned}\right\}$

Latihan Mandiri

Tentu kamu masih ingat bagaimana memeriksa sistem yang memiliki solusi (tunggal atau banyak), dan yang tidak memiliki solusi.

Perhatikan sistem a)!

Dimisalkan: l_{1a} : $2x - y = 1$;

l_{1b} : $x - 3y = 4$.

Pada garis l_{1a}, perbandingan nilai koefisien variabel x dan y ($m_{1a} = 2$) tidak sama dengan perbandingan nilai koefisien variabel x dan y ($m_{1b} = -\frac{1}{3}$) pada garis l_{1b}. Kondisi ini juga merupakan tanda bahwa sistem persamaan a) memiliki penyelesaian.

Untuk sistem persamaan b),

l_{2a}: $3x - 5y = 15$

l_{2b}: $-6x + 10y = 15$

Pada garis l_{2a}, perbandingan nilai koefisien variabel x dan y ($m_{2a} = \frac{3}{5}$) sama dengan perbandingan nilai koefisien variabel x dan y ($m_{2a} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$) pada garis l_{2b}. Hal ini memiliki arti bahwa, garis l_{2a} dan l_{2b} tidak pernah melalui satu titik yang sama. Oleh karena itu, sistem b) tidak memiliki penyelesaian.

Dari garis sejajar, guru meminta siswa untuk menyilidiki syarat dua garis saling tegak lurus. Kemudian merumuskan-nya pada Sifat4.4.

Selanjutnya, sistem persamaan c),

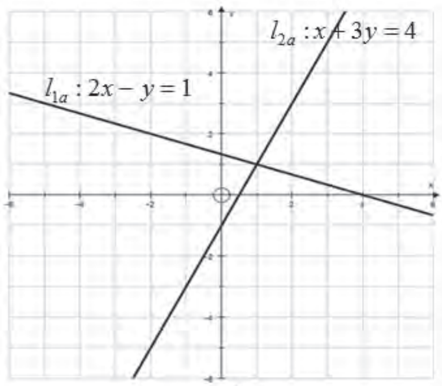
l_{3a}: $3x - 2y = 14$

l_{3b}: $2x + 3y = 5$

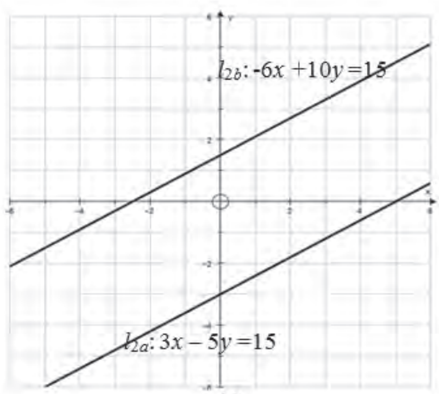
Perbandingan nilai koefisien variabel x dan y $\left(m_{3a} = \frac{3}{2}\right)$ pada garis l_{3a} berbanding terbalik dengan perbandingan nilai koefisien variabel x dan y $\left(m_{3b} = -\frac{2}{3}\right)$ pada garis l_{3b}, serta hasil kalinya sama dengan -1. Dengan kondisi ini, secara sistem persamaan, sistem c) memiliki penyelesaian tunggal.

Secara grafik, kondisi sistem a), b), dan c) disketsakan sebagai berikut.

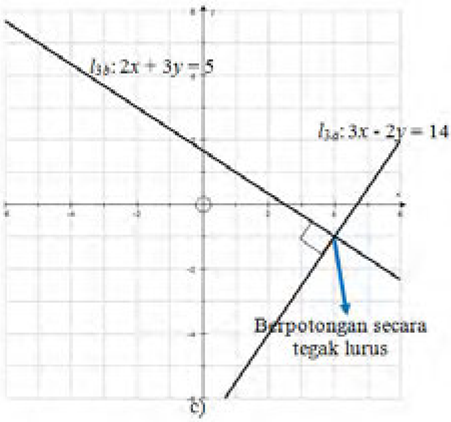
Melalui pembahasan Contoh 4.2, pastikan siswa memiliki keterampi-lan untuk membedakan garis yang berpotongan dan garis yang berpoto-ngan tegak lurus, seperti bagian a) dan c).



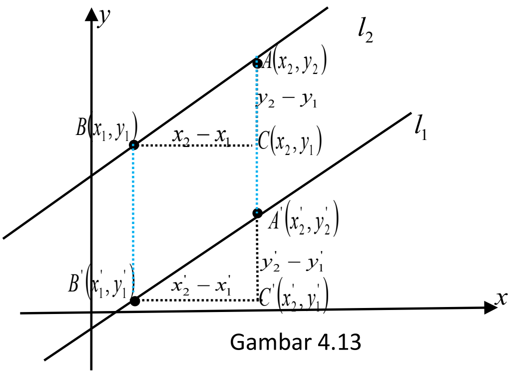
a)



b)



Gambar 4.13: Grafik sistem persamaan linear



Gambar 4.13

Guru menugasi siswa untuk mengerjakan Latihan 4.1 untuk memantapkan pengetahuan dan keterampilan siswa.

Secara umum, kondisi dua garis sejajar dideskripsikan sebagai berikut.

Misal, garis l_1 melalui titik $A'(x_1', y_1')$ dan $B'(x_2', y_2')$, dengan gradien m_1. Garis l_2 melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dengan gradien m_2.

Ajak siswa berpikir secara sistematis dalam menyimpulkan syarat dua garis yang saling sejajar.

Mari kita cermati segitiga ABC dan $A'B'C'$. Kedua segitiga tersebut merupakan dua segitiga yang sebangun.

Oleh karena itu berlaku:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} \text{ atau } m_1 = m_2$$

Selain itu, jarak titik A ke titik A' sama dengan jarak titik B ke titik B'. Kondisi ini semakin memperkaya bukti bahwa garis l_1 sejajar dengan garis l_2 .

Dengan demikian, sifat dua garis sejajar dinyatakan dalam sifat berikut.

Pastikan siswa mengetahui makna setiap syarat yang terdapat pada Sifat 4.1, melalui mengajukan pertanyaan-pertanyaan. Misalnya, bagaimana jika syarat a berubah menjadi a = 0.

Sifat 4.1

Misalkan garis $g_1 : ax + by = c$; $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ dengan gradien m_1

$g_2 : rx + sy = t$; $r \neq 0$ dan $s \neq 0$ dengan gradien m_2

:a, b, c, r, s, t merupakan bilangan real.

Garis g_1 sejajar dengan g_2 jika dan hanya jika gradien kedua garis sama.

Secara matematis dinotasikan: $g_1 // g_2 \leftrightarrow m_1 = m_2$.

Dari Sifat 4.1, mari kita cermati hubungan di antara koefisien-koefisien a, b, c, r, s, dan t.

Karena $m_1 = m_2$, dapat kita tulis bahwa $\frac{a}{b} = \frac{r}{s}$ atau $\frac{a}{r} = \frac{b}{s}$.

Ingat, walaupun $\frac{a}{r} = \frac{b}{s}$,tetapi tidak berlaku bahwa $\frac{a}{r} = \frac{c}{t}$ atau $\frac{b}{s} = \frac{c}{t}$ $\frac{b}{s} = \frac{c}{t}$ (mengapa?).

Perlakuan-perlakuan ini dapat kita simpulkan dalam sifat berikut ini.

Sifat 4.2

Misalkan garis $g_1 : ax + by = c$; $a \neq 0$ dan $c \neq 0$ dengan gradien m_1

$g_2 : rx + sy = t$; $r \neq 0$ dan $t \neq 0$ dengan gradien m_2

a, b, c, r, s, t merupakan bilangan real.

Jika $\frac{a}{r} = \frac{b}{s} = \frac{c}{t}$ maka garis g_1 berimpit dengan garis g_2.

Ajukan pertanyaan-pertanyaan untuk memastikan siswa memahami semua syarat yang ada pada Sifat 4.2. Misalnya, jika a, r = 0, apakah kedua garis dinyatakan dua garis saling berimpi?

Untuk lebih memantapkan pemahaman kita akan hubungan dua garis yang sejajar, mari kita cermati contoh berikut ini.

Contoh 4.3

a) Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik potong garis-garis dengan persamaan $3x + 2y = 12$ dan $5x + 2y = 16$ serta sejajar dengan garis $2x + y = 4$.

b) Carilah nilai k sedemikian sehingga garis $kx - 3y = 10$ sejajar dengan garis $2x + 3y = 6$.

Alternatif Penyelesaian

a) Terlebih dahulu kita menentukan titik potong garis $3x + 2y = 12$ dan $5x + 2y = 16$.

Dengan cara eliminasi ataupun subsitusi, diperoleh titik potong kedua garis tersebut (2, 3). Misal, garis g merupakan garis yang melalui titik (2, 3), serta sejajar dengan garis $2x + y = 4$ maka gradien garis , sebut $m_g = -2$

Jadi persamaan garis g, diperoleh:

$y - 3 = -2\ (x - 3)$ atau $2x + y = 3$.

Motivasi siswa untuk memiliki sikap tangguh dalam memahami dan memecahkan masalah dan soal-soal terkait hubungan dua garis.

Ajak siswa untuk memahami Contoh 4.3, dan berikan kesempatan kepada siswa untuk mengajukan pertanyaan-pertanyaan atau ide-ide cemerlang terhadap konsep dan penerapan garis-garis sejajar dalam kehidupan sehari-hari.

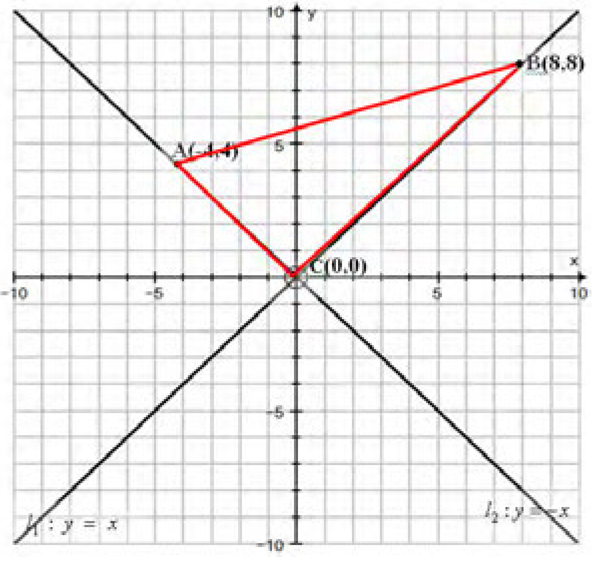
b) Karena garis, $kx - 3y = 10$ sebut g_1, sejajar dengan garis $2x + 3y = 6$, sebut g_2 maka $m_{g1} = m_{g2}$. Akitanya $\frac{k}{3} = -\frac{2}{3}$, atau k = –2. Dengan demikian dapat kita tulis bahwa garis $-2x - 3y = 10$ sejajar dengan $2x + 3y = 6$.

Berikan penjelasan kepada siswa perbedaan dua garis berpotongan dengan dua garis berpotongan secara tegak lurus melalui grafik atau ilustrasi-ilustrasi.

b. Garis-Garis Tegak Lurus

Perhatikan grafik berikut ini.

Sekarang mari kita amati segitiga ABC. Kita akan selidiki apakah segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku atau tidak. Tentu, sudut yang diduga merupakan sudut siku-siku adalah sudut ACB. Dengan menggunakan alat pengukur sudut (busur) atau penggaris berbentuk segitiga siku-siku, sudut ACB merupakan sudut-sudut siku-siku



Gambar 4.14: Garis l_1 dan l_2 berpotongan secara tegak lurus.

Ajak siswa untuk berpikir kritis untuk mengahasilkan ide-ide dalam membuktikan dua garis berpotongan tegak lurus.

Oleh karena itu, dapat kita tarik kesimpulan bahwa garis l_1 memotong secara tegak lurus garis l_2.

Selanjutnya, akan kita selidiki hubungan gradien garis l_1 (m_1) dan gradien garis l_2 (m_2).

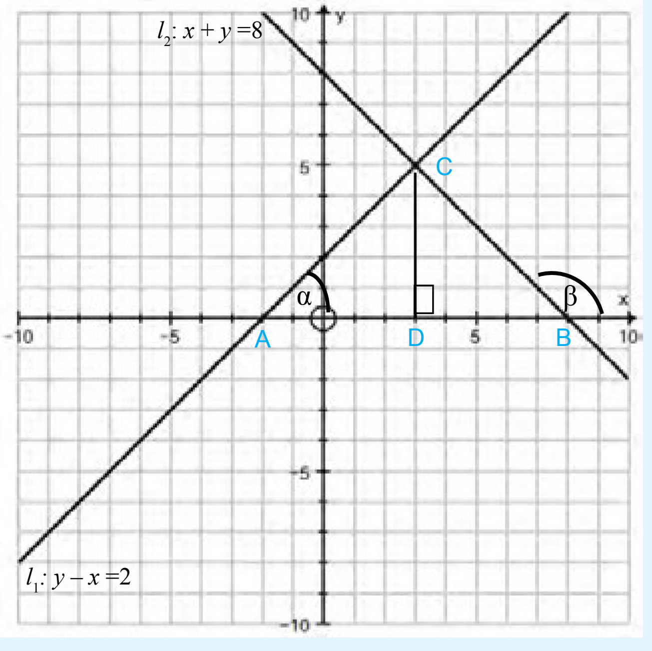
$l_1 : y = x$, dengan $m_1 = 1$;

$l_2 : y = -x$, dengan $m_2 = 1$.

Ternyata, $m_1.m_2 = -1$.

Masalah-4.1

Perhatikan gambar berikut ini!



Gambar 4.15: Garis l_1 dan l_2 , dengan gradien berbeda tanda berpotongan secara tegak lurus.

Selidiki bahwa hubungan gradien garis l_1 dengan l_2!

Motivasi siswa agar meningkatkan ketelitian mereka dalam mencermati Masalah 4.1. Berikan kesempatan kepada siswa yang memiliki ide lain untuk menunjukan l_1 berpotongan tegak lurus dengan l_2.

Garis l_1: $y = m_1x + c_1$ mempunyai gradien, sedangkan garis l_2: $y = m_2x + c_2$ mempunyai gradien tan $\beta = m_2$.
Selidiki bahwa hubungan gradien garis l_1 dengan l_2!

Alternatif Penyelesaian

Diketahui garis l_1: $y = m_1x + c_1$ mempunyai gradien, sedangkan garis l_2: $y = m_2x + c_2$ mempunyai gradien tan $\beta = m_2$.

Cermati segitiga siku-siku ABC!

Karena $\angle$ A = α dan $\angle$ C = 90^0 maka $\angle$ B = 180^0 β. Oleh karena itu $\beta = (90^0 + \alpha)$(tunjukkan!).

Diberikan kebebasan kepada guru, jika guru memiliki ide-ide kreatif dalam menunjukkan bahwa garis l_1 dan l_2 berpotongan secara tegak lurus.

Diketahu tan $\beta = m_2$.

Akibatnya:

tan = $(90^0 + \alpha) = m_2$

$$\leftrightarrow \frac{1}{\tan\alpha} - m_2$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{m_1} - m_2$$

Ingat

$$\tan(90^0 + \alpha) = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

diperoleh: $m_1.m_2 = -1$

Libatkan siswa dalam menyimpulkan syarat-syarat dua garis berpotongan secara tegak lurus. Uji pemahaman siswa akan Sifat 4.3, dengan mengajukan pertanyaan-pertanyaan. Misalnya, apakah garis $x = 2$ berpotongan tegak lurus denga garis $y = 3$? Minta siswa memberikan alasannya.

Dengan demikian, syarat dua garis yang saling tegak lurus dinyatakan dalam sifat berikut ini.

Sifat 4.4

Misalkan garis g_1 : $bx - ay = t$; $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ dengan

gradien $m_1 = \frac{b}{a}$

g_2 : $ax - by = c$; $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ dengan

gradien $m_2 = -\frac{a}{b}$

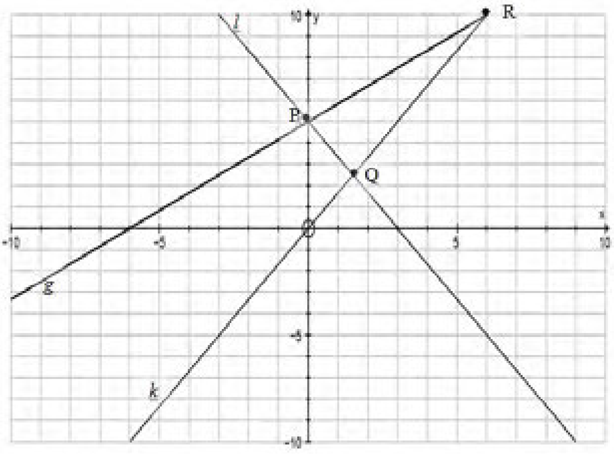
a, b, c, merupakan bilangan real.

Garis g_1 berpotongan tegak lurus dengan garis g_2, dinotasikan $g_1 \perp g_2$.

Contoh 4.4

Mari kita cermati grafik di bawah ini!

Selidiki hubungan antar garis yang berlaku.



Gambar 4.16

Melalui Contoh 4.4, arahkan siswa mampu menemukan ciri-ciri dua garis yang berpotongan tegak lurus.

Berikan kebebasan kepada siswa jika memiliki ide-ide lain untuk memecahkan soal tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Langkah awal, dengan memperhatikan pasangan titik koordinat yang dilalui tiap-tiap garis, kita dapat menentukan persamaan dan gardien setiap garis.

$l: 5x + 3y = 15$, dengan $m_l = -\dfrac{5}{3}$

$g: 6y - 5x = 30$, dengan $m_g = \dfrac{5}{6}$

$k: 5x - 3y = 0$, dengan $m_k = \dfrac{5}{3}$.

Latihan 4.1

Sebagai latihan secara mandiri,

- selidiki apakah garis l dan garis k berpotongan secara tegak lurus?
- selidiki juga hubungan garis l dan garis g!

Diskusikan hasil kerjamu dengan temanmu.

Berikan penugasan dalam kelompok heterogen untuk menyelesaikan Latihan 4.1. Minta siswa menyajikan hasil kerja mereka di depan kelas.

Ujilah pengetahuan dan keterampilan siswa tentang persamaan garis secara menyeluruh melalui penugasan mandiri menyelesaiakan soal-soal pada Uji Kompetensi 4.2. Pastikan Guru memeriksa setiap hasil kerja dan pemikiran siswa yang telah mereka tuangkan dalam penyelesaian soal-soal yang mereka kumpulkan.

Uji Kompetensi 4.2

1. Selidikilah hubungan setiap pasangan garis dengan persamaan di bawah ini.
   a. $g_1 : -2x + 5y = 7$ dan $g_2 : 3x - 4y = 12$.
   b. $l_1 : ax + by = c$ dan $l_2 : px + qy = s$, dengan $a < b$ dan $p > q$, $a, b, p, q \in R$.
2. Penelitian terbaru menunjukkan bahwa suhu rata-rata permukaan Bumi meningkat secara teratur. Beberapa peneliti memodelkan suhu permukaan Bumi sebagai berikut: $T = 0.02t + 8.50$, T menyatakan suhu dalam ^{0}C dan t menyatakan tahun sejak 1900.
   a. Tentukan kemiringan garis tersebut, dan interpretasikan bilangan tersebut.
   b. Dengan menggunakan persamaan tersebut, prediksilah rata-rata perubahan suhu pada tahun 2200
3. Seorang manager perusahaan perabot harus menyediakan modal sebesar Rp22.000.000,00 untuk memproduksi 100 kursi kantor dan Rp48.000.000,00 untuk memproduksi 300 kursi yang sama.
   a. Nyatakanlah biaya tersebut sebagai persamaan kursi yang diproduksi, dengan mengasumsikan hubungan antara biaya dan banyak kursi adalah linear.
   Kemudian gambarkan.
   b. Tentukan gradiennya, dan jelaskan arti bilangan itu.
   c. Dari sketsa, jelaskan makna grafik tersebut.
4. Perhatikan persamaan garis di bawah ini!
   $g_1 : ax + by = c$ dan $g_2 : px + qy = t$, $a, b, p, q \in$ R.
   Tunjukkan hubungan antara koefisien a, b dengan p, q agar $g_1 // g_2$

5. Tentukanlah k untuk setiap persamaan garis berikut.
   a. g_1 : $(2 – k)x – y = 8$ dan g_2 : $(4 + k)x + 3y = 12$ agar $g_1 \perp g_2$.
   b. l_1 : $(3k + 5)x – 2y = 10$ dan $l2$: $(–k – 3)x – 7y = 14$ agar $g_1 // g_2$.

6. Tentukan persamaan garis l_1 yang melalui titik $(–7, 3)$ dan tegak lurus dengan garis $l_2 : 3x – 5y = 12$. Kemudian gambarkan grafiknya.

7. Diberikan dua garis dengan persamaan yang diperoleh dari matriks berikut:

$$\begin{pmatrix} -3 & p \\ q & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Tentukan perbandingan p dan q jika kedua garis saling tegak lurus.

8. Diketahui titik $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, C dan AB adalah titik tengah. Tentukan persamaan garis yang tegak lurus AB dan melalui titik C

9. Diketahui $P(3,3)$, $Q(4,-1)$ dan $R(-8,-4)$. Tentukan besar sudut perpotongan garis PQ dan QR.

10. Diberikan garis l : $(x – 2y) + a(x + y) = 5$ dan garis g : $(5y – 3x) –3a(x + y) = 12$.
    Tentukan nilai a agar:
    a. $l // g$
    b. $l \perp g$

Motivasi siswa untuk mampu menerapkan apa yang telah mereka pelajari dalam menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari. Minta siswa menyusun hasil pemikiran dan kerja mereka sebagai laporan soal projek.

Projek

Cari masalah dalam kehidupan sehari (minimal dua masalah nyata) yang menerapkan hubungan dua garis yang saling sejajar dan dua garis yang berpotongan secara tegak. Deskripsikan kebermaknaan garis tersebut dalam kehidupan sehari-hari.

Susunlah hasil temuanmu dalam bentuk laporan hasil kinerja suatu proyek. Kamu diberikan waktu satu minggu untuk menuntaskannya secara baik dan teliti.

Sebagai rangkuman pada bab ini, ajak siswa membaca dan memahami beberapa hal penting yang perlu diketahui siswa terkait konsep persamaan garis lurus.

D. PENUTUP

Beberapa hal penting yang perlu dirangkum terkait sifat-sifat persamaan garis lurus adalah sebagai berikut.

1. Persamaan linear, biasanya dinyatakan dalam bentuk $ax + by = c$, dengan a, b, c merupakan bilangan riil. Model matematika permasalahan sehari-hari, khususnya dalam masalah ekonomi sering menjadi masalah yang terkait persamaan garis lurus.

2. Konsep dan sifat-sifat persamaan garis ini didasari oleh konsep persamaan linear dua variabel. Setiap garis, $ax + by = c$, memiliki kemiringan atau disebut gradien yang dinotasikan dengan m, kecuali garis vertikal. Gradien tersebut sama dengan nilai tangen sudut yang dibentuk garis terhadap sumbu x positif.
3. Garis $l : ax + by = c$ dikatakan sejajar dengan garis $g : px + qy = t$ jika dan hanya jika kedua garis tidak pernah berpotongan atau memiliki gradien yang sama.

Dikatakan saling tegak lurus jika dan hanya jika kedua garis berpotongan dan hasil kali gradiennya sama dengan -1.

Penguasaan kamu tentang persamaan garis lurus sangat penting bermanfaat untuk bahasan persamaan garis singgung pada lingkarang dan persamaan singgung pada kurva. Untuk penerapan persamaan garis lurus lebih banyak digunakan pada kajian persamaan garis singgung lingkaran dan persamaan garis singgung kurva. Sifat-sifat garis lurus akan dibahas secara mendalam dan dimanfaatkan dalam penyelesaian masalah matematika dan masalah otentik.

Catatan:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bab 5

BARISAN DAN DERET TAK HINGGA

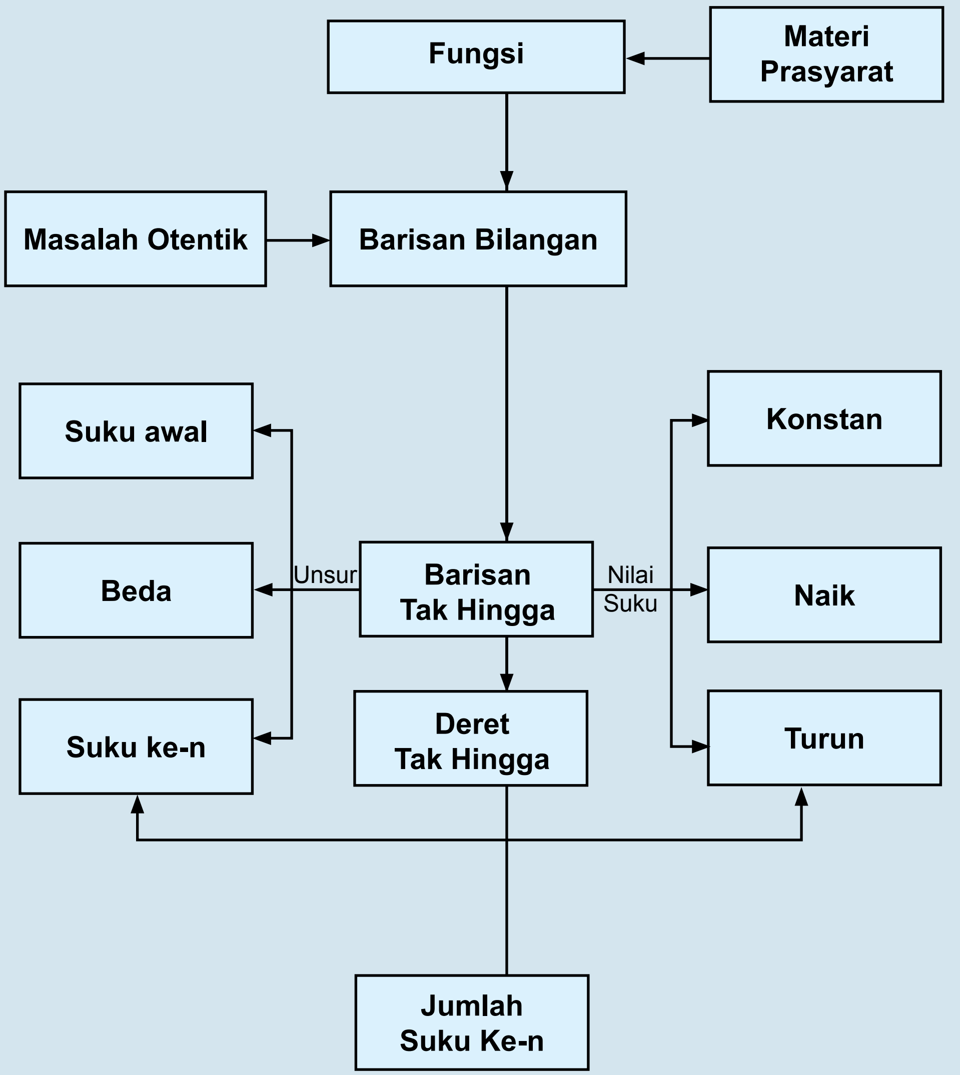
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berfikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Mendeskripsikan konsep barisan dan deret tak hingga sebagai fungsi dengan daerah asal himpunan bilangan asli. 3. Menerapkan konsep barisan dan deret tak hingga dalam penyelesaian masalah sederhana.	Melalui pembelajaran materi barisan dan deret aritmetika dan geometri atau barisan lainnya, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Menemukan konsep dan pola barisan dan deret melalui pemecahan masalah otentik. • Berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur. • Berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis, kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep dan pola barisan dan deret tak hingga dalam memecahkan masalah otentik

Istilah Penting

- *Pola Bilangan*
- *Beda*
- *Rasio*
- *Barisan Tak Hingga*
- *Barisan Konstan, Naik, dan Turun*
- *Deret Tak Hingga*
- *Jumlah suku tak hingga*

B. PETA KONSEP



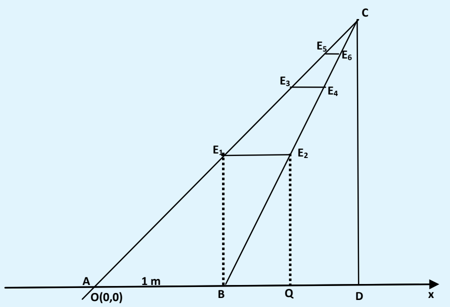
C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Barisan dan Deret Tak Hingga.

Amati dan kritisi masalah nyata kehidupan yang dapat dipecahkan secara arif dan kreatif melalui proses matematisasi. Dalam proses pembelajaran barisan dan deret tak hingga berbagai konsep dan aturan matematika terkait barisan akan ditemukan melalui pemecahan masalah, melihat pola susunan bilangan, menemukan berbagai strategi sebagai alternatif pemecahan masalah.

Masalah-5.1

Dua potong kawat besi disandarkan pada sebuah dinding rumah tempat bunga menjalar. Di antara kedua kawat dibuat potongan–potongan kawat E_1E_2, E_3E_4, E_5E_6, dan seterusnya seperti terlihat pada gambar berikut.



Gambar-5.2. Posisi Kawat Tersandar di Dinding Rumah

Kemiringan posisi kawat sebelah kiri adalah r dengan $0 < r < 1$, $r \in R$ dan kemiringan kawat sebelah kanan adalah 1. Jarak kedua kawat di tanah adalah 1 meter dan jarak $BE_1 = QE_2$ adalah r meter.

a. Tentukan panjang potongan kawat E_1E_2, E_3E_4, E_5E_6, dan seterusnya dalam r.

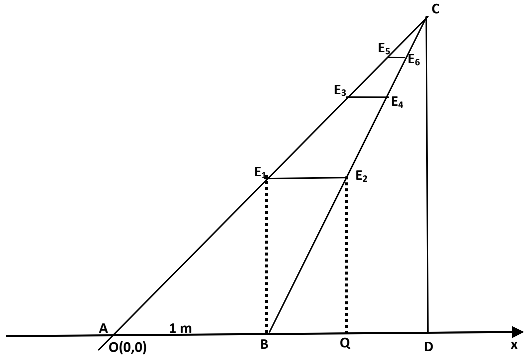
Arahkan siswa untuk membangun konsep barisan dan deret tak hingga melalui mengamati masalah nyata yang diajukan, memunculkan berbagai pertanyaan terhadap kondisi masalah yang disajikan dalam grafik, menemukan pola dari sebuah susunan bilangan yang diperoleh data pengamatan posisi tangga, lipatan kertas dan lenturan bola. Arahkan siswa mengingat kembali berbagai konsep dan aturan barisan dan deret aritmatika (geometri) yang sudah dipelajari siswa di kelas X. Barisan bilangan adalah suatu fungsi yang domainnya bilangan asli dan rangenya suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan real.

b. Temukan susunan bilangan dalam *r* yang menyatakan jarak dari titik *A* ke titik *B*, jarak titik *B* ke *Q* dan seterusnya sampai ke titik *D*!
c. Tentukan fungsi yang menyatakan susunan bilangan dalam *r*!
d. Tentukan jarak titik dari *A* ke *D*!

Minta siswa menggambarkan kawat besi yang bersandar di dinding dalam sumbu koordinat kartesius dan menentukan ukuran-ukuran jarak dari titik A ke B, dari B ke Q, dan seterusnya menggunakan nilai r yang diketahui dalam masalah. Minta siswa memanfaatkan aturan matematika dalam trigonometri (seperti Dalil Phytagoras) dan geometri terkait sudut dan panjang sisi.

Alternatif Penyelesaian

Mari kita gambarkan posisi kawat besi dalam sumbu koordinat.



Gambar-5.2. Posisi Kawat Tersandar di Dinding Rumah

Minta siswa mengamati dan menganalisis Gambar-5.2 di samping. Upayakan siswa menemukan panjang potongan kawat besi di antara ruas garis AC dan BC tempat bunga menjalar, misalnya E1E2 = BQ = r dengan menggunakan panjang BE1 = r dan gradien garis AC dan BC yang diketahui pada masalah.

Koordinat titik $A(0,0)$ dan $B(1,0)$ adalah dua titik yang berada pada sumbu *x*. Karena ruas garis *AC* (kawat sebelah kiri) memiliki gradien *r* dengan $0 < r < 1$ dan ruas garis *BC* (kawat sebelah kanan) memiliki gradien 1, maka kedua ruas garis bertemu pada satu titik, yaitu titik *C*.

Misalkan titik E_1 pada ruas garis *AC*. Karena ruas garis *AC* bergradien *r* dan panjang *AB* adalah 1 maka panjang BE_1 adalah *r*. Titik E_2 berada pada ruas garis *BC*, karena gradien *BC* adalah 1, maka panjang E_1E_2 adalah *r* dan panjang $E_1E_2 = BQ = r$.

- Karena gradien garis *AC* adalah *r* dan panjang $E_1E_2 = r$, maka panjang $E_2E_3 = r^2$.

- Karena gradien garis BC adalah 1, maka panjang E_3E_4 $= r^2$ dan $QR = r^2$.

Dengan cara yang sama, diperoleh panjang $E_5E_6 = r^3$ dan jika kita tambahkan potongan kawat di antara garis AC dan BC di atas E_5E_6 menuju titik C, maka diperoleh panjang potongan kawat berikutnya r^3, r^4, r^5, …. Mengapa?

a. Panjang E_1E_2, E_3E_4, E_5E_6, dan seterusnya dalam r adalah $r, r^2 r^3, r^4, r^5, \ldots$

b. Susunan bilangan dalam r yang menyatakan jarak titik A ke titik B, titik B ke Q, titik Q ke R dan seterusnya sampai ke titik D, yaitu: $1, r, r^{2,} r^3, \ldots$, dengan $0 < r < 1$.

c. Fungsi yang menyatakan susunan bilangan pada bagian (b) adalah $u(n) = r^{n-1}$, $n \in N$.

d. Panjang AD adalah hasil penjumlahan $1, r, r^2, r^3, \ldots$

- ➢ Organisasikan siswa belajar dalam kelompok untuk mendiskusikan, menentukan panjang AD dengan memanfaatkan susunan bilangan dalam r yang diperoleh dari analisis gambar dan minta siswa mempresentasikan hasil kerja terkait penentuan panjang AD sebagai jumlah suku-suku barisan tak hingga.

$$AD = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \text{ dengan } 0 < r < 1$$

Perhatikan Gambar-5.2 di atas, dengan menggunakan aturan dalam trigoniometri, diperoleh jarak $BD = CD = r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots$

Misalkan $s = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots$

Karena panjang ruas garis $BD = r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots = s - 1$, maka $CD = s - 1$

Guru menanyakan kepada siswa panjang potongan kawat di antara garis AC dan BC yaitu E_1E_2, E_3E_4, E_5E_6 dan seterusnya menuju titik C adalah r^3, r^4, r^5, …. Secara logika matematika, bahwa potongan kawat diantara garis AC dan BC di atas E_5E_6, selalu dapat ditambahkan terus menerus menuju titik C dan panjangnya dapat ditentukan dengan memanfaatkan gradien garis AC dan gradien garis BC, yaitu r dan 1. Misalnya menentukan panjang $E_4E_5 = r\ (E_3E_4) = r(r^2) = r^3$ dan panjang $E_5E_6 = 1\ (E_4E_5) = 1(r^3) = r^3$. Selanjutnya meminta siswa menjawab pertanyaan dari (a) sampai (d).

Perhatikan $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{CD}{BE_1}$ atau $\dfrac{s}{1} = \dfrac{s-1}{r}$.

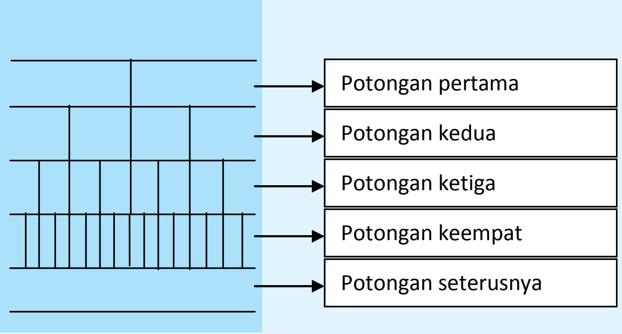
$$\frac{s}{1} = \frac{s-1}{r} \Leftrightarrow rs = s - 1$$
$$\Leftrightarrow (1 - r)s = 1$$
$$\Leftrightarrow s = \frac{1}{1-r}$$

Berdasarkan uraian di atas panjang $AD = s = \dfrac{1}{1-r}$, dengan $0 < r < 1$. Panjang segmen garis AD ini dapat diartikan jumlah takhingga suku-suku barisan $1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \ldots$

Fasilitasi siswa dalam kelompok belajar dengan selembar kertas, ajukan Masalah 5.2 untuk dikerjakan dan minta siswa bekerjasama dalam kelompok untuk menentukan banyak potongan kertas dan mencatat hasil percobaan pada tabel yang tersedia.

Masalah-5.2

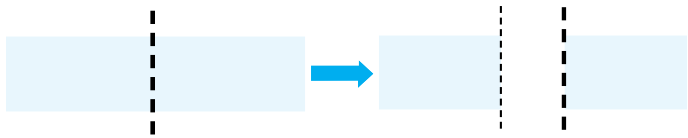
Siti menggunting kertas menjadi dua bagian yang sama besar. Potongan kertas berikutnya digunting lagi menjadi dua bagian yang sama besar, seperti gambar berikut.



Susunlah bilangan-bilangan yang menyatakan banyak potongan kertas, apabila potongan kertas berikutnya digunting dua bagian yang sama.

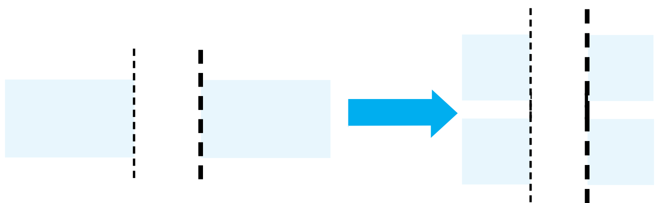
Alternatif Penyelesaian

Siti menggunting kertas tersebut menjadi dua bagian yang sama besar



1 kertas 2 potong kertas

Dua potongan kertas di atas, digunting menjadi dua bagian yang sama besar untuk setiap potongan kertas sehingga diperoleh potongan kertas berikut.



3 potong kertas 4 potong kertas

Misalnya n menyatakan guntingan ke-n

Untuk $n = 1$, diperoleh banyak potongan kertas adalah 2

Untuk $n = 2$, diperoleh banyak potongan kertas adalah 4

Untuk $n = 3$, diperoleh banyak potongan kertas adalah 8

Untuk $n = 4$, diperoleh banyak potongan kertas adalah 16

Jika guntingan kertas dilanjutkan maka akan diperoleh suatu susunan bilangan yang menyatakan banyak potongan kertas, yaitu: 2, 4, 8, 16, 32, … Susunan bilangan tersebut membentuk sebuah barisan tak hingga, dengan nilai suku-suku barisan dapat dinyatakan dengan sebuah fungsi $u(n) = 2^n$ dengan $n \in N$. Lengkapilah tabel berikut untuk melihat jumlah parsial dari susunan bilangan 2, 4, 8, 16, 32, ….

Meminta siswa menemukan susunan bilangan dan pola susunan bilangan dengan memanfaatkan data pada tabel di atas, yaitu banyak potongan kertas untuk sekian kali potongan yang dilakukan.

Tabel 5.2: Jumlah parsial suku-suku barisan $u(n) = 2^n$

Deret	Jumlah suku-suku	Jumlah Potongan Kertas
s_1	u_1	2
s_2	$u_1 + u_2$	6

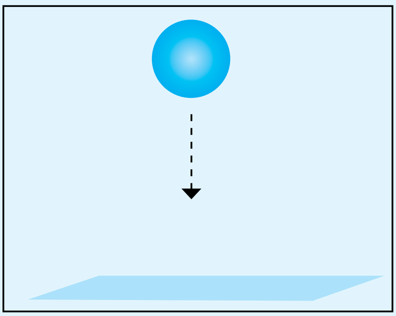
s_3	$u_1 + u_2 + u_3$	
s_4	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	
...	...	...
s_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \ ... + u_n$	
...	...	...
s_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \ ... + u_n$ + ...	
...	...	...

Amati data pada tabel yang kamu temukan. Dapatkah kamu menentukan suku dengan n = 20? Berapa jumlah 2, 4, 8, 16, 32, ... , jika $n \to \infty$?

Organisasikan siswa melakukan percobaan secara kelompok untuk menjatuhkan sebuah bola pimpong dari ketinggian tertentu dan mengamati lintasan bola, mencatat ketinggian bola saat lenturan pertama, kedua, ketiga, dan seterusnya. Meminta siswa membangun fungsi sebagai aturan susunan bilangan yang menyatakan lintasan yang dilalui bola akibat lenturan bola.

Masalah-5.3

Sebuah bola jatuh dari ketinggian 9 meter ke lantai yang disajikan pada gambar berikut



Gambar-5.3: Pantulan Bola

Bola memantul kembali secara terus menerus setinggi $\frac{2}{3}$ dari ketinggian sebelumnya.

a. Tentukanlah susunan bilangan yang menyatakan ketinggian pantulan bola tersebut!

b. Tentukan panjang lintasan yang dilalui bola setelah memantul ke lantai!

Alternatif Penyelesaian

a. Ditemukan susunan bilangan dari hasil pantulan bola.

Dari masalah diketahui bahwa ketinggian pantulan bola adalah $\frac{2}{3}$ dari ketinggian pantulan sebelumnya. Dengan demikian ketinggian yang dicapai bola untuk tiap-tiap pantulan ditentukan sebagai berikut.

Ketinggian bola awal = 9 m

Pantulan pertama $= \frac{2}{3} \times 9 = 6$

Pantulan kedua $= \frac{2}{3} \times 6 = 4$

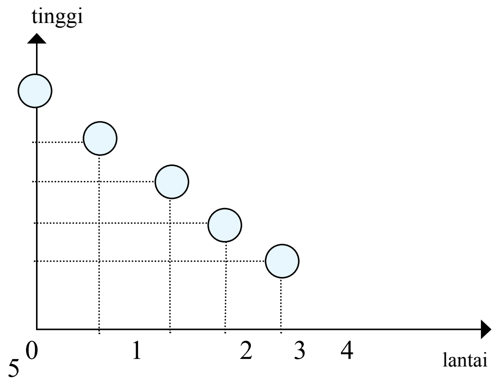
Pantulan ketiga $= \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$

dan seterusnya …

Tabel 5.1 Tinggi Pantulan Bola

Pantulan ke	1	2	3	4	...
Tinggi pantulan (*m*)	6	4	8/3	16/9	...
Suku ke ...	u_1	u_2	u_3	u_4	...

Pantulan bola diperlihatkan seperti gambar di bawah ini



Gambar-5.4: Posisi Pantulan Bola

Meminta siswa menginterpretasikan lintasan bola dalam gambar dan mengajukan berbagai pertanyaan untuk menguji pemahaman siswa. Coba kamu teruskan mengisi tabel pada pantulan berikutnya. Apakah mungkin terjadi ketinggian pantulan bola sama dengan nol?

> Cermati gambar di samping!
> - Apakah bola suatu saat akan berhenti?
> - Bagaimana tinggi pantulan bola untuk *n* menuju tak hingga $(n \to \infty)$

Guru memberikan arahan terkait pertanyaan apakah bola suatu saat berhenti? Dalam alam pemikiran logika, bola tidak akan berhenti memantul, sebab setiap bola memantul memiliki ketinggian, yaitu $\frac{2}{3}$ dari ketinggian pantulan sebelumnya. Jika pantulan bola diamati terus-menerus, ditemukan ketinggian untuk pantulan ke $n \to \infty$, ketinggian pantulan bola menuju nol tetapi tidak pernah ketinggian pantulan adalah nol. Secara penglihatan alamiah kita bola pada akhirnya berhenti di atas lantai.

Berdasarkan perhitungan dan gambar di atas diperoleh susunan bilangan menyatakan ketinggian pantulan bola, yaitu: 6, 4, $\frac{8}{3}$, $\frac{16}{9}$, $\frac{32}{18}$, ...

$$\boxed{9\text{m}} \xrightarrow[x\frac{2}{3}]{} \boxed{6\text{m}} \xrightarrow[x\frac{2}{3}]{} \boxed{4\text{m}} \xrightarrow[x\frac{2}{3}]{} \boxed{\tfrac{8}{3}m} \xrightarrow[x\frac{2}{3}]{} \boxed{\dots}$$

Rasio, dinotasikan r merupakan nilai perbandingan dua suku berdekatan. Nilai r dinyatakan:

$r = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{u_4}{u_3} = \ldots = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$. Jadi

$$u_1 = 9.\frac{2}{3} = 6 \quad \rightarrow \quad u_1 = a$$

$$u_2 = u_1.\frac{2}{3} = 6.\frac{2}{3} = 4 \quad \rightarrow \quad u_2 = u_1.r = ar$$

$$u_3 = u_2.\frac{2}{3} = 4.\frac{2}{3} = \frac{8}{3} \quad \rightarrow \quad u_3 = u_2.r = ar.r = ar^2$$

$$u_4 = u_3.\frac{2}{3} = \frac{8}{3}.\frac{2}{3} = \frac{16}{9} \quad \rightarrow \quad u_4 = u_3.r = ar^2.r = ar^3$$

$$u_5 = u_4.\frac{2}{3} = \frac{16}{9}.\frac{2}{3} = \frac{32}{27} \quad \rightarrow \quad u_5 = u_4.r = ar^3.r = ar^4$$

Susunan bilangan 6, 4, $\frac{8}{3}$, $\frac{16}{9}$, $\frac{32}{27}$, $\frac{64}{81}$, $\frac{128}{243}$

,… dapat dinyatakan dalam sebuah fungsi $u(n) = 9(\frac{2}{3})^n$, dengan $n \in N$.

Susunan bilangan di atas dapat diekspresikan sebagai barisan tak hingga.

$$\underset{u_1}{\boxed{a}} \xrightarrow{xr} \underset{u_2}{\boxed{ar}} \xrightarrow{xr} \underset{u_3}{\boxed{ar^2}} \xrightarrow{xr} \underset{u_{...}}{\boxed{.....}} \xrightarrow{xr} \underset{u_n}{\boxed{ar^{n-1}}} \longrightarrow \boxed{.....}$$

b. Ditentukan panjang lintasan yang dilalui bola untuk 10 kali pantulan.

Misalkan panjang lintasan bola sampai pantulan ke-10 adalah S.

$$s = 2\left(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{10}\right)$$

$$\Leftrightarrow s = 2\left(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{10}\right) - u_1$$

$$\Leftrightarrow s = 2s_{10}$$

Tabel 5.2: Jumlah Parsial Lintasan Bola

Deret	Jumlah suku-suku	Nilai
s_1	u_1	6
s_2	$u_1 + u_2$	$6 + \frac{12}{3} = 6(\frac{5}{3}) = 6(\frac{9-4}{3})$
s_3	$u_1 + u_2 + u_3$	$6 + \frac{12}{3} + \frac{24}{9} = 6(\frac{19}{9}) = 6(\frac{27-8}{9})$
s_4	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	$6 + \frac{12}{3} + \frac{24}{9} + \frac{48}{27} = 6(\frac{65}{27}) = 6(\frac{81-16}{125})$
…	…	…
s_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$	$s_n = 6(\frac{3^n - 2^n}{3^{n-1}})$

Berdasarkan tabel di atas deret bilangan tersebut adalah sebuah barisan jumlah, s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ... yaitu

$$6\left(\frac{3^1-2^1}{3^0}\right),\ 6\left(\frac{3^2-2^2}{3^1}\right),\ 6\left(\frac{3^3-2^3}{3^2}\right),\ \ldots,\ 6\left(\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}}\right)$$

Jadi, panjang lintasan bola sampai pantulan ke-10 adalah $s = 2s_{10}$ atau $s = 6\left(\frac{3^{10}-2^{10}}{3^9}\right)$

Perhatikan kembali susunan bilangan yang diperoleh dari Masalah-5.1, Masalah-5.2, dan Masalah-5.3, yaitu Mengarahkan siswa menuliskan pengertian barisan dan deret tak hingga dengan mencermati susunan bilangan yang diperoleh dari 3 (tiga) buah masalah yang telah dipecahkan.

Perhatikan kembali susunan bilangan yang diperoleh dari Masalah-5.1, Masalah-5.2, dan Masalah-5.3, yaitu:

- $1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \ldots$ yang dinyatakan dalam fungsi $u(n) = r^{n-1}$ dengan $n \in N$
- 2, 4, 8, 16, 32, … yang dinyatakan dalam fungsi $u(n) = 2^{n-1}$ dengan $n \in N$.
- $6, 4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \frac{32}{27}, \frac{64}{81}, \frac{128}{243}, \ldots$ yang dinyatakan dalam fungsi $u(n) = 9(\frac{2}{3})n$ dengan $n \in N$.

Berdasarkan beberapa model barisan bilangan di atas, dapat dipastikan bahwa barisan adalah sebuah fungsi dengan domainnya himpunan bilangan asli (N) dan rangenya adalah suatu himpunan (R_f) bagian dari S, ditulis $f: N \rightarrow S, R_f \subseteq S$.

Definisi 5.1

Barisan tak hingga objek di himpunan *S* adalah suatu fungsi *u* dengan daerah asal (*domain*) himpunan bilangan asli dan daerah hasilnya (*range*) suatu himpunan $R_u \subseteq S$. Ditulis $(u_n), n \subseteq N$.

Definisi 5.2

Misalkan (u_n) sebuah barisan tak hingga bilangan real dan $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ adalah jumlah parsial suku-suku barisan tak berhingga.

- Deret tak hingga adalah barisan jumlah parsial n suku barisan tak hingga. Ditulis (s_n), $n \in N$ atau s_1, $s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$
- Jumlah deret tak hingga adalah jumlah suku-suku barisan tak hingga. Ditulis $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$

Contoh 5.1

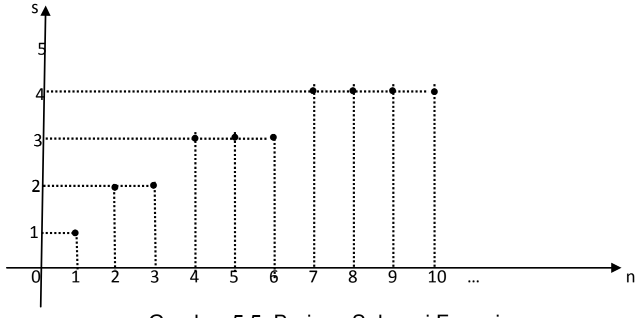
Perhatikan barisan angka berikut:

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ...

Amatilah barisan angka tersebut terlebih dahulu! Tentukanlah angka pada urutan ke $4^4 \times 5^3$!

Alternatif Penyelesaian

Pertama, kita perlihatkan urutan setiap angka pada barisan, pada grafik berikut:



Gambar-5.5: Barisan Sebagai Fungsi

Jika kamu amati dengan teliti, kelompok angka 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 pada urutan ke-1 sampai 10 berulang, bukan? Perulangan kelompok angka terjadi pada setiap kelipatan 10 angka pertama. Jadi, angka pada urutan ke-1 sama dengan angka pada urutan ke-11, urutan ke-21, urutan ke-31 dan seterusnya.

Kedua, angka pada urutan ke- $4^4 \times 5^3$ adalah angka pada urutan $256 \times 125 = 32.000$ atau $32000 = 3200 \times 10$ sehingga perulangan kelompok angka tersebut mengalami perulangan sebanyak 3200 kali. Dengan demikian, angka pada urutan ke-32000 adalah angka pada urutan ke-10 yaitu 4.

Mengajukan beberapa contoh untuk melatih siswa menerapkan konsep dan sifat-sifat barisan tak hingga. Meminta siswa mengamati pola dari susunan angka dan bilangan dengan memasangkan satu-satu suku-suku barisan dengan bilangan asli untuk membentuk fungsi dan dapat menentukan suku ke-n dari susunan angka dan bilangan.

Contoh 5.2

Sebuah susunan angka dituliskan sebagai berikut:

2468101214161820222426283032343638 40...dengan memandang setiap angka adalah suku barisan bilangan sehingga suku ke-10 = 4, suku ke-11 = 1, suku ke-12 = 6 dan seterusnya. Dapatkah kamu temukan angka yang menempati suku ke-1457?

Alternatif Penyelesaian

Mari kita amati kembali barisan tersebut, dengan memandang setiap angka adalah suku-suku barisan, maka susunan barisan menjadi:

2	4	6	8	1	0	1	2	1	4	1	6	1	8	2	0	2	2	...	?
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}	u_{18}	...	u_{2013}

u_n menyatakan suku ke-n pada barisan dengan $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Kita akan menentukan angka pada suku ke-1457, dengan menghitung banyak suku pada bilangan satuan, puluhan, dan ratusan sebagai berikut:

Langkah 1. Mencari banyak suku pada barisan bilangan satuan (2 sampai 8): 2, 4, 6, 8
Banyak suku pada barisan bilangan satuan adalah $1 \times 4 = 4$ suku.

Langkah 2. Mencari banyak suku pada barisan bilangan puluhan (10 sampai 98)
10, 12, 14, 16, 18 terdapat 2×5 suku = 10 suku
20, 22, 24, 26, 28 terdapat 2×5 suku = 10 suku
...
90, 92, 94, 96, 98 terdapat 2×5 suku = 10 suku

Banyak suku pada barisan bilangan puluhan adalah $9 \times 10 = 90$ suku. Jadi, banyak suku pada barisan 2 sampai 98 adalah $4 + 90 = 94$ suku.

Langkah 3. Menentukan banyak suku pada barisan bilangan ratusan (100 sampai 998)
100, 102, 104, 106, 108, ..., 198 terdapat 3×50 suku = 150 suku
200, 202, 204, 206, 208, ..., 298 terdapat 3×50 suku = 150 suku
300, 302, 304, 306, 308, ..., 398 terdapat 3×50 suku = 150 suku
...
900, 902, 904, 906, 908, ..., 998 terdapat 3×50 suku = 150 suku

Banyak suku untuk barisan bilangan ratusan dari mulai 100 sampai 998 adalah $9 \times 150 = 1350$ suku

Jadi terdapat sebanyak $4 + 90 + 1350 = 1444$ suku pada barisan bilangan 2 sampai dengan 998 sehingga suku ke-1444 adalah 8. Suku berikutnya (suku ke-1457) adalah barisan bilangan dengan bilangan ribuan sebagai berikut.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} 9 & 9 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\ u_{1442} & u_{1443} & u_{1444} & u_{1445} & u_{1446} & u_{1447} & u_{1448} & u_{1449} & u_{1450} & u_{1451} & u_{1452} & u_{1453} & u_{1454} & u_{1455} & u_{1456} & u_{1457} & \end{array}$$

Bilangan pada suku ke-1457 adalah 1.

Membantu siswa menentukan banyak suku pada barisan bilangan satuan, puluhan, ratusan, dan seterusnya.

Meminta siswa berdiskusi dalam kelompok untuk membuktikan berbagai sifat barisan dan deret tak hingga serta menggunakan sifat tersebut dalam memecahkan masalah yang diajukan.

Guru mengajukan beberapa pertanyaan berikut untuk didiskusikan siswa dalam kelompok belajar.

- *Coba pikirkan bagaimana jumlah suku-suku barisan geometri jika $r \in R$, $r > 1$ dan $r < -1$.*
- *Bagaimana jika $r = 1$ atau $r = -1$, coba beri contoh barisannya.*

Guru memberikan arahan terhadap kedua masalah tersebut. jika $r \in R$, $r > 1$, maka suku-suku barisan $un = ar^{n-1}$, $n \in N$, akan semakin besar untuk n menuju ∞. Jadi jumlah suku barisannya tidak dapat ditentukan. Demikian juga jika $r < -1$, maka suku-suku barisan $un = ar^{n-1}$, $n \in N$, bernilai positif dan negatif. Saat r berpangkat genap maka suku barisan benilai positif, dan saat r berpangkat

Sifat 5.1

Jika (u_n) adalah suatu barisan geometri dengan suku pertama adalah $u_1 = a$ dan rasio $= r$ dengan $r \in R$ dan $|r| < 1$ maka jumlah tak hingga suku-suku barisan tersebut adalah $s = \dfrac{a}{1-r}$.

Bukti:

Misalkan $un = ar^{n-1}$ dengan $-1 < r < 1$, $n \in N$

Ingat kembali deret geometri yang telah kamu pelajari sebelumnya, telah diperoleh bahwa

$s_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$..........................Pers-1

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan 1 dengan r, didapatkan Persamaan 2 berikut.

$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$ Pers-2

Sekarang, dari selisih persamaan 1) dengan 2), diperoleh

$s_n - rs^n = (a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n - 1) - (ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n)$

$s_n(1 - r) = a - ar^n$

$$s_n = \frac{a - ar^n}{1-r}$$

Rumus jumlah n suku pertama deret geometri adalah

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{dengan } |r| < 1.$$

Kita ingin menentukan jumlah tak berhingga suku-suku barisan geometri, ini, yaitu, Sn bila $n \to \infty$.

Karena $r \in R$ dan $-1 < r < 1$ dan $n \to \infty$, maka

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-r} - \frac{r^n}{1-r}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{1}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^n.$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{1}{1-r}(0) = \frac{a}{1-r}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \text{(terbukti)}$$

Contoh 5.3

Jumlah suatu deret geometri tak hingga adalah $5+5\sqrt{5}$ dan rasionya adalah $\frac{1}{5}\sqrt{5}$.

Tentukan suku pertama deret tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Karena $r = \frac{1}{5}\sqrt{5} < 1$, maka jumlah tak hingga suku barisan adalah $\frac{a}{1-r}$. sehingga $5+5\sqrt{5} = \frac{a}{1-\frac{1}{5}\sqrt{5}}$.

$\Leftrightarrow$ $a = (5 + 5\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})$

$\Leftrightarrow$ $a = 5\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 5$

$\Leftrightarrow$ $a = 4$

Dengan demikian suku pertama barisan tersebut adalah $a = 4\sqrt{5}$

Contoh 5.4

Diberikan barisan bilangan $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \ldots, \frac{2^n}{3^{n-1}}, \ldots$ dengan $n \in N$

- Tentukan suku ke-9!
- Tentukan jumlah tak hingga barisan tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Diketahui $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \ldots, \frac{2^n}{3^{n-1}}, \ldots$ dengan $n \in N$

$(u_n) = \frac{2^n}{3^{n-1}}$, $n \in N$

Suku ke-9 adalah $u_9 = \frac{2^9}{3^{9-1}} = \frac{512}{6561}$

ganjil maka suku barisannya bernilai negatif. Dengan demikian jumlah suku barisannya tidak dapat ditentukan.

Selanjutnya bantu siswa memahami konsep dan sifat-sifat deret geometri tak hingga melalui beberapa contoh. Menguji pemahaman siswa dengan mengajukan pertanyaan, misalnya mengapa untuk menentukan jumlah tak hingga suku barisan digunakan rumus $\frac{a}{1-r}$.

$$u_n = \frac{2^n}{3^{n-1}} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, n \in N$$

Berati $u_1 = a = 2$ dan $r = \frac{2}{3} < 1$

Jumlah tak hingga suku-suku barisan 2,

$\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \ldots, \frac{2^n}{3^{n-1}}, \ldots$ dengan $n \in N$ adalah

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$$

(karena $r = \frac{2}{3} < 1$)

Jadi $s = 6$

Contoh 5.5

Jumlah deret geometri tak hingga adalah 6, sedangkan jumlah suku-suku genap adalah 2. Tentukan suku pertama deret itu!

Alternatif Penyelesaian

Diketahui jumlah deret geometri tak hingga adalah 6, maka $6 = \frac{a}{1-r}$ dan diperoleh nilai $a = 6(1 - r)$.

Deret geometri tak hingga suku-suku genap adalah $ar + ar^3 + ar^5 + ar^7 + \ldots$, maka rasionya adalah $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{ar^{n+2}}{ar^n} = r^2$.

Karena $|r| < 1$ atau $-1 < r < 1$, maka $|r^2| < 1$ atau $-1 < r^2 < 1$

dan jumlah tak hingga suku-suku genapnya adalah

$$2 = \frac{ar}{1-r^2} \Leftrightarrow ar = 2(1-r^2)$$

$$\Leftrightarrow 6(1-r)r = 2(1-r^2)$$

$$\Leftrightarrow 6(1-r)r = 2(1-r)(1+r)$$

$$\Leftrightarrow 6r = 2(1+r)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

$r = \frac{1}{2}$ disubtitusikan ke persamaan $a = 6(1- r)$. Sehingga diperoleh $a = 3$. Jadi suku pertama deret geometri tak hingga tersebut adalah $a = 3$.

2. Barisan Konstan, Naik, dan Turun

Amatilah suku-suku beberapa barisan berikut

a. $u_n = \frac{1}{2}$, $\forall n \in N$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, , \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \ldots$

b. $u_n = -1$, $\forall n \in N$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, -1, -1, -1, -1, -1, -1, …

c. $un = k$, $\forall n \in N$ dan untuk suatu $k \in R$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, $k, k, k, k, \ldots$

Berdasarkan data suku-suku setiap barisan yang diberikan di atas, dapat dikatakan bahwa suku barisan pada poin (a), (b), dan (c), nilainya tetap atau sama untuk setiap suku sampai $n \to \infty$. Jika suatu barisan dengan suku-sukunya sama atau tetap untuk setiap n, $n \to \infty$, barisan itu disebut barisan konstan.

Arahkan siswa untuk membangun konsep barisan konstan, naik dan turun melalui mengamati berbagai contoh yang diajukan, memunculkan berbagai pertanyaan terhadap kondisi suku-suku barisan, menemukan pola dari sebuah susunan bilangan yang diberikan.

Definisi 5.3

Misalkan (u_n) sebuah barisan tak hingga bilangan real. Barisan (u_n) dikatakan barisan konstan jika dan hanya jika suku sebelumnya selalu sama dengan suku berikutnya.
Ditulis (u_n) adalah barisan konstan $\Leftrightarrow u_n = u_{n+1}$, $\forall n \in N$.

Amatilah suku-suku dari beberapa barisan berikut

a. $u_n = r_{n-1}$, $\forall n \in N$ dengan $0 < r < 1$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, $1, r, r^2, r^3, \ldots$

b. $u_n =$, $\forall n \in N$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

c. $u_n = (\frac{1}{2})^n$, $\forall n \in N$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

Berdasarkan data suku-suku setiap barisan yang diberikan di atas, dapat dikatakan bahwa nilai suku barisan pada poin a, b, dan c, semakin besar urutan sukunya makin kecil suku barisannya sampai $n \to \infty$. Jika suatu barisan memiliki suku-sukunya makin kecil untuk suku sampai $n \to \infty$, barisan itu disebut barisan turun.

Definisi 5.4

Misalkan (u_n) sebuah barisan tak hingga bilangan real. Barisan (u_n) dikatakan barisan turun jika dan hanya jika suku berikutnya kurang dari suku sebelumnya.
Ditulis (u_n) disebut barisan turun $\Leftrightarrow u_n = u_{n+1}$, $\forall n \in N$.

Amatilah suku-suku dari beberapa barisan berikut.

a. $u_n = (3)^n$, $\forall n \in N$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, 3, 9, 27, 81, …

b. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \in N$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots$

c. $u_n = n + 1$, $\forall n \in N$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, …

Berdasarkan data suku-suku setiap barisan yang diberikan di atas, dapat dikatakan bahwa nilai suku barisan pada poin a, b, dan c, semakin besar urutan sukunya makin besar nilai suku barisannya sampai $n \to \infty$. Jika suatu barisan memiliki nilai suku-sukunya makin besar untuk suku sampai $n \to \infty$, barisan itu disebut barisan naik.

Definisi 5.5

Misalkan (u_n) sebuah barisan tak hingga bilangan real. Barisan (u_n) dikatakan barisan naik jika dan hanya jika suku berikutnya lebih dari suku sebelumnya.

Ditulis (u_n) adalah barisan konstan $\Leftrightarrow u_n = u_{n+1}$, $\forall n \in N$.

Perhatikan beberapa barisan berikut

a. Barisan: 1, 1, 1, 1, 1, … dengan $u_n = 1$, $\forall n \in N$. Barisan ini disebut barisan konstan dengan nilainya tidak lebih dari 1 (satu).

b. Barisan -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, …, dengan $u_n = (-1)^n$, $\forall n \in N$. Nilai mutlak suku-suku barisan tersebut tidak lebih dari 1 (satu).

c. Barisan: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots$ dengan $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in N$. Barisan ini disebut barisan turun dan suku-sukunya tidak lebih dari 1 (satu).

Arahkan siswa memahami barisan terbatas. Meminta siswa menguji kebenaran bahwa nilai mutlak dari suku-suku kurang dari atau sama dengan 1.

d. Barisan: …, -1, $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}$, …, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$,…

dengan $u_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in N$

Nilai mutlak suku-suku barisan ini tidak lebih dari 1 (satu) sampai *n* menuju tak hingga. Barisan pada (a) sampai (d) merupakan barisan yang terbatas.

Meminta siswa mencermati beberapa contoh berikut, untuk membangun pemahaman siswa terhadap konsep barisan naik (turun) dan terbatas. Selanjutnya meminta siswa bekerjasama dalam kelompok belajar untuk menentukan beberapa barisan dari suku-suku barisan yang diberikan.

Definisi 5.6

Misalkan (u_n) sebuah barisan tak hingga bilangan real. Barisan (u_n) dikatakan barisan terbatas jika dan hanya ada bilangan real *M* > 0 yang membawahi selur uh nilai mutlak suku barisan tersebut.

Ditulis (u_n) dikatakan barisan terbatas $\Leftrightarrow (\exists M \in R) M > 0$ sehingga u_n = $|u_n|$" M , $\forall n \in N$.

Barisan pada *a* sampai *d* merupakan barisan yang terbatas. Berdasarkan Definisi 5.6 di atas dapat diturunkan beberapa sifat berikut

Sifat 5.2

Jika (u_n) adalah suatu barisan geometri dengan suku pertama adalah u_1 = *a*, *a* ≠ 0 dan rasio = *r* dengan $r \in R$ dan *r* < –1 atau maka barisan tersebut tidak terbatas.

Contoh 5.6

Diberikan barisan $u_n = 2^n$, $n \in N$. Selidiki apakah barisan tersebut terbatas.

Alternatif Penyelesaian

Suku-suku barisan $u_n = (n)$, $n \in N$ adalah 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, … Amatilah suku-suku barisan tersebut! Semakin besar urutan suku barisan tersebut, semakin besar sukunya dan naik menuju tak hingga.

Rasio barisan adalah $r = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$

Barisan $u_n = (2^n)$, $n \in N$ adalah barisan tak terbatas sebab berapapun kita pilih $M \in R$, $M > 0$, maka ada suku barisan un yang lebih dari M. Dengan demikian ada $n \in N$, sehingga $u_n > M$. Mengapa? (Petunjuk bagi guru: Guru mengarahkan siswa dengan sebuah permainan, guru memilih M dan siswa menentukan $n \in N$, sehingga $|2^n| > M$ dan mengisinya tabel berikut.

Pilih M	Pilih $n \in N$	$\|2^n\| > M$
5	3	$2^3 > 5$
...	...	...
...	...	...

Petunjuk bagi guru, terkait beberapa pertanyaan yang diajukan.

1) Untuk $M = 1$ membawahi semua suku barisan $u_n = (-1)^n$, $n \in N$, sebab menurut Definisi-5.6 tentang barisan terbatas, (u_n) dikatakan barisan terbatas $\leftrightarrow$ $(\exists M \in R)_{m>0}$ sehingga $|U_n| \leq M$, $\forall n \in N$. Ternyata $|-1^n|$, $\forall n \in N$.

2) Kita tidak dapat membentuk barisan baru yang lain dari un = $(-1)^n$, $n \in N$ selain kelompok barisan pada (a) dan (b) di atas. Jadi hanya ada dua kelompok barisan yang dapat dibentuk dari suku-suku barisan $u_n = (-1)^n$, $n\, |U_n|\, N$.

Contoh 5.7

Diberikan barisan $u_n = (-1)^n$, $n \in N$. Bentuklah beberapa barisan tak hingga yang baru dari suku-suku barisan tersebut dan tentukan rumus fungsi dari barisan yang telah dibentuk.

Alternatif Penyelesaian

Suku-suku barisan $u_n = (-1)^n$, $n \in N$ adalah -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, …

Kita dapat membentuk barisan tak hingga dari suku-suku barisan tersebut, dengan cara mengambil suku-suku ganjil dan suku-suku genap untuk membentuk dua kelompok barisan yang baru, yaitu:

3) Pada Contoh-5.6, diberikan barisan $u_n = 2^n$, $n \in N$. Barisannya adalah 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 .... Kita dapat membentuk minimal 3 kelompok barisan yang baru dari suku-suku barisan tersebut. Misalnya,

a) Barisan 4, 16, 64, ... dengan rumus fungsinya adalah $u_n = 2^{2n}$, $n \in N$.

b) Barisan 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... dengan rumus fungsinya adalah $un = 2^{n+1}$, $n \in N$.

Barisan 8, 16, 32, 64, 128, ... dengan rumus fungsinya adalah $u_n = 2^{n+2}$, $n \in N$.

Ajukan berbagai soal pada Uji Kompetensi 5.1 untuk dijadikan tugas, agar siswa memiliki kemandirian belajar dan mengetahui sejauhmana daya serap siswa terhadap materi yang sudah dipelajari. Gunakan rubrik penilaian dan petunjuk pelaksanaan remedial yang telah tersedia pada bagian akhir buku guru ini.

a. Barisan -1, -1, -1, -1, -1, -1, … dengan rumus fungsinya $u(n) = -1, \ \forall\, n \in N$.

b. Barisan 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, … dengan rumus fungsinya $u(n) = 1, \forall\, n \in N$.

Kedua barisan yang baru dibentuk adalah barisan konstan, sebab sukunya sama untuk setiap $n \in N$. Selanjutnya kedua barisan tersebut adalah barisan terbatas, sebab ada bilangan real $M = 2$ yang membawahi semua nilai suku-suku barisan tersebut atau $\left|-1^n\right| < 2, \forall n \in N$. Apakah nilai $M = 1$ membawahi semua nilai suku barisan $u_n = (-1)^n$, $n \in N$? Dapatkah kamu membentuk barisan yang lain dari suku-suku barisan $u_n = (-1)^n$, $n \in N$ selain dari barisan bagian (a) dan (b)? Buatlah minimal 3 (tiga) barisan tak hingga yang baru dari suku-suku barisan pada Contoh 5.6 di atas dan tentukan rumus fungsi barisan tersebut.

Uji Kompetensi 5.1

1. Dari setiap barisan berikut, tentukan selisih suku ke-25 dan suku ke-23

   a. $u_n = \ (-1)^n + \frac{1}{n} n \in N$

   b. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}, n \in N$

   c. $u_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n, n \in N$

   d. $u_n = \left(\frac{-n}{n+1}\right), n \in N$

2. Dari setiap barisan berikut, tentukan selisih suku ke-25 dan suku ke-23.

 a. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$

 b. $u_n = (-1)^n, n \in N$

 c. $10^{-5},\ 2^3,\ 25^3,\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$

 d. $u_n = \frac{n!}{2^n}, n \in N$

3. Tunjukkanlah bahwa barisan di bawah ini adalah barisan naik atau turun atau konstan.

 a. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right), n \in N$

 b. $u_n = (1)^n, n \in N$

 c. $u_n = 2^n, n \in N$

 d. $u_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n, n \in N$

4. Tiga bilangan membentuk barisan aritmatika. Jika suku ketiga ditambah 2, maka terbentuk barisan geometri dengan rasi (r) = 2. Tentukan suku-suku barisan tersebut!

5. Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jumlah tiga bilangan itu 292 dan hasil kali bilangan itu 32.768. Tentukan barisan geometri tersebut!

6. Pola PQQRRRSSSSPQQRRRSSSSPQQRRRSSSS... berulang sampai tak hingga. Huruf apakah yang menempati urutan $2^6\ 3^4$?

7. Diketahui barisan yang dibentuk oleh semua bilangan ganjil 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 … Angka berapakah yang terletak pada bilangan ke 2015 ? (suku ke-12 adalah angka 1 dan bilangan ke-15 adalah angka 9)

8. Tentukan jumlah setiap deret berikut!

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

c. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$

d. $\sum_{n=0}^{\infty}3\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

8. Tentukanlah jumlah semua bilangan asli di antara 1 sampai 200 yang habis dibagi 5!

10. Sebuah bola tenis dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 1 meter. Setiap kali setelah bola itu memantul, ia mencapai ketingggian $\frac{2}{3}$ dari tinggi sebelum pemantulan. Tentukan panjang lintasan bola!

11. Beni berhasil lulus ujian saringan masuk PT (Perguruan Tinggi). Sebagai mahasiswa, mulai bulan 1 Agustus 2013, ia menerima uang saku sebesar Rp15.000.000,00 untuk satu triwulan. Uang saku ini diberikan setiap permulaan triwulan. Untuk setiap triwulan berikutnya uang saku yang diterimanya dinaikkan sebesar Rp.2.500.000,00. Berapa besar uang saku yang akan diterima Beni pada awal tahun 2018?

12. Banyaknya penduduk kota Medan pada tahun 2012, sebanyak 16 juta orang. Setiap 15 tahun penduduk kota Medan bertambah menjadi dua kali lipat dari jumlah semula. Berapakah banyaknya penduduk kota Medan pada tahun 1945?

13. Seutas tali dibagi menjadi 5 bagian dengan panjang membentuk suatu barisan geometri. Jika tali yang paling pendek adalah 16 cm dan tali yang paling panjang 81 cm, maka panjang tali semula adalah ….

14. Sebuah bola pimpong dijatuhkan dari ketinggian 25 m dan memantul kembali dengan ketinggian 4/5 kali tinggi sebelumnya. Pemantulan ini berlangsung terus menerus hingga bola berhenti. Jumlah seluruh lintasan bola adalah….

15. Jumlah semua suku deret geometri tak hingga adalah 2, sedangkan jumlah suku-suku yang bernomor ganjil (kecuali suku pertama) dan genap adalah 1. Tentukan deret tersebut!

16. Pertumbuhan penduduk biasanya dinyatakan dalam persen. Misalnya, pertumbuhan penduduk adalah 1,5% per tahun artinya jumlah penduduk bertambah sebesar 1,5% dari jumlah penduduk tahun sebelumnya. Pertambahan penduduk menjadi dua kali setiap 30 tahun. Jumlah penduduk desa pada awalnya 100 orang, berapakah jumlah penduduknya setelah 100 tahun apabila pertumbuhannya 2%?

17. Jumlah deret geometri tak hingga adalah $7+7\sqrt{7}$ dan rasionya adalah $\frac{1}{49}\sqrt{7}$. Tentukan suku pertama deret tersebut!

18. Jumlah suku-suku ganjil dari suatu deret tak hingga adalah 18. Jumlah tak hingga suku-suku deret tersebut 24. Tentukan suku pertama dan rasio deret tersebut!

19. Jumlah deret geometri tak hingga $\frac{1}{2}p-\frac{2}{5}p^2+\frac{8}{25}p^3-\ldots$ adalah $\frac{1}{3}$. Tentukan nilai p!

Projek

Himpunlah minimal tiga buah masalah penerapan barisan dan deret tak hingga dalam bidang fisika, teknologi informasi, dan masalah nyata disekitarmu. Ujilah berbagai konsep dan aturan barisan dan deret tak hingga di dalam pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

Ajukan tugas projek di sampinng untuk dikerjakan siswa secara kelompok. Gunakan rubrik penilaian projek yang telah tersedia pada bagian akhir buku ini.

Arahkan siswa membuat rangkuman dari apa yang sudah dipelajari. Beri kesempatan bagi siswa menanyakan hal-hal yang belum dipahami dan uji pemahaman siswa terhadap hasil rangkuman yang mereka konstruk sendiri.

D. PENUTUP

Kita telah menemukan konsep barisan dan deret tak hingga dari pemecahan masalah nyata beserta sifat-sifatnya. Beberapa hal penting sebagai simpulan dari hasil pembahasan materi barisan dan deret tak hingga disajikan sebagai berikut :

1. Barisan tak hingga objek di himpunan S adalah suatu fungsi u dengan daerah asal (*domain*) himpunan bilangan asli dan daerah hasilnya (*range*) suatu himpunan $R_u \subseteq S$. Ditulis (u_n), $n \in N$.
2. Misalkan (u_n) sebuah barisan tak hingga bilangan real dan $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ adalah jumlah parsial suku-suku barisan tak berhingga.
   - Deret tak hingga adalah barisan jumlah parsial n suku barisan tak hingga.
     Ditulis (sn), $n \in N$ atau $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$
   - Jumlah deret tak hingga adalah jumlah suku-suku barisan tak hingga.
     Ditulis $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$
3. Barisan bilangan dikatakan barisan naik, jika dan hanya jika $u_n < u_{n+1}, \forall n \in N$.
4. Barisan bilangan dikatakan barisan turun, jika dan hanya jika $u_n > u_{n+1}, \forall n \in N$.
5. Sebuah barisan bilangan yang suku-sukunya naik atau turun tak terbatas, barisan ini disebut barisan divergen.
6. Sebuah barisan bilangan yang semua sukunya sama disebut barisan konstan.

Bab 6

TRIGONOMETRI

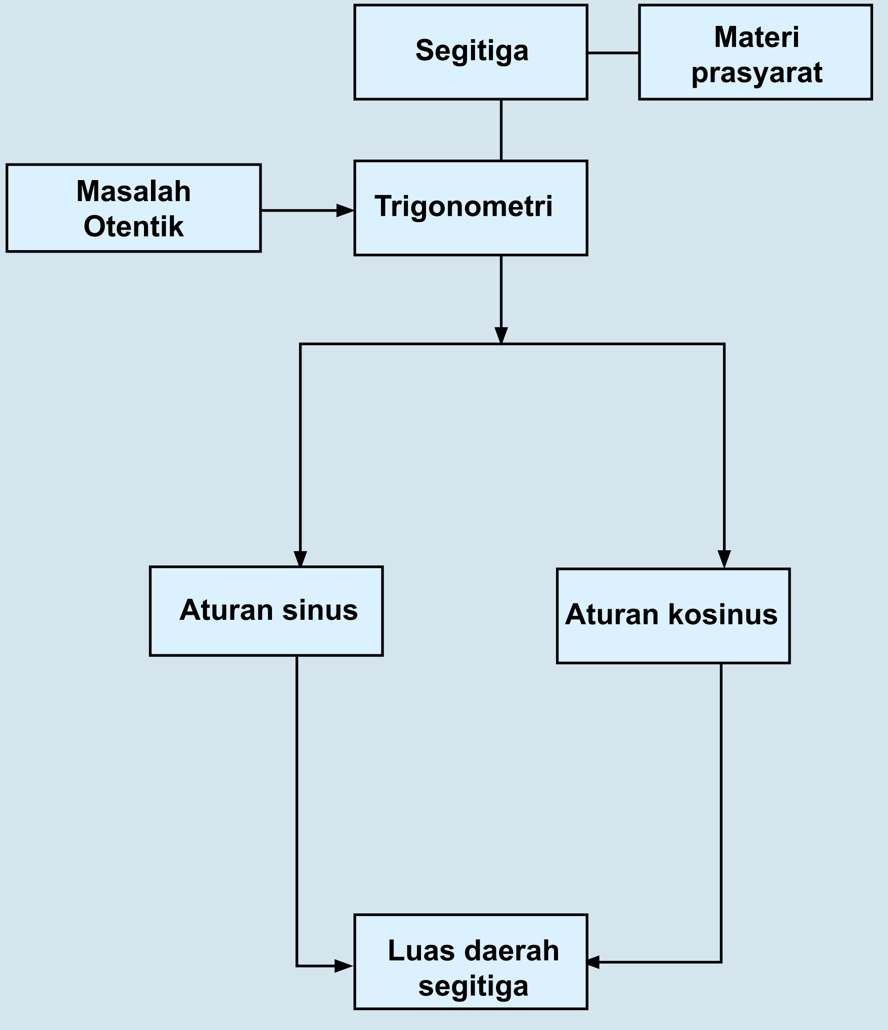
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1. Menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari–hari. 2. Mendeskripsikan dan menganalisis aturan sinus dan kosinus serta menerapkannya dalam menentukan luas daerah segitiga. 3. Merancang dan mengajukan masalah nyata terkait luas segitiga dan menerapkan aturan sinus dan kosinus untuk menyelesaikannya	Melalui pembelajaran materi trigonometri, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Menemukan konsep perbandingan trigonometri melalui pemecahan masalah otentik. • Berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur. • Berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis dan kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep trigonometri dalam memecahkan masalah otentik

Istilah Penting

- *Aturan sinus*
- *Aturan kosinus*
- *Luas segitiga*

B. PETA KONSEP



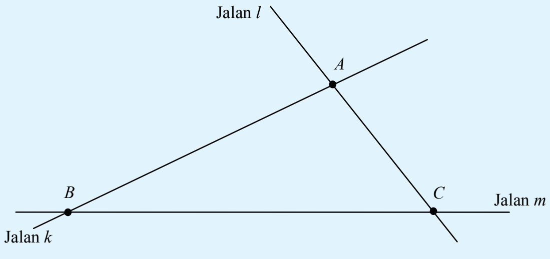
C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Aturan Sinus

Pada pelajaran trigonometri di kelas X, kamu telah belajar konsep trigonometri untuk segitiga siku-siku. Pada bahasan ini kita akan menemukan rumus-rumus trigonometri yang berlaku pada sebarang segitiga. Permasalahan pada segitiga adalah menentukan panjang sisi dan besar sudut segitiga. Jika hanya sebuah panjang sisi segitiga diketahui, apakah kamu dapat menentukan panjang sisi-sisi yang lain? Atau kamu dapat menentukan besar sudutnya? Sebaliknya, jika hanya sebuah sudut segitiga yang diketahui, apakah kamu dapat menentukan besar sudut-sudut yang lain dan panjang sisi-sisinya? Pertanyaan selanjutnya adalah apa saja yang harus diketahui agar kamu mampu menyelesaikan masalah segitiga tersebut? Agar kamu dapat memahaminya, pelajarilah masalah-masalah berikut.

Masalah-6.1

Jalan *k* dan jalan *l* berpotongan di kota *A*. Dinas tata ruang kota ingin menghubungkan kota *B* dengan kota *C* dengan membangun jalan *m* dan memotong kedua jalan yang ada, seperti yang ditunjukkan Gambar 6.1 di bawah. Jika jarak antara kota *A* dan kota *C* adalah 5 km, sudut yang dibentuk jalan m dengan jalan *l* adalah 75° dan sudut yang dibentuk jalan *k* dan jalan *m* adalah 30°. Tentukanlah jarak kota *A* dengan kota *B*!



Gambar 6.1. Jalan k, l, dan m.

Untuk menemukan aturan sinus dan kosinus pada segitiga sembarang, ajukan pada siswa masalah-masalah yang diberikan secara berkelanjutan untuk dipecahkan. Upayakan siswa lebih dahulu berusaha memikirkan, bersusah payah mencari ide-ide, berdiskusi dalam kelompok, mencari pemecahan masalah di dalam kelompok. Guru boleh memberikan anak tangga pada siswa, tetapi upayakan mereka sendiri yang memanjatnya menuju tingkat pemahaman dan proses berpikir yang lebih tinggi.

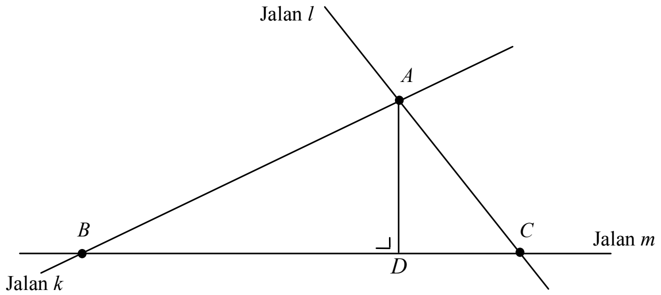
Minta siswa untuk memahami Masalah 6.1. Permasalahan ini adalah permasalahan terkait segitiga yang bertujuan untuk membentuk konsep tentang aturan sinus. Jika siswa masih belum memahami tentang penyelesaian masalah ini berikan contoh untuk melatih siswa memahami prinsip tentang aturan sinus.

Pandu siswa memahami proses penurunan prinsip atau aturan sinus berdasarkan pemanfaatan gambar disamping

Alternatif Penyelesaian ke-1

(dengan memanfaatkan garis tinggi pada segitiga)

Untuk memudahkah perhitungan, kita bentuk garis tinggi AD, dimana garis AD tegak lurus dengan garis BC, seperti Gambar 6.2 berikut.



Gambar 6.2. Segitiga *ABC* dengan garis tinggi AD

Penyelesaian masalah ini melibatkan konsep yang sudah dipelajari sebelumnya yaitu konsep tentang perbandingan nilai sinus pada pelajaran trigonometri.

Ingat kembali konsep sinus pada segitiga siku-siku.

Perhatikan ΔABD!

Dalam ΔABD, diperoleh bahwa: $\sin B = \dfrac{AD}{AB}$ atau $AD = AB$. $\sin B$.................................(1)

Dalam ΔADC, diperoleh bahwa: $\sin C = \dfrac{AD}{AC}$ atau $AD = AC$.

$\sin C$.................................(2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh bahwa:

$AB. \sin B = AC. \sin C$........(3)

Diketahui bahwa $\angle C = 75^0$; $\angle B = 30^0$; dan jarak $AC = 5$.

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai ini ke persamaan (3) maka diperoleh

$AB.\sin B \quad = AC.\sin C$

$AB \times \sin 30^0 \quad = 5 \times \sin 75^0$ (gunakan tabel sinus atau kalkulator, sinus $75^0 = 0,965$)

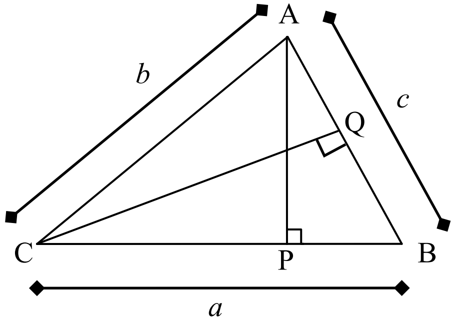
$$AB = \frac{5\times 0,965}{\frac{1}{2}}$$

$$= 10 \times 0,965$$

$$= 9,65$$

Jadi, jarak kota A dengan kota B adalah 9, 65 km.

Perhatikan Gambar 6.3 berikut.



Gambar 6.3 Segitiga ABC

Dari Gambar 6.3 di samping, diketahui bahwa $\Delta\ ABC$ dengan panjang sisi-sisinya adalah a, b, dan c. Garis AP merupakan garis tinggi, dimana $BC \perp AP$ dan garis CQ merupakan garis tinggi, dimana $CQ \perp AB$.

Dari ΔABP diperoleh, $\sin B = \dfrac{AP}{c}$ atau $AP = c \sin B$.......(1)

Dari ΔACP diperoleh, $\sin C = \dfrac{AP}{b}$ atau $AP = b \sin C$......(2)

Dari Pers. (1) dan (2) diperoleh, $c \sin B = b \sin C$

(kalikan kedua ruas dengan $\dfrac{1}{\sin B \sin C}$)

$$\frac{c \sin B}{\sin B \sin C} = \frac{b \sin C}{\sin B \sin C}$$

Maka diperoleh, $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$ ....(3)

Dari ΔACQ diperoleh, $\sin A = \dfrac{CQ}{b}$ atau $CQ = b \sin A$....(4)

Dari ΔBCQ diperoleh, $\sin B = \dfrac{CQ}{a}$ atau $CQ = a \sin B$....(5)

Dari Persamaan (4) dan (5) diperoleh, $b \sin A = a \sin B$

(kalikan kedua ruas dengan $\dfrac{1}{\sin B \sin C}$)

$$\frac{b \sin A}{\sin A \sin B} = \frac{a \sin B}{\sin A \sin B}$$

Maka diperoleh, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$ ....(6)

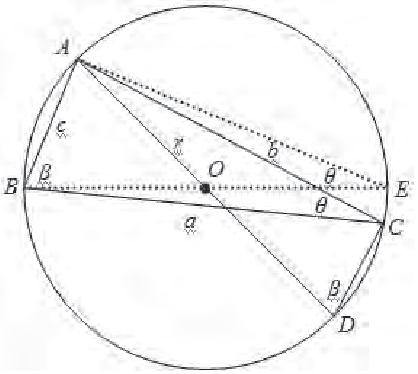
Berdasarkan persamaan (3) dan (6), maka diperoleh

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Contoh berikut ditujukan untuk memberikan alternatif pengetahuan bagi siswa untuk menemukan aturan sinus pada segitiga, dengan memahami dan mempelajari informasi konsep pada Gambar 6.4

Alternatif Penyelesaian ke-2

Perhatikan kembali Gambar 6.4 berikut.



Gambar 6.4. ΔABC pada lingkaran O

ΔABC lancip dan AD dan BE merupakan diameter lingkaran O dengan jari-jari r.

Panjang garis $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$;
$AD = BE = 2r$.

$\angle ABC = \angle ADC = \beta$;

$\angle ACB = \angle AEB = ø$

dan $\angle ACD$ adalah sudut siku-siku = 90^0.

Dari ΔACD diperoleh

$$\sin\beta = \frac{AC}{AD} = \frac{b}{2r} \text{ sehingga } 2r = \frac{b}{\sin\beta} \text{ ....(1)}$$

Dari ΔBAE diperoleh

$$\sin\theta = \frac{AB}{BE} = \frac{c}{2r} \text{ sehingga } 2r = \frac{c}{\sin\theta} \text{ ....(2)}$$

Dari persamaan (1) dan persamaan (2) di peroleh

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\theta}$$

Latihan

Dengan menggunakan $\angle BAC = \alpha$, buktikanlah bahwa $2r = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Dari uraian di atas, maka disimpulkan aturan sinus pada segitiga seperti berikut.

> **Aturan Sinus**
>
> Untuk sembarang segitiga *ABC*, dengan panjang sisi-sisi *a*, *b*, *c* dan $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, berlaku
>
> $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Latihan 6.1.

Untuk segitiga tumpul *PQR* di samping, buktikanlah bahwa

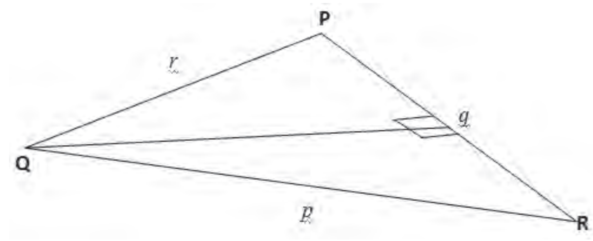
$$\frac{p}{\sin P} = \frac{q}{\sin Q} = \frac{r}{\sin R} \text{ berlaku.}$$

Agar siswa lebih memahami aturan sinus pada segitiga, guru memberikan latihan berikut.

Guru meminta siswa mengerjakan latihan secara berkelompok, kemudian mempresentasikannya di depan kelas.

Berdasarkan penyelesaian masalah dan contoh yang diberikan ajak siswa untuk menyimpulkan tentang aturan sinus.

Berikan Latihan 6.1 berikut kepada siswa sebagai pemantapan atas prinsip aturan sinus. Diharapkan siswa dapat menyelesaikannya dengan baik, minta salah seorang siswa mempresentasikan hasilnya di depan kelas.



Berikut ini disajikan alternatif penyelesaiannya

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan gambar di atas diperoleh

$\sin P = \dfrac{QX}{r}$ ....(1)

$\sin R = \dfrac{QX}{P}$ ....(2)

berdasarkan (1) dan (2) diperoleh

$QX = r \sin P$ dan $QX = p \sin R$

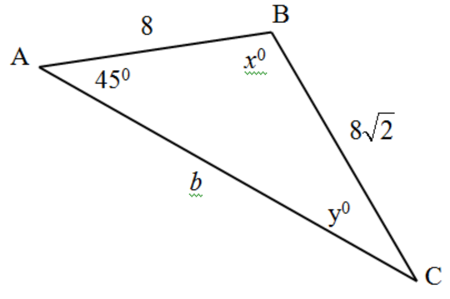
karena $QX = QX$ maka

$r \sin P = p \sin R$ sehingga $\dfrac{r}{\sin R} = \dfrac{p}{\sin P}$ (terbukti)

Untuk melihat pemahaman siswa akan konsep aturan sinus, ajukan soal pada Contoh 6.1 berikut. Minta siswa menyelesaikan terlebih dahulu.

Contoh 6.1

Perhatikan segitiga ABC berikut. Panjang $AB = 8$, $BC = 8\sqrt{2}$, $AC = b$, sudut $BAC = 45^{o}$, sudut $ACB = y^{o}$ dan sudut $ABC = x^{o}$. Dengan memanfaatkan tabel sinus pada sudut x^{o} maka tentukan panjang b.



Gambar 6.5 Segitiga ABC

Alternatif Penyelesaian

Pandu siswa memahami proses penyelesaian pada contoh soal di samping.

Dengan menggunakan aturan sinus maka diperoleh:

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin y^o}\Leftrightarrow\frac{8\sqrt{2}}{\sin 45^o}=\frac{8}{\sin y^o}$$

$$\Leftrightarrow\frac{8\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\frac{8}{\sin y^o}$$

$$\Leftrightarrow 16=\frac{8}{\sin y^o}$$

$$\Leftrightarrow \sin y^o=\frac{1}{2}\text{atau } y^o=30^o$$

Dengan mengingat konsep sudut pada segitiga yaitu $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ sehingga $45^o + 30^o + x^o = 180^o$ atau $x^o = 105^o$. Dengan menggunakan aturan sinus kembali maka diperoleh:

$$\frac{AC}{\sin x^o}=\frac{AB}{\sin y^o}\Leftrightarrow\frac{b}{\sin 105^o}=\frac{8}{\sin 30^o}$$

$$\Leftrightarrow\frac{b}{\sin 105^o}=\frac{8}{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{b}{\sin 105^o}=16$$

$$\Leftrightarrow b= 16.\sin 105^o$$

Dengan memanfaatkan tabel sinus atau kalkulator maka diperoleh:

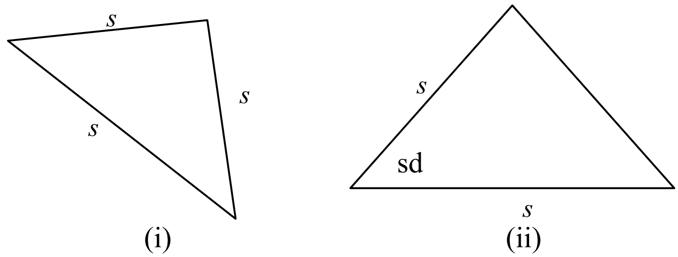
$b = 16.\sin 105^o = 16 \times 0{,}9659 = 15{,}4548$.

Jadi, panjang sisi AC adalah 15,4548 satuan panjang.

2. Aturan Cosinus

Berikan ilustrasi berikut, ilustrasi ini bertujuan untuk memberikan motivasi kepada siswa bahwa ternyata sangat penting mempelajari prinsip tentang aturan cosinus

Perhatikan Gambar 6.6 di bawah! Pada segitiga (i), diketahui panjang ketiga sisinya, sedangkan pada segitiga (ii), diketahui sebuah sudut dan dua buah sisi yang mengapitnya. Bagaimana cara Anda mengetahui ukuran sudut dan sisi lainnya dari kedua segitiga tersebut?



Gambar 6.6. Segitiga jika diketahui (s, s, s) dan (s, sd, s)

Untuk menemukan konsep aturan kosinus dalam segitiga, pelajarilah Masalah 6.2 berikut.

Minta siswa untuk memahami Masalah 6.2 yaitu menngenai jarak kedua kapal yang berangkat dari titik yang sama dan arah berbeda.

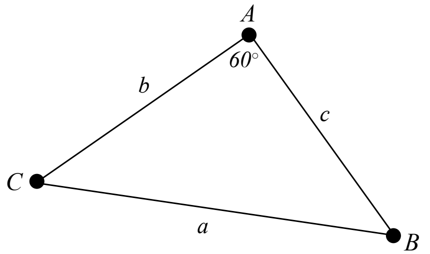
Masalah-6.2

Dua kapal tanker berangkat dari titik yang sama dengan arah berbeda sehingga membentuk sudut 60°. Jika kapal pertama bergerak dengan kecepatan 30 km/jam, dan kapal kedua bergerak dengan kecepatan 25 km/jam. Tentukanlah jarak kedua kapal setelah berlayar selama 2 jam perjalanan.

Penyelesaian masalah ini melibatkan pengetahuan tentang segitiga siku-siku. Arahkan siswa membuat segitiga siku-siku pada gambar.

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan penyelesaian masalah di atas, kita asumsikan bahwa pergerakan kapal membentuk segitiga seperti gambar di bawah.



Gambar 6.7 Segitiga *ABC* dengan sudut *A* = 60°

Dengan diselesaikannya permasalahan ini, diharapkan prinsip tentang aturan cosinus dapat dipaha-

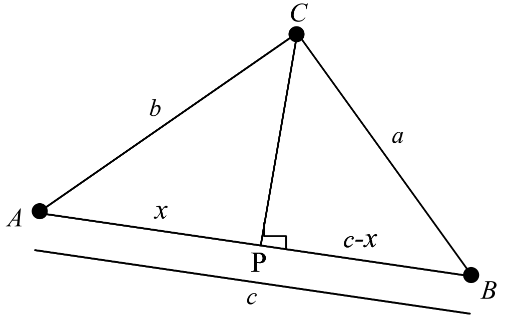
Dari gambar di atas, dapat kita misalkan beberapa hal sebagai berikut.

- Titik A merupakan titik keberangkatan kedua kapal tersebut.

- Besar sudut A merupakan sudut yang dibentuk lintasan kapal yang berbeda yaitu sebesar 60^0.
- AB merupakan jarak yang ditempuh kapal pertama selama 2 jam dengan kecepatan 30 km/jam, sehingga $AB = 60$ km.
- AC merupakan jarak yang ditempuh kapal kedua selama 2 jam perjalanan dengan kecepatan 25 km/jam, sehingga $AC = 50$ km.
- BC merupakan jarak kedua kapal setelah menempuh perjalanan selama 2 jam karena itu, pertanyaan yang harus dijawab adalah berapakah BC.

mi oleh siswa. Jika siswa masih kurang memahami mengenai permasalahan ini, guru sebaiknya mencari masalah lain yang tujuannya adalah membantu siswa dapat mengkonstruk prinsip tentang atruan cosinus

Agar kita dapat menentukan jarak BC, maka kita perlukan gambar berikut. Garis CP merupakan garis tinggi segitiga ABC, dimana $CP \perp AB$. Misalkan panjang AP adalah x maka panjang BP adalah $(c - x)$.



Gambar 6.8 Segitiga *ABC* dengan garis tinggi *CP*

Perhatikan ΔACP!

Dari ΔACP berlaku: $AC^2 = AP^2 + CP^2$ atau $CP^2 = AC^2 - AP^2$.

Dengan mensubstitusi nilai-nilai yang sudah kita peroleh, maka $CP^2 = b^2 - x^2$..(1)

Dari ΔBPC berlaku: $BC^2 = BP^2 + CP^2$ atau $CP^2 = BC^2 - BP^2$.

Dengan mensubstitusi nilai-nilai yang sudah kita peroleh,

$CP^2 = a^2 - (c - x)^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$............................(2)

Berdasarkan persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

Pandu siswa memanfaatkan Gambar 6.8 untuk mendapatkan berbagai data untuk menemukan prinsip atau aturan cosinus

$b^2 \quad = a^2 - c^2 + 2cx - x^2 + x^2$

$b^2 \quad = a^2 - c^2 + 2cx$

atau

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$...(3)

Berdasarkan ΔAPC, diperoleh

$\cos A = \dfrac{x}{b}$, maka $x = b \cos A$..(4)

dengan mensubstitusi persamaan. (4) ke dalam persamaan (3), maka diperoleh:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$...(5)

Dengan mensubstitusi nilai-nilai yang telah diketahui ke dalam persamaan (5) maka diperoleh

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 50^2 + 60^2 - (2 \times 50 \times 60 \times \cos 60^0) \\ &= 2500 + 3600 - (600 \times \tfrac{1}{2}) \\ &= 4100 - 300 \\ &= 3800 \end{aligned}$$

Maka jarak antara kedua kapal tanker tersebut setelah perjalanan selama 2 jam adalah 3800 km.

Berdasarkan Alternatif Penyelesaian pada Masalah 6.2 di atas, ditemukan aturan kosinus pada sebarang segitiga sebagai berikut.

Berdasarkan penyelesaian Masalah 6.2 yaitu mengenai jarak kapal dengan memanfaatkan bentuk segitiga, diharapkan akan terbentuk prinsip mengenai aturan cosinus.

Aturan Cosinus

Untuk sembarang segitiga *ABC*, dengan panjang sisi-sisi *a, b, c* dan $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, berlaku

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

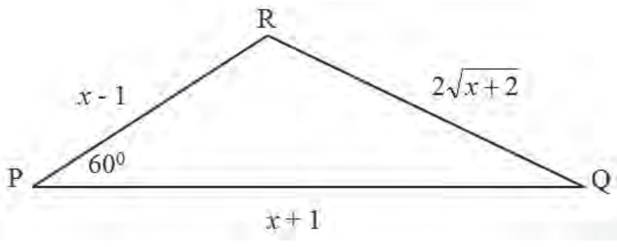
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Contoh 6.2

Ajukan soal pada Contoh 6.2 kepada siswa. Minta siswa mengerjakan terlebih dahulu. Ingatkan siswa konsep persamaan kuadrat.

Perhatikan gambar berikut. Tentukan panjang sisi-sisi segitiga tersebut.



Gambar 6.9 Segitiga *PQR* dengan sudut *P* = 60°

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan aturan cosinus maka diperoleh:

$RQ^2 = PR^2 + PQ^2 - 2.PR.PQ.\cos 60^o$

$(2\sqrt{x+2})^2 = (x + 1)^2 + (x - 1)^2 - 2.(x + 1).(x - 1).\cos 60^o$

$4(x + 2) = (x + 1)^2 + (x - 1)^2 - (x + 1).(x - 1)$

$4x + 8 = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 - x^2 + 1$

$x^2 - 4x - 5 = 0$ (ingat konsep persamaan kuadrat)

$(x - 5)(x + 1) = 0$

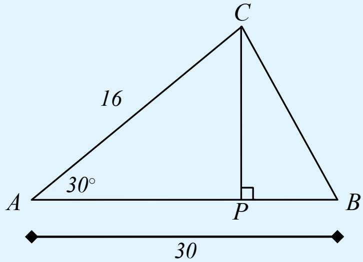
sehingga nilai x yang ditemukan adalah $x = 5$ dan $x = -1$. Nilai x yang memenuhi adalah $x = 5$ sehingga panjang sisi-sisi segitiga tersebut adalah 4, 6 dan $2\sqrt{7}$.

Minta siswa untuk memahami Masalah 6.3 yaitu mengenai luas tanah berbentuk segitiga. Diharapkan masalah ini dapat diselesaikan dengan menggunakan prinsip garis tinggi dan beberapa prinsip trigonometri untuk menyelesaikan masalah tersebut.

3. Luas Segitiga

Masalah-6.3

Sebidang tanah berbentuk segitiga *ABC* seperti pada gambar di samping. Panjang sisi *AB* adalah 30 m, panjang sisi *BC* adalah 16 m dan besar sudut *BAC* adalah 300. Jika tanah itu dijual dengan harga Rp250.000,00 untuk setiap meter persegi. Tentukan harga penjualan tanah tersebut.



Gambar 6.10. Segitiga ABC

Alternatif Penyelesaian

Garis *CP* merupakan garis tinggi segitiga *ABC* sehingga $\overline{CP}$ tegak lurus $\overline{AB}$.

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CP \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Dari segitiga *ACP* diketahui

$$\sin A = \frac{CP}{AC}, \text{ sehingga } CP = AC \times \sin A \ldots\ldots\ldots (2)$$

Dengan mensubstitusikan pers (2) ke pers. (1) diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Luas } \Delta ABC &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin A \\ &= \frac{1}{2} \times 30 \times 16 \times \sin 30^0 \\ &= 120 \end{aligned}$$

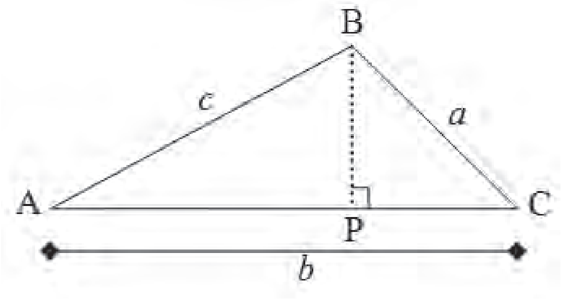
Maka luas tanah tersebut adalah 120 m^2.

Jika harga 1 m^2 tanah adalah Rp250.000,00, maka harga jual tanah tersebut ditentukan dengan $120 \times 250.000 = 30.000.000$.

Maka harga jual tanah tersebut adalah Rp30.000.000,00

Perhatikan Gambar 6.11 berikut.

Pandu siswa untuk mendapatkan informasi pada segitiga ABC pada Gambar 6.11 terkait penemuan prinsip luas segitiga



Gambar 6.11 Segitiga ABC

Garis BP merupakan garis tinggi ΔABC sehingga $\overline{AC}$ tegak lurus $\overline{BP}$. Panjang sisi AB, AC, dan BC berturut-turut adalah c, b, dan a.

Ingat kembali rumus menentukan luas daerah segitiga.

Luas $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \times AC \times BP$ ....(1)

Dari segitiga ABP diketahui

$\sin A = \dfrac{BP}{AB}$, sehingga $BP = AB \times \sin A$ ....(2)

Dengan mensubstitusikan persamaan (2) ke persamaan (1)

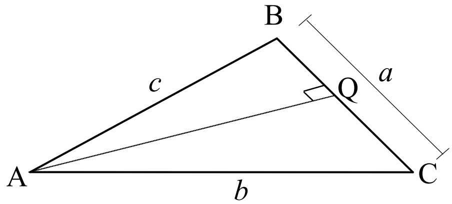
diperoleh

Luas $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \times AC \times BP$

Luas $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \times AC \times AB \times \sin A$

Luas $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \times b \times c \times \sin A$

Perhatikan Gambar 6.12 berikut.



Gambar 6.12 Segitiga ABC

Garis $\underline{AQ}$ merupakan garis tinggi ΔABC sehingga $\overline{BC}$ tegak lurus $\overline{AQ}$. Panjang sisi AB, AC, dan BC berturut-turut adalah c, b, dan a.

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AQ$ ....(1)

Dari segitiga ABQ diketahui

$\sin B = \frac{AQ}{AB}$, sehingga $AQ = AB \times \sin B$ ....(2)

Dengan mensubstitusikan pers (2) ke pers. (1) diperoleh

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AQ$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AB \times \sin B$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin B$$

Latihan 6.2

Latihan ini bertujuan untuk menguji pemahaman siswa terhadap prinsip trigonometri dalam menentukan luas segitiga

Dengan menggunakan ΔBPC pada Gambar 6.11 dan ΔAQC pada Gambar 6.12, tentukanlah rumus Luas ΔABC.

Berdasarkan penyelesaian uraian-uraian di atas, ditemukan rumus luas sebarang segitiga sebagai berikut.

Definisi 6.1

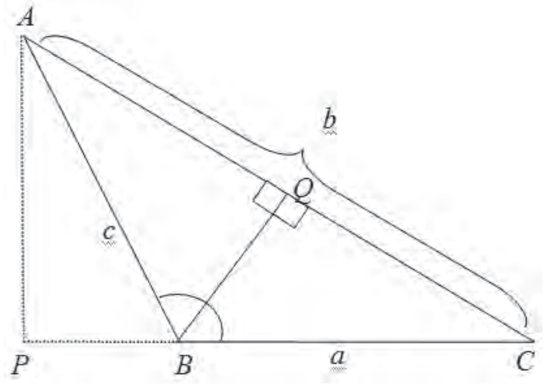
Untuk sembarang segitiga *ABC*, dengan panjang sisi-sisi *a*, *b*, *c* dan $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, berlaku Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times ab \sin C = \frac{1}{2} \times bc \sin A = \frac{1}{2} \times ac \sin B$.

Berdasarkan penyelesaian Latihan 6.2 diharapkan siswa dengan bantuan guru dapat membuat Definisi Luas segitiga sembarang. Minta siswa membuat alasan bahwa luas segitiga adalah ½ alas × tinggi.

Latihan 6.3

Dengan menggunakan segitiga *ABC* tumpul seperti Gambar 6.13 dibawah, buktikan bahwa Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times bc \sin A$.

Berikan Latihan 6.3 untuk diselesaikan siswa. Penyelesaian ini menuntut kemampuan siswa dalam menerapkan segitiga siku-siku dalam penyelesaian masalah



Gambar 6.13. Segitiga tumpul *ABC*

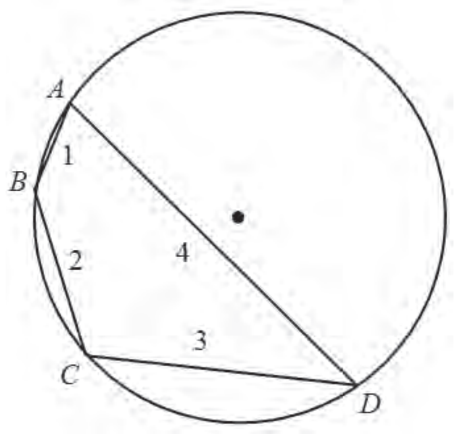
Berdasarkan Gambar 6.13 diperoleh
ΔBQA siku-siku di Q, sehingga
$BQ = c \sin A$ dan diperoleh juga $BQ = a \sin C$

karena Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BQ \times b = \frac{1}{2} b \sin C$

Contoh 6.3

Perhatikan gambar berikut. Titik *A*, *B*, *C*, dan *D* ada pada lingkaran *L* dengan panjang $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$ dan $AD = 4$.

Arahkan siswa menjawab soal pada Contoh 6.3. Minta siswa memahami Gambar 6.14.



Gambar 6.14 Segiempat *ABCD* pada lingkaran *L*

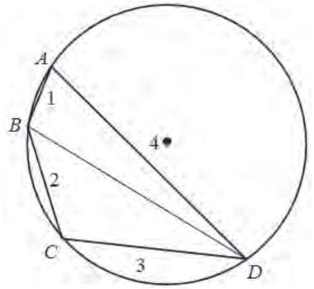
Tentukan luas segiempat *ABCD* dengan panjang $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$ dan $AD = 4$.

Pandu siswa memahami proses penyelesaian langkah per langkah pada altenatif penyelesaian di samping. Pandu siswa memanfaatkan aturan cosinus, konsep trigonometri, dan rumus luas segitiga.

Alternatif Penyelesaian

Langkah 1.

Bagi daerah ABCD menjadi dua bagian dengan menarik garis AC atau BD. Misalkan, kita pilih garis BD sehingga gambar menjadi:



Gambar 6.15 Daerah segiempat ABCD terbagi atas dua segitiga

Langkah 2.

Manfaatkan aturan cosinus pada masing-masing daerah.

Perhatikan segitiga BAD

Dengan menggunakan aturan cosinus maka diperoleh:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 – 2AB.AD.\cos A$

$BD^2 = 1^2 + 4^2 – 2.1.4.\cos A$

$BD^2 = 17 – 8.\cos A$

Perhatikan segitiga BCD

Pandu siswa memanfaatkan aturan cosinus pada segitiga ABCD

Dengan menggunakan aturan cosinus maka diperoleh:

$BD^2 = BC^2 + CD^2 – 2BC.CD.\cos C$

$BD^2 = 2^2 + 3^2 – 2.2.3.\cos C$

$BD^2 = 13 – 12.\cos C$

Berdasarkan konsep sudut pada lingkaran maka $\angle A + \angle C = 180^\circ$ sehingga $\angle C = 1800 – \angle A$ sehingga diperoleh:

$17 – 8.\cos A = 13 – 12.\cos C$

$17 – - 8.\cos A = 13 – 12.\cos (180^\circ – A)$ (ingat konsep trigonometri di kelas X)

$17 – 8.\cos A = 13 + 12.\cos A$

$20.\cos A = 4$

$\cos A = \frac{1}{5}$

Langkah 3.

Berdasarkan konsep trigonometri pada kelas X maka diperoleh segitiga siku-siku dengan $\cos A = \frac{1}{5}$. Perhatikan Gambar!

Ingatkan siswa konsep dasar trigonometri

Dengan Phytagoras maka diperoleh panjang sisi di depan sudut A adalah $\sqrt{25-1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Dengan konsep trigonometri dasar maka diperoleh:

$\sin A = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

Langkah 4.

Jadi, luas □ABCD = luas □BAD + luas □BCD

luas □ABCD = $\frac{1}{2}$.AB.AD.sin A + $\frac{1}{2}$.CB.CD.sin C

$$\text{luas } \square ABCD = \frac{1}{2}.1.4.\sin A + \frac{1}{2}.2.3.\sin(180^o - A)$$

$$\text{luas } \square ABCD = 2.\sin A + 3.\sin A$$

$$\text{luas } \square ABCD = 5.\sin A$$

$$\text{luas } \square ABCD = 5 \times \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{luas } \square ABCD = 2\sqrt{6}$$

Jadi, luas segiempat ABCD pada lingkaran tersebut adalah $2\sqrt{6}$ satuan luas.

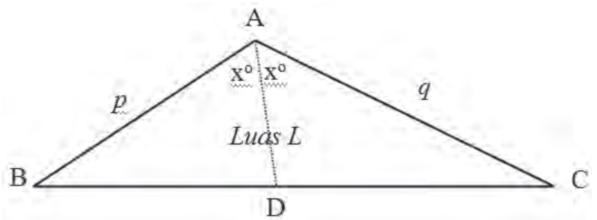
Arahkan siswa menyelesaikan Contoh 6.4. (soal telah diselesaikan di samping)

Contoh 6.4

Pada segitiga ABC dengan luas L. Panjang $AB = p$, $AC = q$. Jika D pada BC sehingga AD membagi sudut BAC menjadi dua bagian yang sama yaitu x^o maka tentukan panjang AD.

Alternatif Penyelesaian.

Langkah 1.



Gambar 6.17 Garis bagi AD pada segitiga ABC

Langkah 2.

$$\text{Luas } \Delta BAD = \frac{1}{2}.AB.AD.\sin x^o$$

$$= \frac{1}{2}.p.AD.\sin x^o$$

$$\text{Luas } \Delta CAD = \frac{1}{2}.AC.AD.\sin x^o$$

$$= \frac{1}{2}.q.AD.\sin x^o$$

Langkah 2.

Luas ΔABC = Luas ΔBAD + Luas ΔCAD

$$L = \frac{1}{2}.p.\text{AD}.\sin x^o + \frac{1}{2}.q.\text{AD}.\sin x^o$$

$$2L = (p + .q)\text{AD}.\sin x^o$$

$$\text{AD} = \frac{2L}{(p+q)\sin x^o}$$

Jadi, panjang AD adalah $\dfrac{2L}{(p+q)\sin x^o}$

Uji Kompetensi 6.1

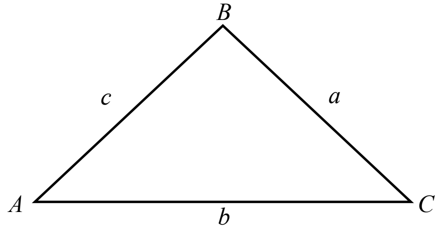
Soal-soal pada Uji Kompetensi ini diberikan kepada siswa berupa tugas untuk dikerjakan di rumah. Soal uji kompetensi ini bertujuan untuk mengukur kemampuan siswa terkait prinsip aturan sinus dan cosinus.

1. Kapal laut A dan B berlayar dari titik M pada waktu yang bersamaan. Kapal A berlayar dengan dengan jurusan tiga angka 102^0 dan B berlayar dengan jurusan tiga angka 232^0. Hitunglah jarak kedua kapal tersebut setelah berlayar selama 3 jam, jika kecepatan kapal A 30 km/jam dan kecepatan kapal B adalah 45 km/jam.

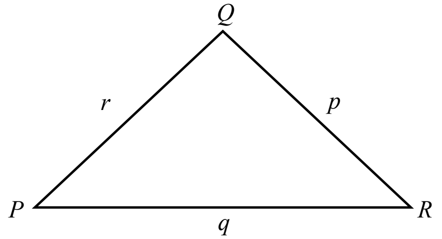
2. Tentukan sisi-sisi segitiga ABC, jika diketahui sebagai berikut.
   a) $a + b = 10$, $\angle A = 60^0$, dan $\angle B = 45^0$
   b) $a - b = 6$, $\angle A = 45^0$, dan $\angle B = 30^0$

3. Dua sisi yang berdekatan pada suatu jajargenjang adalah 84 cm dan 68 cm. Sudut apit sisi itu adalah 72°. Hitunglah luas jajargenjang tersebut.

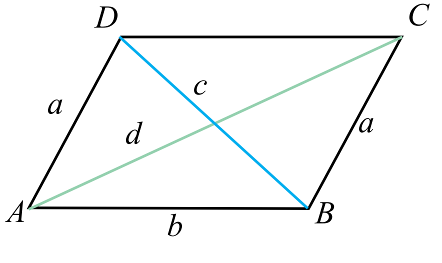
4. Diketahui segitiga ABC seperti gambar di samping. Buktikanlah bahwa $\dfrac{a \pm b}{c} = \dfrac{\sin A \pm \sin B}{\sin C}$.



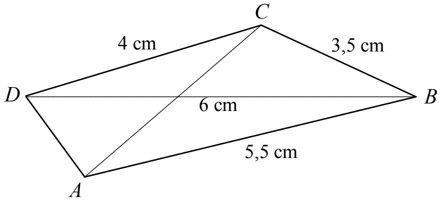
5. Hitunglah unsur-unsur yang belum diketahui berikut ini.
   ΔABC dengan $a = 24$ cm, $b = 32$ cm, dan $\angle B = 52^0$
   ΔABC dengan $b = 20$ cm, $b = 18$ cm, dan $\angle B = 124^0$
6. Hitunglah besar sudut-sudut pada segitiga ABC, jika diketahui $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, dan $c = 9$ cm.
7. Diketahui segitiga PQR seperti gambar di samping. Buktikanlah bahwa $\dfrac{p}{r} = \dfrac{\sin(Q+R)}{\sin R}$.



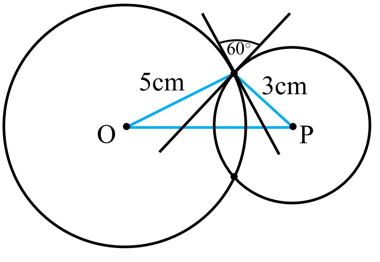
8. Diketahui jajargenjang $ABCD$ dengan panjang diagonal c dan d seperti gambar di samping. Dengan menggunakan aturan kosinus pada segitiga, buktikanlah bahwa $c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$.



9. Diketahui segiempat $ABCD$ seperti gambar di samping. Jika panjang diagonal $BD = 6$ cm, dengan menggunakan aturan kosinus pada segitiga tentukanlah panjang diagonal AC.



10. Dua lingkaran dengan jari-jari 5 cm dan 3 cm berpotongan pada dua titik. Pada salah satu titik potong, garis singgung kedua lingkaran membentuk sudut 60^0 seperti gambar di samping. Tentukanlah jarak kedua titik pusat lingkaran tersebut.



11. Dengan menggunakan aturan kosinus pada segitiga ABC, buktikanlah bahwa
    a) $c^2 < a^2 + b^2$ jika $\angle C$ lancip;
    b) $c^2 > a^2 + b^2$ jika $\angle C$ tumpul; dan
    c) $c^2 = a^2 + b^2$ jika $\angle C$ siku-siku.

12. Untuk sebarang segitiga ABC, buktikanlah bahwa

a) $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c)}{2abc}$

Projek

Lukislah sebuah segitiga sembarang. Dengan menggunakan penggaris dan busur kemudian ukurlah panjang masing-masing sisi dan sudutnya. Selanjutnya buktikanlah bahwa aturan sinus dan aturan kosinus berlaku pada segitiga tersebut (Agar perhitunganmu akurat, gunakan kalkulator untuk menghitung nilai sinus dan kosinus sudut-sudut segitiga tersebut). Buatlah laporan hasilnya dan persentasikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan uraian materi pada Bab 6 ini, beberapa kesimpulan yang dapat dinyatakan sebagai pengetahuan awal untuk mendalami dan melanjutkan bahasan berikutnya. Beberapa kesimpulan disajikan sebagai berikut.

1. Untuk sembarang segitiga ABC, dengan panjang sisi-sisi a, b, c dan $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, berlaku aturan sinus $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.
2. Untuk sembarang segitiga ABC, dengan panjang sisi-sisi a, b, c dan $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, berlaku aturan cosinus
   (i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
   (ii) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
   (iii) $c = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
3. Untuk sembarang segitiga ABC, dengan panjang sisi-sisi a, b, c dan $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, berlaku Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times ab \sin C = \frac{1}{2} \times bc \sin A = \frac{1}{2} \times ac \sin B$

Beberapa hal yang telah kita rangkum di atas adalah modal dasar bagi kamu dalam belajar materi trigonometri secara lebih mendalam pada jenjang pendidikan yang lebih tinggi. Konsep-konsep dasar di atas harus kamu pahami dengan baik karena akan membantu dalam pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Bab 7

STATISTIKA

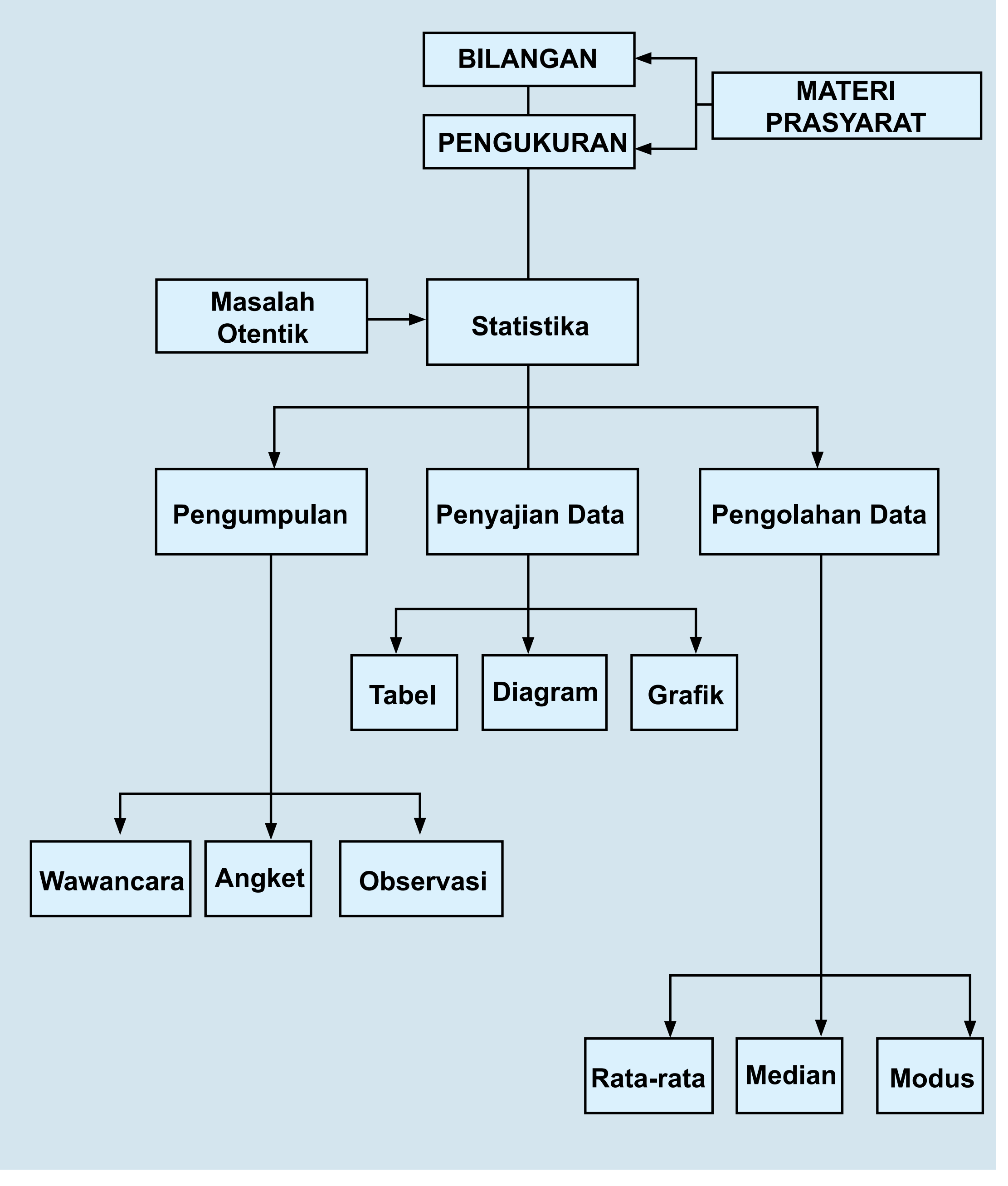
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnnya. 2. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 3. Mampu mentransformasi diri dalam berprilaku jujur, tangguh mengadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 4. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 5. Mendeskripsikan dan menggunakan berbagai ukuran pemusatan, letak dan penyebaran data sesuai dengan karakteristik data melalui aturan dan rumus serta menafsirkan dan mengomunikasikannya. 6. Menyajikan dan mengolah data statistik deskriptif ke dalam tabel distribusi dan histogram untuk memperjelas dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kehidupan nyata. Mampu mentransformasi diri dalam berprilaku jujur, tangguh mengadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika.	Melalui pembelajaran materi peluang, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Berdiskusi, bertanya dalam menemukan konsep dan prinsip statistik melalui pemecahan masalah autentik yang bersumber dari fakta dan lingkungan. • Berkolaborasi memecahkan masalah autentik dengan pola interaksi edukatif. • Berpikir tingkat tinggi dalam menyajikan, serta menganalisis statistik deskriptif.

Istilah Penting

- *Mean*
- *Median*
- *Modus*
- *Simpangan baku*
- *Varian*
- *Histogram*
- *Quartil*
- *Desil*
- *Persentil*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. UKURAN PEMUSATAN

Mean atau yang sering disebut sebagai rata-rata, median yang merupakan nilai tengah dari data yang telah diurutkan , dan modus yaitu data yang sering muncul merupakan nilai yang menggambarkan tentang pemusatan nilai-nilai dari data yang diperoleh dari suatu peristiwa yang telah diamati. Itulah sebabnya mean, median, dan modus disebut sebagai ukuran pemusatan. Untuk lebih memahami tentang ukuran pemusatan data, mari kita cermati dari masalah berikut ini.

Berikan apersepsi mengenai pemusatan data dan ingatkan pula akan materi yang pernah dipelajari pada kelas 10 serta materi prasyaratnya.

Berikan kesempatan siswa untuk mengamati persoalan data dan mencoba untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan kreatifitasnya.

Masalah-7.1

Kepala Sekolah SMA Negeri 1 Bakara-Baktiraja ingin mengevaluasi hasil belajar siswa dan meminta guru untuk memberikan laporan evaluasi hasil belajar siswa. Data hasil penilaian yang dilakukan guru matematika terhadap 64 siswa/siswi kelas XI dinyatakan sebagai berikut.

61	83	88	81	82	60	66	98	93	81	38	90	92	85	76	88	78	74	70	48
80	63	76	49	84	79	80	70	68	92	61	83	88	81	82	72	83	87	81	82
81	91	56	65	63	74	89	73	90	97	48	90	92	85	76	74	88	75	90	97
75	83	79	86	80	51	71	72	82	70	93	72	91	67	88	80	63	76	49	84

Guru berencana menyederhanakan data tunggal tersbut menjadi bentuk data berinterval dan membuat statitistiknya, hal ini dilakukan untuk mengefisienkan laporan evaluasi hasil belajar siswa. Bantulah guru tesebut untuk menyusun laporannya!

Alternatif Penyelesaian

Untuk dapat memudahkan penggunaan data tersebut, susun data berdasarkan urutan terkecil hingga terbesar. Urutan data tersebut dinyatakan sebagai berikut.

Arahkan siswa untuk melakukan langkah-langkah dalam mengurai permasalahan.

38	48	48	49	49	51	56	60	61	61	63	63	63	65	66	67	68	70	70	70
71	72	72	72	73	74	74	74	75	75	76	76	76	76	78	79	79	80	80	80
80	81	81	81	81	81	82	82	82	82	83	83	83	83	84	84	85	85	86	87
88	88	88	88	88	89	90	90	90	90	91	91	92	92	92	93	93	97	97	98

Setelah data diurutkan, dengan mudah kita temukan, data terbesar adalah 98 dan data terkecil adalah 38. Selisih data terbesar dengan data terkecil disebut sebagai jangkauan data. Untuk data yang kita kaji, diperoleh:

Jangkauan Data adalah 60. Langkah kita selanjutnya adalah untuk mendistribusikan data-data tersebut ke dalam kelas-kelas interval. Untuk membagi data menjadi beberapa kelas, kita menggunakan aturan Sturgess. Aturan tersebut dinyatakan bahwa jika data yang diamati banyaknya n dan banyak kelas adalah k, banyak kelas dirumuskan sebagai berikut:

$k = 1 + (3,\ 3).\ \log n$

Untuk data di atas diperoleh,

$$\begin{aligned}\text{Banyak Kelas} &= 1 + (3{,}3).\ \log 80\\ &= 1 + (3{,}3).\ (1{,}903)\\ &= 7{,}28 = 7\end{aligned}$$

Jadi, 80 data di atas akan dibagi menjadi 7 kelas interval.

Ingatkan kembali materi sebelumnya sehingga siswa mampu menggunakan rumus/ materi dalam pemecahan masalah.

Pertanyaan kritis:

Jelaskan mengapa angka pembulatan yang dipilih angka 7 bukan angka 8?

Petunjuk jawaban:

Pemilihan banyak kelas dimaksudkan sebagai upaya penyesuaian agar semua data yang dapat tercakup dalam distribusi frekuensi.

Coba minta siswa untuk membentuk data menjadi 8 kelas interval, lalu minta siswa mengamati terhadap apa yang terjadi?

Sekarang kita perlu menentukan berapa banyak data yang terdapat pada satu kelas interval. Banyak data dalam satu interval, disebut panjang interval kelas, yang dirumuskan sebagai berikut:

Maka diperoleh: $\text{Panjang Kelas} = \dfrac{\text{Jangkauan data}}{\text{Banyak kelas}}$

dari data di atas dapat di peroleh

$$\text{Panjang Kelas} = \frac{\text{Jangkauan}}{\text{Banyak Kelas}} = \frac{60}{7} = 8{,}57 \approx 9$$

Selanjutnya, dengan adanya banyak kelas adalah 7 dan panjang kelas adalah 9 dapat kita gunakan untuk membentuk kelas interval yang dinyatakan sebagai berikut:

Kelas I : 38 – 46
Kelas II : 47 – 55
Kelas III : 56 – 64
Kelas IV : 65 – 73
Kelas V : 74 – 82
Kelas VI : 83 – 91
Kelas VII : 92 – 100

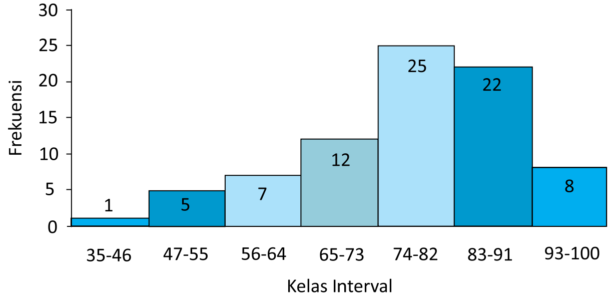
Dari hasil pengolahan data di atas dapat dibentuk ke dalam bentuk tabel berikut.

Tabel 7.1. Tabel Frekuensi

Kelas	Frekuensi
38 – 46	1
47 – 55	5
56 – 64	7
65 – 73	12
74 – 82	25
83 – 91	22
92 – 100	8
	80

Perlu dicermati bahwa pembentukan interval kelas tersebut harus memuat semua data. Jika ada satu data yang tidak tercakup pada interval kelas, maka terdapat kesalahan dalam mendistribusikan data.

Bentuk histogram dari hasil pengolahan data nilai siswa di atas digambarkan sebagai berikut.



Gambar 7.1 Histogram Data Nilai Siswa

Mengajak siswa untuk mencoba menemukan salah satu konsep pemusatan data yakni nilai rata-rata dengan beberapa cara.

Ingatkan juga siswa mengenai mean yang sudah dipelajari di SMP.

a. Menentukan Nilai Mean (Rata-rata)

Sajian data pada tabel di atas, tentunya harus kita memaknai setiap angka yang tersaji.

Dari Interval 38 – 46 dapat diartikan bahwa:
38 disebut batas bawah interval
46 disebut batas atas interval.
Titik tengah interval, dinotasikan xi , diperoleh:

$$x_i = \frac{1}{2}\left[\left(\text{batas bawah interval ke - } i\right) + \left(\text{batas atas interval ke - } i\right)\right]$$

Sehingga: $x_1 = \frac{1}{2}[38 + 46] = 42$

Setiap interval memiliki batas bawah, batas atas, dan titik tengah interval (x_i).

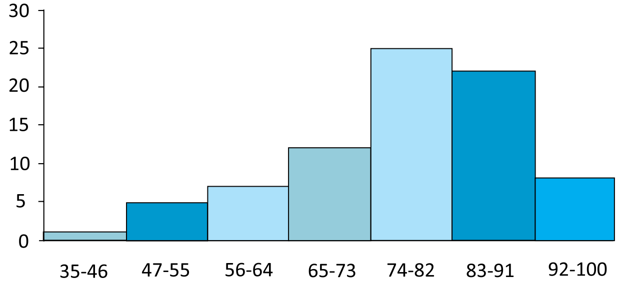
Data hasil belajar siswa di atas, dapat diperbaharui sebagai berikut:

Tabel 7.2 Tabel Frekuensi

Kelas	x_i	F	x_i . F
38 – 46	42	1	42
47 – 55	51	5	255
56 – 64	60	7	420
65 – 73	69	12	828
74 – 82	78	25	1,950
83 – 91	87	22	1,914
92 – 100	96	8	768
Total		**80**	**6,177**

Titik tengah setiap interval diartikan sebagai perwakilan data setiap interval. Nilai ini digunakan untuk menentukan rata-rata data tersebut.

Data yang diperoleh dari Tabel 7.2 dapat digambarkan kedalam bentuk histogram



Gambar 7.2 Histogram Data Nilai Siswa

Dengan mengembangkan konsep *mean* pada data tunggal, yakni, *mean* merupakan perbandingan jumlah seluruh data dengan banyak data. Dari tabel dan histogram dapat kita peroleh jumlah seluruh data, yakni, jumlah perkalian nilai tengah terhadap frekuensi masing-masing. Maka jumlah seluruh data adalah: = (1) 42 + (5) 51 + (7) 60 + (12) 69 + (25) 78 + (22) 78 + (22) 87 + (8) 96

Sehingga diperoleh rata-rata (mean):

$$=\frac{(1)42+(5)51+(7)60+(12)69+(25)78+(22)87+(8)96}{1+5+7+12+25+22+8}$$

$$=\frac{6177}{80}=77.21$$

Mencoba mengkontruksi konsep dengan meng-analisis permasalahan yang diberikan.

Dengan demikian, dengan tabel frekuensi di atas dan nilai rata-rata data, ditemukan:

- Banyak siswa yang memiliki nilai matematika di bawah nilai rata-rata!
- Banyak siswa yang memiliki nilai matematika di atas nilai rata-rata!

Perhitungan rata-rata di atas dapat kita dirumuskan secara matematis menjadi:

$$Mean\ (\bar{x}) = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i . f_i)}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

Nah, melalui pembahasan di atas, tentunya dapat disimpulkan bahwa rata-rata (mean) merupakan salah satu ukuran pemusatan data yang dinyatakan sebagai berikut.

Guru bersama-sama dengan siswa membuat konsep rata-rata yang melibatkan frekuensi dari data yang diberikan.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k}$$

dimana:

f_i : frekuensi kelas ke-*i*

x_i : nilai tengah kelas ke-*i*

Selain cara di atas, ada cara lain untuk menghitung rata-rata. Dengan data yang sama, cermati langkah-langkah di bawah ini.

Tabel 7.3 Perhitungan Rataan sementara

Interval	**(x_i)**	**f_i**	**$d_i = x_i - x_s$** **$x_s = 78$**	**$f_i . d_i$**
38 – 46	42	1	-36	-36
47 – 55	51	5	-27	-135
56 – 64	60	7	-18	-126
65 – 73	69	12	-9	-108
74 – 82	78	25	0	0
83 – 91	87	22	9	198
92 – 100	96	8	18	144
Total		**80**		**-63**

Dengan cara memperkirakan bahwa nilai rata-rata sementara yang dipilih pada kelas yang memiliki frekuensi tertinggi dan letak rata-rata sementara tersebut adalah titik tengah kelas interval.

Secara lengkap, langkah-langkah menentukan rata-rata data dengan menggunakan rata-rata sementara sebagai berikut

Langkah 1.	Ambil nilai tengah dengan frekuensi terbesar sebagai mean sementara x_s
Langkah 2.	Kurangkan setiap nilai tengah kelas dengan mean sementara dan catat hasilnya dalam kolom $d_i = x_i - x_s$.
Langkah 3.	Hitung hasil kali f, d, dan tuliskan hasilnya pada sebuah kolom, dan hitung totalnya.
Langkah 4.	Hitung mean dengan menggunakan rumus rataan sementara.

Sehingga diperoleh rata-rata adalah:

$$\bar{x} = x_s + \frac{\sum_{i=1}^{k}(f_i.d_i)}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

dengan:

x_s : rata-rata sementara.
d_i : deviasi atau simpangan terhadap rata-rata.
f_i : frekuensi interval kelas ke-i.
x_s : nilai tengah interval kelas ke-i.

Maka untuk data di atas dapat diperoleh:

$$Mean = x_s + \frac{\sum_{i=1}^{k}(f_i.d_i)}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = 78 + \frac{-117}{64} = 77.21.$$

Minta siswa untuk memahami penjelasan dari informasi yang diberikan tentang menentukan rata-rata dengan menggunakan rataan sementara. Diharapkan siswa memahami makna dari rata-rata tersebut.

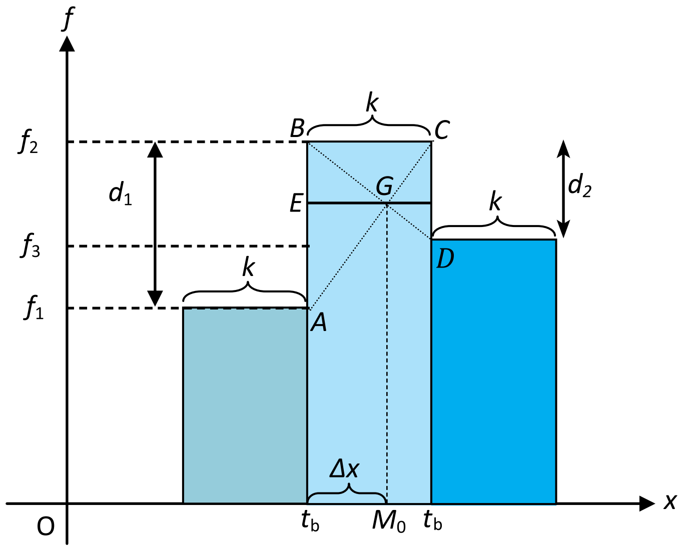
Melakukan apersepsi tentang modus data yang telah dipelajari pada data tunggal.

Mencoba mengkontruksi nilai modus melalui grafik histogram.

Minta siswa untuk memahami pengertian modus yang sudah dipelajari sewaktu di SMP. Selanjutnya berikan data yang telah disajikan dalam bentuk histogram terhadap data berkelompok. Selanjutnya dengan menggunakan konsep dan prinsip kesebangunan arahkan siswa untuk dapat memperoleh konsep modus data berkelompok.

b. Menentukan Nilai Modus

Pada waktu SMP kamu telah membahas modus untuk data tunggal, untuk data berkelompok secara prinsip adalah sama yakni nilai yang sering muncul. Dalam hal ini frekuensi terbanyak menjadi perhatian kita sebagai letak modus tersebut. Misalkan dari sekumpulan data kita mengambil 3 kelas interval yakni kelas interval dengan frekuensi terbanyak (kelas modus) dan kelas interval sebelum dan sesudah kelas modus. Dengan bantuan histogram dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 7.3 Penentuan Modus dengan Histogram

Perhatikan ilustrasi diatas, terlihat bahwa $\Delta\, ABG$ sebangun dengan $\Delta\, DCG$, dan panjang $AB = d_1$; $CD = d_2$; $EG = \Delta x$ dan $FG = k - \Delta x$. Secara geometri dari kesebangunan di atas berlaku perbandingan berikut ini;

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EG}{FG} \Leftrightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{\Delta x}{k - \Delta x}$$

$$\Leftrightarrow d_1\left(k - \Delta x\right) = d_2 \Delta x$$

$$\Leftrightarrow d_1 k - d_1 \Delta x = d_2 \Delta x$$

$$\Leftrightarrow d_1\Delta x + d_2\Delta x = d_1 k$$

$$\Leftrightarrow \Delta x\left(d_1 + d_2\right) = d_1 k$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = \frac{d_1 k}{\left(d_1 + d_2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = k\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

Sehingga dapat diperoleh modus adalah:

$$M_0 = t_b + \Delta x$$

$$= t_b + k\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

$$M_0 \quad = t_b + k\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

dimana:

M_0 : Modus

t_b : Tepi bawah kelas modus

k : Panjang kelas

d_1 : Selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya

d_2 : Selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya

Perhatikan tabel berikut.

Tabel 7.4 Perhitungan Modus

No	Kelas	Titik tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)
1	38 – 46	42	1
2	47 – 55	51	5
3	56 – 64	60	7
4	65 – 73	69	12
5	74 – 82	78	25
6	83 – 91	87	22
7	92 – 100	96	8

Dari data di atas dapat ditentukan sebagai berikut:

Tampak modus terletak pada frekuensi terbanyak f = 25 yaitu kelas interval modus 74 – 82 dengan dan panjang kelas k = 9. Oleh karena itu, t_b= 73,5, dan d_1= 25 – 12 =13 serta d_2= 25 – 22 = 3.

Jadi modus data di atas adalah:

$$M_o = t_b + k\left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$$

$$= 73{,}5 + 9\left[\frac{13}{13+3}\right]$$

$$= 73{,}5 + 7{,}31$$

$$M_o = 80{,}81$$

Berikut ini diberikan rumusan tentang median atau nilai tengah dari data yang telah diurutkan. data yang diberikan dalam menentukan median adalah data berkelompok.

c. Median

Median dari sekelompok data yang telah terurut merupakan nilai yang terletak di tengah data yang membagi data menjadi dua bahagian yang sama. Untuk data berkelompok berdistribusi frekuensi median ditentukan sebagai berikut:

$$M_e = t_b + k\left[\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right]$$

dengan :

M_e = Median

t_b = tepi bawah kelas median

k = panjang kelas

n = banyak data dari statistik terurut $\sum f_i$

F = frekuensi kumulatif tepat sebelum kelas median

f_m = frekuensi kelas median

Dari data sebelumnya diperoleh k = 9 ; t_b = 73,5 ; N = 80; f_m = 25

sehingga:

Masih menggunakan data di atas maka kita bentuk tabel berikut ini.

Tabel 7.5 Perhitungan Median

Kelas	Frekuensi f_i	Frekuensi Kumulatif F
38 – 46	1	1
47 – 55	5	6
56 – 64	7	13
65 – 73	12	25
74 – 82	25	50
83 – 91	22	77
92 – 100	8	80
	80	

$$\text{Median} = t_b + k\left[\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right]$$

$$= 73{,}5 + 9\left[\frac{\frac{80}{2} - 25}{25}\right]$$

$$= 73{,}5 + 3{,}705$$

$$= 77{,}205$$

Minta siswa untuk mengamati data yang diberikan, kemudian dengan dta yang diberikan minta siswa untuk menentukan median data berkelompok tersebut.

Pertanyaan kritis:

- Dari ketiga pembahasan tentang ukuran pemusatan data pada data kelompok, dapatkah kamu menemukan hubungan antara ketiga pemusatan data di atas? Diskusikan dengan temanmu!
- Dapatkah terjadi nilai ukuran $\overline{x} = Mo = Me$ pada sekumpulan data, jelaskan.

Petunjuk jawaban:

Arahkan siswa menemukan hubungan $\overline{x} - Mo = 3\left(\overline{x} - Me\right)$.

Berikan apersepsi mengenai ukuran letak data dan ingatkan pula akan materi yang pernah dipelajari pada kelas 10 yakni pada data tunggal.

2. UKURAN LETAK DATA

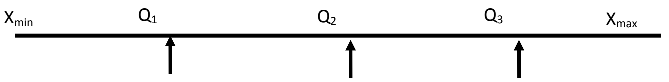
Ukuran letak data yang dimaksud dalam subbab ini adalah *kuartil, desil,* dan *persentil*. Ingat kembali materi statistik yang telah kamu pelajari di kelas X, konsep kuartil dan desil untuk data berdistribusi analog dengan yang ada pada data tunggal.

Mencoba mengkotruksi konsep kuartil melalui grafik.

a. Kuartil

Jika semua data yang telah diurutkan mulai dari data terkecil dan data terbesar, maka data tersebut dapat dibagi menjadi empat bagian. Ukuran letak yang membagi empat bagian dari sekumpulan data disebut kuartil.

Untuk lebih memahami pengertian kuartil perhatikan ilustrasi berikut.



Gambar 7.4 Letak Kuartil

Untuk menentukan Kuartil data berdistribusi, dirumuskan:

$$Q_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{4}n - F_Q\right)}{f_{Q_i}}$$

n : banyak data
k : panjang kelas
Q_i : Kuartil ke-i data, untuk i = 1,2, 3.
L_i : Tepi bawah kelas ke-i. L_i= batas bawah – 0.5.
F_q : jumlah frekuensi sebelum kuartil ke-i.
F_i : frekuensi kelas yang memuat Kuartil ke-i.

Berikan Contoh 7.1 kepada siswa, minta siswa untuk memahami penyelesaian contoh tersebut, setelah itu minta perwakilan siswa untuk menjelaskan penyelesaian

Contoh 7.1

Perhatikan tabel berikut ini dan tentukan

a. Kuartil bawah (Q_1)
b. Kuartil tengah (Q_2)
c. Kuartil atas (Q_3)

Tabel 7.6 Distribusi Frekuensi

Kelas	Frekuensi f_i
42 – 46	2
47 – 51	5
52 – 56	5
57 – 61	15
62 – 66	7
67 – 71	4
72 – 76	2

contoh itu. Jika siswa masih mengalami kesulitan sebaiknya guru memberikan contoh lain agar siswa paham dalam menerapkan prinsip tentang kuartil

Alternatif Penyelesaian

Dengan melengkapi tabel 7.6 diperoleh:

Tabel 7.7 Distribusi Frekuensi Kumulatif

Kelas	Frekuensi f_i	Frekuensi Kumulatif F
42 – 46	2	2
47 – 51	5	7
52 – 56	5	12
57 – 61	15	27
62 – 66	7	34
67 – 71	4	38
72 – 76	2	40

a. Kuartil ke-1

Kuartil bawah dapat juga disebut kuartil ke-1 (Q_1), dan untuk menentukan letak Q_1 terlebih dahulu kita mencari kelas yang memuat Q_1 yakni dengan menghitung nilai dari $\frac{1}{4}n = \frac{1}{4}(40) = 10$. Hal ini berarti Q_1 adalah data ke-10, kelas interval 52 – 56, dan f_i = 11.

Dari tabel juga diperoleh $L_l = 51{,}5$, $F_Q = 7$, $f_{Q_1} = 5$, $k = 5$.

Sehingga kuartil bawah diperoleh:

$$Q_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{4}n - F_Q\right)}{f_{Q_i}}$$

$$Q_1 = 51{,}5 + 5\frac{(10-6)}{5}$$

$$= 51{,}5 + 4$$

$$Q_1 = 55{,}5$$

Sehingga kuartil ke-1 adalah 55,5

b. Kuartil ke-2

Analog dengan mencari Q_1 maka diperoleh nilai Q_2 , yakni: $\frac{2}{4}n = \frac{1}{4}(40) = 20$. Hal ini berarti Q_2 berada pada kelas interval 57 – 61, dan $f_{Q_2} = 15$.
Dari tabel juga diperoleh $L_2 = 56{,}5$, $F_Q = 12$, $f_{Q_2} = 15$, $k = 5$.
Sehingga dapat ditentukan kuartil tengah adalah:

$$Q_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{4}n - F_Q\right)}{f_{Q_i}}$$

$$Q_2 = 56{,}5 + 5\frac{(20-12)}{15}$$

$$= 56{,}5 + 2{,}66$$

$$Q_2 = 59{,}16$$

Sehingga kuartil ke-2 adalah 59,16

c. Kuartil ke-3

Analog dengan mencari Q_1 dan Q_2 maka diperoleh nilai-nilai yang kita perlukan untuk memperoleh nilai Q_3 , yakni:

$\frac{3}{4}n = \frac{3}{4}(40) = 30$. Hal ini berarti Q_3 berada pada kelas interval 62 – 66, dan $f_{Q_3} = 7$.

Dari tabel juga diperoleh $L_I = 61{,}5$, $F_Q = 27$, $f_{Q_3} = 7$, $k = 5$.

Sehingga dapat ditentukan kuartil atas adalah:

$$Q_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{4}n - F_Q\right)}{f_{Q_i}}$$

$$Q_3 = 61{,}5 + 5\frac{(30-27)}{7}$$

$$= 61{,}5 + 2{,}14$$

$$Q_3 = 63{,}64$$

Sehingga kuartil ke-3 adalah 63,64

b. Desil

Prinsip untuk mencari desil hampir sama dengan kuartil, jika kuartil membagi data yang terurut menjadi empat bagian maka desil menjadi 10 bagian dengan ukuran data $n > 10$. Hal ini berarti sekumpulan data yang terurut memiliki 9 nilai desil, yakni D_1, D_2, D_3, ..., D_9

Untuk menentukan Desil, dirumuskan sebagai berikut:

$$D_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{10}n - F_D\right)}{f_{D_i}}$$

i = 1,2, 3, … , 9
D_i : Desil ke-i
L_i : Tepi bawah kelas yang memuat desil ke-i
F_D : jumlah frekuensi sebelum kelas desil ke-i
f_{D_i} : frekuensi kelas yang memuat desil ke-i
n : Banyak data
k : panjang kelas.

Guru menjelaskan kepada siswa bahwa materi yang akan dibahas selanjutnya adalah tentang desil, ajak siswa untuk mencoba mengkontruksi rumus desil dengan berpikir secara analogi tentang kuartil.

Berikan Contoh 7.2 ini kepada siswa untuk melatih kemampuan siswa dalam menerapkan prinsip desil. Diharapkan siswa mampu menjelaskan penyelesaian dari contoh yang diberikan.

Contoh 7.2

Dari 1.000 siswa peserta Olimpiade Matematika diperoleh data skor berupa tabel berikut.

Tabel 7.8 Skor Olimpiade Matematika

Skor	Frekuensi
0-9	5
10-19	54
20-29	215
30-39	263
40-49	223
50-59	124
60-69	72
70-79	38
80-89	5
90-99	1

Tentukanlah desil

a. Desil ke-1

b. Dan desil ke-8

Alternatif Penyelesaian

Dengan melengkapi tabel 7.8 diperoleh:

Tabel 7.9 Distribusi Frekuensi Kumulatif

Skor	Frekuensi	Frekuensi Kumulatif F
0-9	5	5
10-19	54	59
20-29	215	274
30-39	263	537
40-49	223	760
50-59	124	884
60-69	72	956

Skor	Frekuensi	Frekuensi Kumulatif *F*
70-79	38	994
80-89	5	999
90-99	1	1000

a. Desil ke-1

Untuk menentukan letak D_1 terlebih dahulu kita mencari kelas yang memuat D_1 yakni dengan menghitung nilai dari $\frac{1}{10}n = \frac{1}{10}(1000) = 100$. Hal ini berarti D_1 adalah data ke-100 yaitu, kelas interval 20 – 29, dan $f_{D_1} = 215$.

Dari tabel juga diperoleh $L_I = 19{,}5$, $F_D = 59$, $f_{D_1} = 215$, $k = 10$.

Sehingga kuartil bawah diperoleh:

$$D_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{10}n - F_D\right)}{f_{D_i}}$$

$$D_1 = 19{,}5 + 10\frac{(100-59)}{215}$$

$$= 19{,}5 + 43{,}76$$

$$D_1 = 63{,}26$$

Sehingga kuartil ke-1 adalah 63,26

b. Desil ke-8

Untuk menentukan letak D_8 terlebih dahulu kita mencari kelas yang memuat D_8 yakni dengan menghitung nilai dari $\frac{8}{10}n = \frac{8}{10}(1000) = 800$. Hal ini berarti D_8 adalah data ke-800, kelas interval 40 – 49, dan $f_{D_8} = 223$.

Dari tabel juga diperoleh L_8 = 39,5, F_D = 573, f_{D_8} = 223, k = 10.

Sehingga kuartil bawah diperoleh:

$$D_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{10}n - F_D\right)}{f_{D_i}}$$

$$D_8 = 39,5 + 10\frac{(800-573)}{223}$$

$$= 39,5 + 10,17$$

$$D_8 = 49,67$$

Sehingga kuartil ke-8 adalah 49,67

Guru menjelaskan kepada siswa bahwa untuk letak data itu ada bentuk yang lain yaitu persentil. Diharapkan siswa mampu memahami prinsip tentang persentil berdasarkan analogi berpikir tentang prinsip kuartil dan desil.

c. Persentil

Jika kuartil dan desil membagi data yang terurut menjadi empat dan sepuluh bagian maka desil menjadi 100 bagian data. Hal ini berarti sekumpulan data yang terurut memiliki 99 nilai persentil, yakni P_1, P_2, P_3, ..., P_{99}.

Untuk menentukan persentil, dirumuskan sebagai berikut:

$$P_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{100}n - F_P\right)}{f_{P_i}}$$

i = 1,2, 3, … , 9

P_i : Persentil ke-i

L_i : Tepi bawah kelas yang memuat persentil ke-i

F_P : jumlah frekuensi sebelum kelas persentil ke-i

f_{P_i} : frekuensi kelas yang memuat persentil ke-i

n : Banyak data

k : panjang kelas.

Contoh 7.3

Dengan menggunakan data pada contoh 7.2

Tentukanlah

a. persentil ke-10

b. persentil ke-99

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan tabel berikut

Tabel 7.10 Distribusi Frekuensi Kumulatif

Skor	Frekuensi	Frekuensi Kumulatif *F*
0-9	5	5
10-19	54	59
20-29	215	274
30-39	263	537
40-49	223	760
50-59	124	884
60-69	72	956
70-79	38	994
80-89	5	999
90-99	1	1.000

a. Persentil ke-10

Untuk menentukan letak P_{10} terlebih dahulu kita mencari kelas yang memuat P_{10} yakni dengan menghitung nilai dari $\frac{10}{100}n = \frac{10}{100}(1000) = 100$. Hal ini berarti P_{10} adalah data ke-100, kelas interval 20 – 29, dan $f_{P_{10}} = 215$.

Dari tabel juga diperoleh L_{10} = 19,5, F_P = 59, $f_{P_{10}}$ = 215, $k = 10$.

Berikan Contoh 7.3 kepada siswa agar siswa memahami tentang penerapan prinsip persentil dalam sebuah permasalahan yang diberikan. Diharapkan guru mampu memotivasi siswa sehingga siswa mampu memahami tentang prinsip persentil dengan baik dan benar.

Sehingga kuartil bawah diperoleh:

$$P_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{10}n - F_P\right)}{f_{P_i}}$$

$$P_{10} = 19,5 + 10\frac{(100-59)}{215}$$

$$= 19,5 + 43,76$$

$$P_{10} = 63,26$$

Sehingga persentil ke-10 adalah 63,26

b. Persentil ke-99

Untuk menentukan letak P_{99} terlebih dahulu kita mencari kelas yang memuat P_{99} yakni dengan menghitung nilai dari $\frac{99}{100}n = \frac{99}{100}(1000) = 990$. Hal ini berarti P_{99} adalah data ke-990, kelas interval 70 – 79, dan $f_{P_{99}} = 38$.

Dari tabel juga diperoleh L_{99} = 69,5, F_P = 956, $f_{P_{99}}$ = 38, k = 10.

Sehingga kuartil bawah diperoleh:

$$P_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{10}n - F_P\right)}{f_{P_i}}$$

$$P_{99} = 69,5 + 10\frac{(990-956)}{38}$$

$$= 69,5 + 8,94$$

$$P_{99} = 78,44$$

Sehingga persentil ke-99 adalah 49,67

Berdasarkan permasalahan-permasalahan dan beberapa soal yang

Dari ukuran letak data yang telah dibahas di atas tentu kita akan menemukan keterkaitan nilai ukuran satu dengan yang lainnya. Misalkan data yang dimiliki adalah sama maka akan ditemukan nilai median = $Q_2 = D_5 = P_{50}$, dan ${}_{Q1} = P_2$, dan Q_3 = P75. Cobalah membuktikannya dengan teman kelompokmu.

3. UKURAN PENYEBARAN DATA

Ukuran penyebaran data menunjukkan perbedaan data yang satu dengan data yang lain serta menunjukkan seberapa besar nilai-nilai dalam suatu data memiliki nilai yang berbeda. Adapun ukuran penyebaran data yang akan kita kaji adalah sebagai berikut.

a. Rentang Data atau Jangkauan (Range)

Masalah-7.2

Suatu seleksi perekrutan anggota Paskibra di sebuah sekolah diperoleh data tinggi badan siswa yang mendaftar adalah sebagai berikut:

Tabel 7.11 Distribusi Tinggi Badan Siswa

Tinggi badan (cm)	Banyak siswa yang mendaftar (f_i)
140-144	7
145-149	8
150-154	12
155-159	16
160-164	24
165-169	13
170-174	2

Tentukanlah rentang (range) dari data distribusi di atas!

Alternatif Penyelesaian

Range merupakan selisih antara data terbesar dengan data terkecil. Sedangkan untuk data berdistribusi, data tertinggi diambil dari nilai tengah kelas tertinggi dan data terendah diambil dari nilai kelas yang terendah, sehingga diperoleh:

Nilai tengah kelas tertinggi $= \dfrac{170+174}{2} = 172$

telah diselesaikan minta siswa untuk membuat kesimpulan tentang hubungan kuartil, desil dan persentil.

Informasikan kepada siswa bahawa materi selanjutnya yang akan dibahas adalah mengenai ukuran penyebaran data yang terdiri dari rentang, simpangan kuartil dan simpangan rata-rata.

Minta siswa untuk mengamati Masalah 7.2 Berdasarkan masalah yang diberikan minta siswa untuk menyelesaikan dengan caranya sendiri. Diharapkan dengan diselesaikannya masalah ini siswa memahami tentang prinsip rentang data, simpangan kuartil data, dan simpangan rata-rata data.

Nilai tengah kelas terendah $= \dfrac{140+144}{2} = 142$

Sehingga dari kedua hasil di atas diperoleh range untuk data berdistribusi adalah:

Rentang (R) $= 172 - 142$

$= 30$

b. Rentang Antar Kuartil (Simpangan Kuartil)

Dengan pemahaman yang sama yakni rentang merupakan selisih data terbesar dengan data terkecil, maka rentang antar kuartil dirumuskan dengan selisih kuartil terbesar dengan kuartil terkecil yakni kuartil atas (Q_3) dengan kuartil bawah (Q_1), maka dapat dituliskan dengan: simpangan kuartil $= Q_3 - Q_1$

Dengan menggunakan hasil pada contoh 7.1 maka dapat kita peroleh rentang antar kuartil data tersebut adalah:

Simpangan kuartil $= 63, 4 - 55, 5$

$= 7,9$

c. Simpangan Rata-Rata

Andaikan kita memiliki data $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ maka dengan konsep nilai rentang data kita dapat menentukan rentang nilai rata-rata atau simpangan rata-rata sehingga diperoleh urutan data yang baru yaitu:

$$\left(x_1 - \bar{x}\right), \left(x_2 - \bar{x}\right), \left(x_3 - \bar{x}\right), \ldots, \left(x_n - \bar{x}\right)$$

Dalam urutan data di atas mungkin ada yang positif dan negatif namun konsep jarak atau rentang tidak membedakan keduanya, untuk itu diambil harga mutlak sehingga diperoleh:

$$\left|x_1 - \bar{x}\right|, \left|x_2 - \bar{x}\right|, \left|x_3 - \bar{x}\right|, \ldots, \left|x_n - \bar{x}\right|$$

Dan jika urutan nilai data tersebut dijumlahkan kemudian dibagi dengan banyak data (n) maka akan diperoleh simpangan rata-rata sebagai berikut:

$$S_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Melatih pemahaman siswa melalui contoh penentuan nilai desil.

dengan :

S_R = Simpangan rata-rata

x_i = nilai data ke-i

$\bar{x}$ = nilai rata-rata

n = banyak data

Formula di atas merupakan simpangan rata-rata untuk data tunggal. Data berdistribusi memiliki nilai frekuensi dalam tiap kelompok atau interval data dan nilai data pengamatan merupakan nilai tengah kelas sehingga untuk data berdistribusi diperoleh simpangan rata-rata yang dituliskan sebagai berikut:

$$S_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

dengan :

S_R = Simpangan rata-rata

x_i = nilai tengah kelas ke $-i$

$\bar{x}$ = nilai rata-rata

f_i = frekuensi kelas ke $-i$

Contoh 7.4

Dengan menggunakan pembahasan masalah 7.3 diperoleh tabel distribusi sebagai berikut:

Tabel 7.12 Distribusi Frekuensi

Kelas	Frekuensi
38 - 46	1
47 - 55	5
56 - 64	7

Berikan Contoh 7.4 ini kepada siswa untuk melatih kemampuan siswa dalam menggunakan prinsip simpangan rata-rata dari data yang diberikan.

Kelas	Frekuensi
65 - 73	12
74 - 82	25
83 - 91	22
92 - 100	8
	80

dan rata-rata = 77.21. Tentukanlah simpangan rata-rata dari data di atas!

Alternatif Penyelesaian

Dengan melengkapi tabel 7.12 agar dapat diperoleh nilai-nilai yang diperlukan, sehingga diperoleh tabel yang baru seperti berikut ini:

Tabel 7.13 Distribusi Frekuensi

Kelas	Frekuensi (f_i)	Titik Tengah (x_i)	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
38 - 46	1	42	35.21	35,21
47 - 55	5	51	26.21	131,05
56 - 64	7	60	17.21	120,47
65 - 73	12	69	8.21	98,52
74 - 82	25	78	0.79	19,75
83 - 91	22	87	9.79	215,38
92 - 100	8	96	18.79	150,32
	$f_i = 80$			$\Sigma f_i \mid x_i - \mid = 639.65$

Sehingga dari nilai-nilai yang diperoleh pada tabel di atas diperoleh:

$$S_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left| x_i - \bar{x} \right|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{639.65}{80} = 7{,}99$$

Jadi, simpangan rata-rata data di atas adalah 7,99

d. Ragam dan Simpangan Baku

Penentuan nilai simpangan rata-rata memiliki kelemahan karena menggunakan harga mutlak yang berakibat simpangan rata-rata tidak dapat membedakan antara rentang yang lebih besar dan lebih kecil. Untuk mengatasi kelemahan tersebut ahli statistik menggunakan simpangan baku yang menggunakan kuadrat pada rentang datanya, simpangan baku dirumuskan sebagai berikut:

$$S_B = \sqrt{\frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{r} f_i . \left(x_i - \bar{x} \right)^2}$$

Ragam, atau sering disebut varian merupakan kuadrat dari nilai simpangan baku, data berdistribusi dirumuskan sebagai berikut:

$$S_B^2 = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{r} f_i . \left(x_i - \bar{x} \right)^2$$

dengan:

S_B : Simpangan baku
S_B^2 : Ragam/varian.
f_i : frekuensi kelas ke-i.
x_i : titik tengah interval ke-i.
$\bar{x}$: rata-rata.
n : ukuran data.

Contoh 7.5

Masih dengan menggunakan pembahasan masalah 7.3 diperoleh tabel distribusi sebagai berikut:

Kelas	Frekuensi (f_i)	Titik Tengah (x_i)	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f(x_i - \bar{x})^2$
38 - 46	1	42	-35.21	1239.74	1239.744
47 - 55	5	51	-26.21	686.96	3434.821
56 - 64	7	60	-17.21	296.18	2073.289
65 - 73	12	69	-8.21	67.40	808.8492
74 - 82	25	78	0.79	0.62	15.6025
83 - 91	22	87	9.79	95.84	2108.57
92 - 100	8	96	18.79	353.06	2824.513
	Σ f_i =80				**Σ f_i I x_i - I=12505.38**

Berikan Contoh 7.5 ini kepada siswa untuk melatih kemampuan siswa dalam menggunakan prinsip simpangan baku dan varians data yang diberikan.

Sehingga dari nilai-nilai yang diperoleh pada tabel di atas diperoleh:

- Simpangan baku

$$S_B = \sqrt{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{r} f_i.\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

$$S_B = \sqrt{\frac{1}{80}.12505.39} = 12.5$$

- Ragam atau varian

$$S_B^2 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{r} f_i.\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

Untuk semua jenis ukuran penyebaran data ini, tentunya tidaklah sesuatu hal yang sulit untuk menentukan nilainya. Namun, yang penting dari semua adalah memahami makna setiap angka statistik yang diperoleh.

Uji Kompetensi 7

1. Perhatikan tabel penjualan 4 jenis mainan anak-anak pada sebuah toko pada periode 5 minggu berturut-turut.

Minggu	**Mainan 1**	**Mainan 2**	**Mainan 3**	**Mainan 4**
1	50	48	64	51
2	52	55	34	53
3	35	52	43	32
4	20	12	30	30
5	15	20	25	28
Jumlah	172	187	196	194

Dari tabel diatas,

- Gambarkan diagram batang, garis, serta lingkaran pada masing-masing jenis mainan dalam 5 minggu.
- Tentukanlah semua ukuran yang terdapat pada data tersebut!

Uji kompetensi ini diberikan kepada siswa sebagai alat ukur untuk mengetahui apakah siswa memiliki kemampuan dalam materi statistic yang terkait dengan ukuran pemusatan dan penyebaran data.

2. Tentulah nilai mean, median, dan modus pada data penghasilan orang tua siswa di suatu yayasan sekolah swasta berikut ini.

Pengahasilan tiap bulan (Rp)	**Banyak orang tua**
1.000.000 – 2.000.000	300
2.000.000 – 3.000.000	590
3.000.000 – 4.000.000	750
4.000.000 – 5.000.000	150
5.000.000 – 10.000.000	70
> 10.000.000	40

3. Suatu pertandingan karate mewajibkan setiap team yang akan masuk babak final harus memperoleh poin rata-rata 205 pada empat kali pertandingan. Pada babak semifinal diperoleh 3 tim dengan data sebagai berikut.

Tim	Nilai Setiap Pertandingan			
	1	2	3	4
I	210	195	200	x
II	200	200	195	x
III	205	198	218	x

Tentukanlah tim yang akan lolos pada babak final jika tim tersebut memperoleh nilai 215 pada pertandingan keempat.

4. Tentukalah nilai a dan b dari tabel distrubusi frekuensi dibawah ini, jika median adalah 413,11 dan $\sum f = 1000$

Nilai	Frekuensi
200 - 234	80
235 - 249	9
250 - 274	17
275 - 299	a
300 - 324	88
325 - 349	b
350 - 374	326
475 - 499	5

5. Data berikut mempunyai modus 162.

Nilai	Frekuensi
140-149	3
150-159	8
160-169	x
170-179	2

Tentukanlah :
a. Nilai x
b. Mean
c. Modus

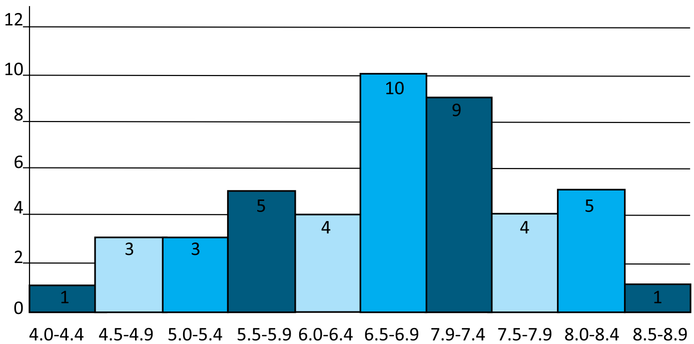
6. Gaji karyawan suatu pabrik ditampilkan dalam tabel berikut.

Gaji (×Rp 10.000)	Frekuensi
66-70	3
71-75	12
76-80	x
81-85	36
86-90	24
91-95	y
96-100	9

a. Tentukan rata-rata gaji jika setiap data mendapat tambahan sebesar Rp50.000,00.
b. Jika modus data di atas adalah Rp830.000,00, dan banyak data 120, tentukanlah nilai $x - y$.

7. Dengan menggunakan tabel yang lengkap pada soal no.5, tentukan:
   a. Kuartil ke-1
   b. Kuartil ke-2
   c. Kuartil ke-3

8. Dari grafik histogram di bawah ini, bentuklah tabel frekuensi realatif dan tentukan seluruh ukuran pemusatan data.



9. Dari tabel data di bawah ini tentukanlah :
a. Simpangan kuartil
b. Simpangan rata-rata
c. Simpangan baku

Nilai	Frekuensi
40-44	5
45-49	8
50-54	7
55-59	4
60-64	4
65-69	3
70-74	2
75-80	1

10. Suatu penelitian terhadap dua merek baterai mendapatkan hasil pengukuran daya tahan pemakaian yang ditampilkan pada data berikut ini.

Nilai statitik	Jenis 1	Jenis 2
Banyak sampel	100	80
Rentang	240	120
Kuartil bawah	468	488
Kuartil atas	533	562
Simpangan baku	40	20
Simpangan kuartil	65	74
Rata-rata	500	600
Median	500	500

Berdasarkan data penelitian di atas jelaskan merek baterai mana yang memiliki ukuran penyebaran yang besar!

Projek

Kumpulkanlah data-data perkembangan ekonomi yang ada di Indonesia, misal data pergerakan nilai tukar rupiah terhadap mata uang asing (dolar, ringgit, dll). Tabulasi dan gambarkan data tersebut kedalam diagram. Analisislah data tersebut dalam bentuk statistik deskriptif serta presentasikan di depan kelas.

Berikan tugas projek ini kepada siswa dan berikan batasan waktu tertentu untuk menyelesaikannya. Buat tugas projek ini dalam bentuk kelompok dan pada waktu yang telah ditetapkan minta tiap kelompok siswa mempresentasikannya di kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan materi yang telah kita uraikan di atas, beberapa konsep perlu kita rangkum guna untuk mengingatkan kamu kembali akan konsep yang nantinnya sangat berguna bagi kamu sebagai berikut.

1. Jangkauan Data = Data tertinggi – Data terendah = $x_{maks} - x_{min}$.
2. Statistik yang membagi data menjadi empat bagian disebut Kuartil.
3. Statistik terurut memiliki kuartil jika banyak data ≥ 4, sebab kuartil Q_1 dan Q_2 membagi data menjadi empat kelompok yang sama.
4. Statistik yang membagi data menjadi 10 bagian disebut Desil.
5. Jika banyak data ≥ 10, maka kita dapat membagi data menjadi 10 kelompok yang sama, dengan setiap kelompok memiliki $\frac{1}{10}$ data. Ukuran statistik ini disebut *Desil*.

Bagian penutup ini merupakan rangkuman materi statistika yang dibahas dalam bab ini. Adapun rangkuman ini bertujuan untuk mengingatkan siswa kembali tentang konsep dan prinsip ukuran pemusatan dan penyebaran data.

6. Mean untuk data berkelompok didefinisikan dengan $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}=\dfrac{f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\ldots+f_kx_k}{f_1+f_2+f_3+\ldots+f_k}$ dengan f_i = frekuensi kelas ke-*i*; x_i = nilai tengah kelas ke-*i*.
7. Mean untuk data berkelompok dengan rumusan rataan sementara didefinisikan dengan $\bar{x}=x_s+\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$ dengan f_i = frekuensi kelas ke-*i*; x_i = nilai tengah kelas ke-*i*.
8. Modus untuk data berkelompok didefinisikan dengan $M_o=t_b+k\left[\dfrac{d_1}{d_1+d_2}\right]$ dengan t_b = tepi bawah kelas modus; k = panjang kelas; d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya; d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya.
9. Median untuk data berkelompok didefinisikan dengan

   Median = $t_b+k\left[\dfrac{\frac{n}{2}-F}{f_m}\right]$

   Dengan t_b = tepi bawah kelas median; k = panjang kelas; N = banyak data dari statistik terurut = $\sum f_i$; F = frekuensi kumulatif tepat sebelum kelas median; f_m = frekuensi kelas median.

10. Simpangan rata-rata untuk data berkelompok didefinisikan dengan:

$$S_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left| x_i - \bar{x} \right|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

11. Simpangan baku dan varian untuk data berkelompok di-definisikan dengan:

- $S_B = \sqrt{\frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{r} f_i . \left(x_i - \bar{x} \right)^2}$
- $S_B^2 = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{r} f_i . \left(x_i - \bar{x} \right)^2$

Catatan:

Bab 8

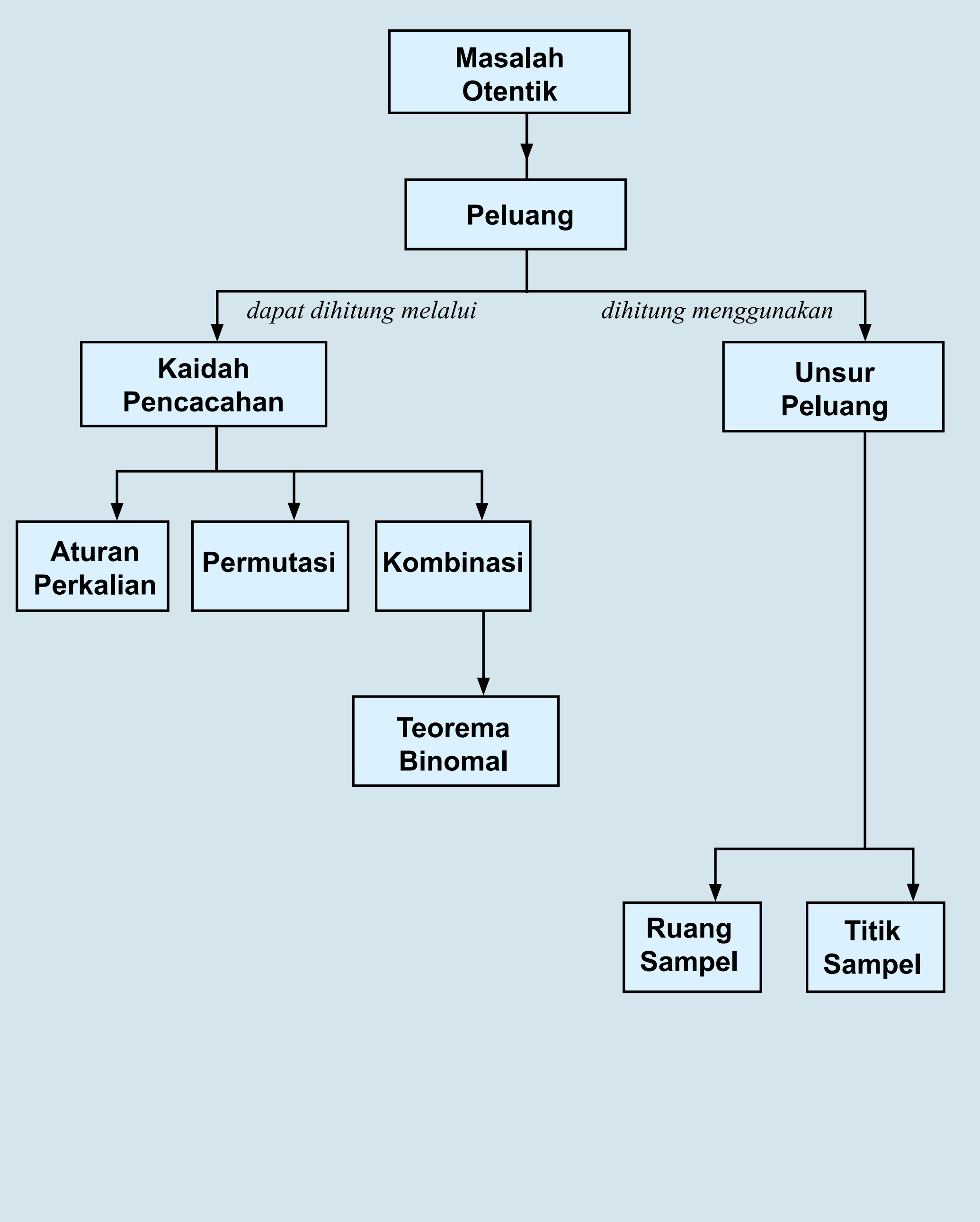
ATURAN PENCACAHAN

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Mendeskripsikan dan menerapkan berbagai aturan pencacahan melalui beberapa contoh nyata serta menyajikan alur perumusan aturan pencacahan (perkalian, permutasi dan kombinasi) melalui diagram atau cara lainnya. 3. Menerapkan berbagai konsep dan prinsip permutasi dan kombinasi dalam pemecahan masalah nyata. 4. Mendeskripsikan konsep ruang sampel dan menentukan peluang suatu kejadian dalam suatu percobaan. 5. Mendeskripsikan dan menerapkan aturan/ rumus peluang dalam memprediksi terjadinya suatu kejadian dunia nyata serta menjelaskan alasan-alasannya. 6. Mendeskripsikan konsep peluang dan harapan suatu kejadian dan menggunakannya dalam pemecahan masalah.	Melalui pembelajaran materi aturan pencacahan, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Berdiskusi, bertanya dalam menemukan konsep dan prinsip aturan pencacahan melalui pemecahan masalah otentik yang bersumber dari fakta dan lingkungan. • Berkolaborasi memecahkan masalah autentik dengan pola interaksi edukatif. .• Berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki, memanipulasi, dan mengaplikasikan konsep dan prinsip-prinsip aturan pencacahan dalam memecahkan masalah otentik. **Istilah Penting** • *Pencacahan* • *Permutasi* • *Kombinasi* • *Kejadian* • *Ruang Sampel* • *Titik Sampel* • *Peluang*

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran turunan siswa mampu: 7. Memilih dan menggunakan aturan pencacahan yang sesuai dalam pemecahan masalah nyata serta memberikan alasannya. 8. Mengidentifikasi masalah nyata dan menerapkan aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi dalam pemecahan masalah tersebut. 9. Mengidentifikasi, menyajikan model matematika dan menentukan Peluang dan harapan suatu kejadian dari masalah kontektual.	Melalui pembelajaran materi aturan pencacahan, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Berdiskusi, bertanya dalam menemukan konsep dan prinsip aturan pencacahan melalui pemecahan masalah otentik yang bersumber dari fakta dan lingkungan. • Berkolaborasi memecahkan masalah autentik dengan pola interaksi edukatif. .• Berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki, memanipulasi, dan mengaplikasikan konsep dan prinsip-prinsip aturan pencacahan dalam memecahkan masalah otentik.

B. PETA KONSEP



Guru memberitahukan informasi dan kompetensi yang akan dicapai dalam pembelajaran. Berikan beberapa ilustrasi terkait materi pencacahan.

C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Pencacahan (Perkalian, Permutasi, dan Kombinasi)

a. Aturan Perkalian

Setiap orang pasti pernah dihadapkan dalam permasalahan memilih atau mengambil keputusan. Misalnya: setelah tamat sekolah akan memilih program studi dan di perguruan tinggi yang mana? Ketika berangkat ke sekolah memilih jalur yang mana. Dalam matematika kita dibantu untuk menentukan banyak pilihan yang akan diambil. Untuk lebih memahami cermati masalah dan kegiatan berikut.

Minta siswa untuk memahami Masalah 8.1. Setelah itu minta siswa untuk mencoba menyelesaikannya dengan caranya sendiri.

Masalah-8.1

Beni, seorang siswa Jurusan IPA lulusan dari SMA Negeri 1 Tarutung Tahun 2013 ingin menjadi mahasiswa di salah satu perguruan tinggi negeri (PTN) yang ada di pulau Sumatera pada Tahun 2013. Ayah Beni menyetujui cita-cita Beni asalkan kuliah di Medan. Di Medan terdapat PTN dan juga memiliki jurusan yang digemari dan yang dipilih oleh Beni, yaitu Biologi atau Pendidikan Biologi. Panitia SNMPTN memberikan kesempatan kepada calon mahasiswa untuk memilih maksimum tiga jurusan di PTN yang ada di Indonesia.
Bantulah Beni untuk mengetahui semua kemungkinan pilihan pada saat mengikuti SNMPTN tahun 2013?

Penyelesaian dari masalah ini adalah untuk membentuk prinsip aturan pencacahan yang melibatkan aturan perkalian.

Alternatif Penyelesaian

Untuk mengetahui semua pilihan yang mungkin, kita harus mengetahui apakah semua PTN di Medan memiliki Jurusan Biologi atau Jurusan Pendidikan Biologi. Ternyata, hanya USU dan Unimed saja yang memiliki pilihan Beni tersebut. USU hanya memiliki Jurusan Biologi, tetapi Unimed memiliki Jurusan Biologi dan Jurusan Pendidikan Biologi.

Sesuai aturan panitia SNMPTN, Beni diberi kesempatan memilih maksimal 3 dan minimal 1 jurusan.

Mari kita uraikan pilihan-pilihan yang mungkin.

Untuk 3 Pilihan

1. Seandainya Beni memilih 3 pilihan tersebut di satu kota, maka pilihannya adalah:

   Pilihan 1: Biologi USU
   Pilihan 2: Pend. Biologi UNIMED
   Pilihan 3: Biologi UNIMED

Untuk 2 Pilihan

1. Beni hanya boleh memilih 2 jurusan di UNIMED, yaitu:

   Pilihan 1: Pend. Biologi UNIMED

   Pilihan 2: Biologi UNIMED

2. Beni juga memilih 1 jurusan di USU dan 1 di UNIMED, yaitu:

   Pilihan 1: Biologi USU

   Pilihan 2: Pend. Biologi UNIMED

   Atau

   Pilihan 1: Biologi USU

   Pilihan 2: Biologi UNIMED

Ingat!!!!

Ada strategi memilih jurusan.

Untuk 1 Pilihan

1. Beni boleh hanya memilih Biologi USU.
2. Beni boleh hanya memilih Pend. Biologi UNIMED
3. Beni boleh hanya memilih Biologi UNIMED

Jadi, banyak cara memilih yang mungkin yang dimiliki Beni sebanyak 7 cara.

- Menurut kamu, seandainya tidak ada strategi memilih jurusan, berapa cara yang dimiliki Beni?
- Coba kamu pikirkan, bagaimana pola rumusan untuk menghitung banyak cara yang mungkin untuk Masalah 8.1.

Guru memberi penjelasan kepada siswa bagaimana startegi memilih jurusan pada saat mengikuti SNMPTN. Tanyakan kepada siswa beberapa *kemungkinan berapa cara Beni memilih tidak ada strategi memilih jurusan.*

Selanjutnya ajak siswa bersama-sama untuk merumuskan pola yang digunakan untuk menentukan banyaknya cara yang mungkin. Harapan jawaban siswa seperti yang tersaji di .samping ini

Alternatif Penyelesaian

Tidak ada strategi memilih jurusan berarti peserta SNMPTN bebas memilih jurusan, mungkin satu, dua, atau tiga jurusan.

i. Jika peserta SNMPTN memilih 1 jurusan, maka terdapat: 3 cara.

ii. Jika peserta SNMPTN memilih 2 jurusan, maka banyak cara memilih dihitung melalui:

(Pilihan 1) × 3 + (Pilihan 2) × 2 = 6 pilihan.

iii. Jika peserta SNMPTN memilih tiga jurusan, maka banyak cara memilih dihitung melalui:

(Pilihan 1) × 3 + (Pilihan 2) × 2 +(Pilihan 3) × 1 = 6 pilihan

Secara umum, jika terdapat n jurusan yang dapat dipilih dan hanya terdapat 3 pilihan, maka banyak cara memilih dihitung dengan aturan:

(Pilihan 1) × n + (Pilihan 2) × $(n - 1)$ + (Pilihan 3) × $(n - 2)$ = $n \times (n - 1) \times (n - 2)$ pilihan

Memotivasi siswa dengan melibatkan lingkungan nyatanya yaitu tentang pengurus osis.

Pernahkah kamu mengikuti pemilihan pengurus OSIS di sekolahmu?

Mari kita cermati contoh berikut, sebagai masukan jika suatu saat kamu menjadi panitia pemilihan pengurus OSIS di sekolahmu.

Sebagai penerapan atas rumusan pola yang sudah ditemukan pada Masalah 8.1 minta siswa memahami Contoh 8.1, selanjutnya minta perwakilan dari siswa untuk menjelaskannya di depan kelas.

Contoh 8.1

Pada pemilihan pengurus OSIS terpilih tiga kandidat yakni Abdul, Beny, dan Cindi yang akan dipilih menjadi ketua, sekretaris, dan bendahara. Aturan pemilihan adalah setiap orang hanya boleh dipilih untuk satu jabatan. Berapakah kemungkinan cara untuk memilih dari tiga orang menjadi pengurus OSIS?

Alternatif Penyelesaian

Ada beberapa metode untuk menghitung banyak cara dalam pemilihan tersebut.

Jawaban yang diharapkan dari siswa adalah siswa tahu cara untuk menjawabnya yaitu dengan menggunakan cara mendaftar dan cara diagram.

i. Cara Mendaftar

Mari kita coba untuk memilih tiap-tiap jabatan, yaitu:

a. Jabatan ketua OSIS

Untuk jabatan ketua dapat dipilih dari ketiga kandidat yang ditunjuk yakni Abdul (A), Beny (B), dan Cindi (C) sehingga untuk posisi ketua dapat dipilih dengan 3 cara.

b. Jabatan sekretaris OSIS

Karena posisi ketua sudah terisi oleh satu kandidat maka posisi sekretaris hanya dapat dipilih dari 2 kandidat yang tersisa.

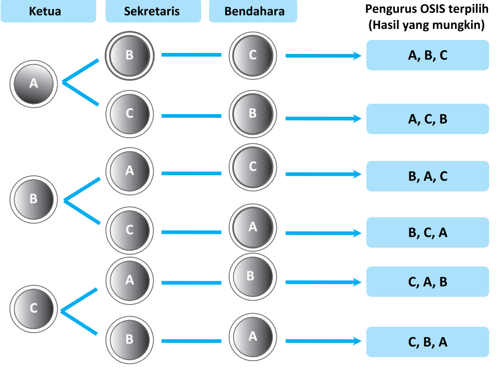
c. Jabatan bendahara OSIS

Karena posisi ketua dan sekretaris sudah terisi maka posisi bendahara hanya ada satu kandidat.

Dari uraian di atas banyak cara yang dapat dilakukan untuk memilih tiga kandidat untuk menjadi pengurus OSIS adalah $3 \times 2 \times 1 = 6$ cara.

iI. Cara Diagram

Untuk dapat lebih memahami uraian di atas perhatikan diagram berikut.



Gambar 8.1 Diagram Pohon Pemilihan Ketua OSIS

Berikan kemungkinan seperti peristiwa di samping, minta siswa untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Diharapkan jawaban dari siswa adalah seperti yang tersaji di samping berikut.

- Misalnya, Abdul merupakan siswa kelas X, Beny dan Cindy dari Kelas XI. Berapa banyak cara memilih pengurus OSIS jika Bendahara OSIS merupakan siswa dari kelas XI.

Biasanya di kota-kota besar terdapat banyak jalur alternatif menuju suatu tempat dan jalur ini diperlukan para pengendara untuk menghindari macet atau mengurangi lama waktu perjalanan. Contoh berikut mengajak kita mempelajari banyak cara memilih jalur dari suatu kota ke kota lain.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan, posisi ketua, sekretaris, dan bendahara diilustrasikan sebagai berikut:

Ketua	Sekretaris	Bendahara	
↓	↓	↓	
1 kemungkinan	2 kemungkinan	2 kemungkinan →	1×2×2 = 4 cara

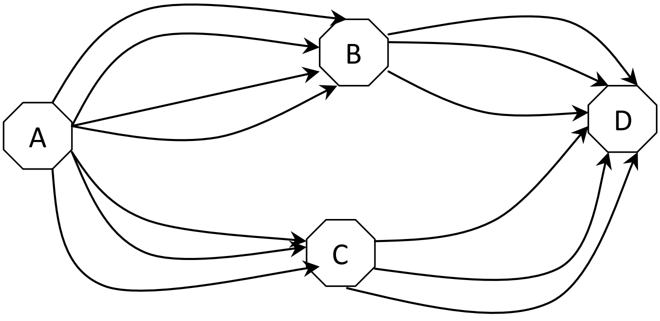
Informasikan kepada siswa bahwa kejadian yang ada di lingkungan sekitar juga sangat banyak yang terkait dengan prinsip aturan pencacahan seperti menentukan alternatif jalur perjalanan untuk menghemat waktu. Informasikan juga kejadian-kejadian yang mungkin dijumpai di kehidupan sehari-hari. Minta siswa untuk memahami Contoh 8.2. Pastikan siswa

Biasanya di kota-kota besar terdapat banyak jalur alternatif menuju suatu tempat dan jalur ini diperlukan para pengendara untuk menghindari macet atau mengurangi lama waktu perjalanan. Contoh berikut mengajak kita mempelajari banyak cara memilih jalur dari suatu kota ke kota lain.

Contoh 8.2

Dari Kota A menuju Ibukota D dapat melalui beberapa jalur pada gambar 8.1.

Berapa banyak kemungkinan jalur yang dapat dilalui dari Kota A ke Kota D?



Gambar 8.2 Jalur dari Kota A ke Kota D

memahami tentang soal yang diberikan. Contoh ini bertujuan untuk menunjukkan kebergunaan dari prinsip tentang aturan pencacahan yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari.

Alternatif Penyelesaian

- Perhatikan jalur dari kota A ke kota D melalui kota B

  Dari kota A ke kota B terdapat 4 jalur yang dapat dilalui, sedangkan dari kota B terdapat 3 jalur yang dapat dilalui menuju kota D.

  Jadi banyak cara memilih jalur dari kota A menuju kota D melalui kota B adalah $4 \times 3 = 12$ cara.
- Perhatikan jalur dari kota A ke kota D melalui kota C

  Terdapat 3 jalur dari kota A menuju kota C dan 3 jalur dari kota C menuju kota D.

  Jadi banyak cara memilih jalur dari kota A menuju kota D melalui kota B adalah $3 \times 3 = 9$ cara.

Jadi banyak jalur yang dapat dilalui melalui Kota A sampai ke Kota D adalah $12 + 9 = 21$ cara.

♦ Seandainya ada satu jalur yang menghubungkan kota B dan kota C, berapa banyak jalur yang dapat dipilih dari kota A menuju kota D?

Berikan pertanyaan bagaimana jika ada satu jalur yang menghubungkan kota B ke kota C dan menentukan banyak jalur dari kota A ke kota D.

Alternatif Penyelesaian

Banyak jalur dari kota A ke kota B = 4 jalur, banyak jalur dari kota B ke kota D = 3 jalur.

Jika kota B terhubung dengan kota C (1 jalur), dan banyak jalur dari kota C ke kota D = 3 jalur, maka banyak jalur dari kota A ke kota D melalui kota B kemudian kota C adalah:

$(4 \times 1 \times 3) + (4 \times 3) = 24$ cara.

Jika dari kota A ke kota D memilih jalur C, maka banyak pilihan jalur adalah:

$(3 \times 1 \times 3) + (3 \times 3) = 18$ cara.

Jadi banyak pilihan jalur dari kota A ke kota D adalah sebanyak 42 jalur.

Minta siswa untuk melakukan Kegiatan 8.1. Tujuan Kegiatan ini adalah ingin membangun prinsip tentang kaidah pencacahan yang terkait dengan prinsip kombinasi.

Diharapakan siswa dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan yang diberikan setelah siswa selesai melakukan kegiatan tersebut.

Kegiatan 8.1

Catatlah baju, celana, dan sepatumu berdasarkan warna, kemudian isilah dalam bentuk tabel berikut ini:

Tabel 8.1 Tabel Daftar Warna Pakaian

Baju	Celana	Sepatu
Putih	Hitam	Coklat
Merah	Abu-abu	Hitam
Biru	Coklat	Putih
⋮	⋮	⋮

Salin dan lengkapi tabel di atas kemudian perhatikan data yang diperoleh dan cobalah menjawab pertanyaan berikut:

1. Jika diasumsikan setiap warna dapat dipasangkan, berapa banyak kemungkinan warna baju dan warna celana yang dapat dipasangkan?
2. Berapakah banyak kemungkinan pakaian lengkap yakni baju, celana, dan sepatu kamu yang dapat dipasangkan?

Alternatif Penyelesaian

1. Jika diasumsikan setiap warna pada baju, celana dan sepatu dapat dipasangkan maka dapat ditentukan kemungkinan pasangan yang dihasilkan; yakni:

   Banyak warna baju × banyak warna celana = Banyak pasangan warna baju dan celana.

2. Banyak pemasangan baju, celana, dan sepatu untuk tabel di atas adalah:

   Banyak warna baju × Banyak warna celana × Banyak warna sepatu = Banyak kombinasi warna pakaian.

Dalam dunia kerja seorang pemimpin atau karyawan juga pernah dihadapkan dengan bagaimana memilih cara untuk menyusun unsur atau memilih staff. Masalah berikut ini, mengajak kita untuk memahami bagaimana cara kerja pada suatu supermarket.

Masalah-8.2

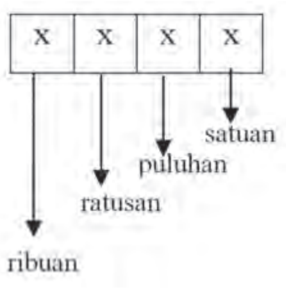
Seorang manajer supermarket ingin menyusun barang berdasarkan nomor seri barang. Dia ingin menyusun nomor seri yang dimulai dari nomor 3000 sampai dengan 8000 dan tidak memuat angka yang sama. Tentukan banyak nomor seri yang disusun dari angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Minta siswa untuk memahami Masalah 8.2 yaitu tentang cara menyusun barang jika barang tersebut memiliki nomor seri. Penyelesaian masalah ini diharapkan siswa memahami proses aturan perkalian yang ingin dibentuk.

Alternatif Penyelesaian

Mari kita uraikan permasalahan di atas.

- Setiap bilangan yang berada diantara 3000 dan 8000 pastilah memiliki banyak angka yang sama yakni 4 angka jika ditampilkan dalam bentuk kolom menjadi:



- Perhatikan untuk mengisi ribuan hanya dapat diisi angka 3, 4, 5, 6, 7. Artinya terdapat 5 cara mengisi ribuan.

- Untuk mengisi ratusan dapat diisi angka 1 sampai 8 tetapi hanya ada 7 yang mungkin (mengapa?).
- Untuk mengisi puluhan dapat diisi angka 1 sampai 8 tetapi hanya ada 6 angka yang mungkin (mengapa?).
- Untuk mengisi satuan dapat diisi angka 1 sampai 8 tetapi hanya ada 5 angka yang mungkin (mengapa?).

Dengan demikan, banyak angka yang dapat mengisi keempat posisi tersebut adalah sebagai berikut:

5	7	6	5

Banyak susunan nomor seri barang yang diperoleh adalah:

$5 \times 7 \times 6 \times 5 = 1.050$ cara.

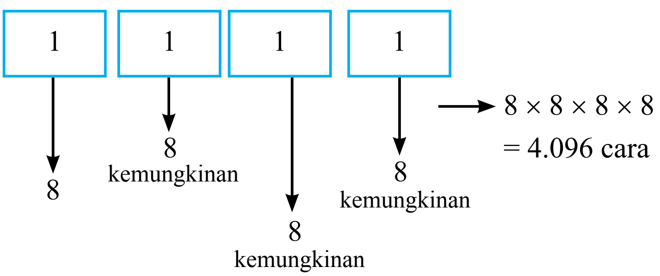
Berikan pertanyaan berikut ini untuk melatih siswa dalam menerapkan prinsip yang ditemukan pada penyelesaian Masalah 8.2. Alternatif jawaban diberikan di samping sebagai berikkut.

Berkaitan dengan Masalah 8.2,

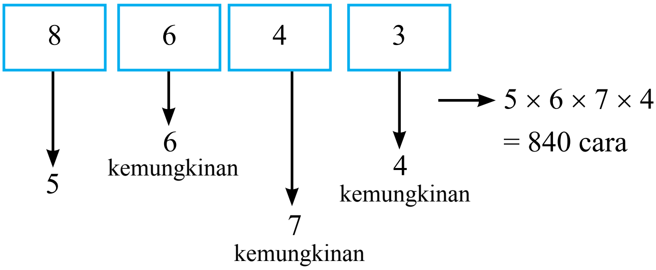
- Hitunglah banyak cara menyusun nomor seri barang, jika angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 diperbolehkan berulang.
- Seandainya manager supermarket tersebut ingin menyusun nomor seri barang adalah bilangan-bilangan ganjil yang terdiri dari 5 angka. Berapa cara menyusun nomor seri tersebut.

Alternatif Penyelesaian

1. Karena nomor seri barang terdiri dari 4 angka, dan boleh berulang maka susunan nomor seri barang hitung dengan aturan:



Jika nomor seri barang tersebut merupakan bilangan ganjil maka susunan nomor seri barang tersebut dihitung dengan aturan:



Dari pembahasan masalah, contoh dan kegiatan di atas, dapat kita simpulkan dalam aturan perkalian berikut ini.

Aturan Perkalian :

Jika terdapat k unsur yang tersedia, dengan:

n_1 = banyak cara untuk menyusun unsur pertama

= banyak cara untuk menyusun unsur kedua setelah unsur pertama tersusun

n_3 = banyak cara untuk menyusun unsur ketiga setelah unsur kedua tersusun

:

n_k = banyak cara untuk menyusun unsur ke- k setelah objek- unsur sebelumnya tersusun

Maka banyak cara untuk menyusun k unsur yang tersedia adalah:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k.$$

Bersama-sama dengan siswa menarik kesimpulan tentang aturan perkalian. Ajak siswa untuk mengumpulkan informasi berdasarkan permasalahan-permasalahan dan contoh-contoh soal yang diberikan selanjutnya dapat ditarik kesimpulan.

- Dari pembahasan masalah, contoh dan kegiatan di atas, dapat kita simpulkan dalam aturan perkalian berikut ini.

Matematika merupakan bahasa simbol. Oleh karena itu, penulisan aturan perkalian di atas dapat disederhanakan dengan menggunakan faktorial.

Motivasi siswa dan minta siswa untuk memahami aturan perkalian di atas,dan minta siswa untuk menyebutkan kira-kira dalam kehidupan sehari-hari hal apa saja yang dapat digunakan aturan perkalian.

Mari kita pelajari dengan teliti materi berikut.

Guru menjelaskan kepada siswa bahwa materi selanjutnya adalah mengenai Faktorial. Berikan beberapa contoh tentang faktorial, lalu minta siswa mendefinisikan konsep faktorial.

b. Faktorial

Pada pembahasan di atas kamu telah melakukan perkalian $3 \times 2 \times 1 = 6$.

Coba anda lakukan perkalian berikut:

1) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = ...$
2) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = ...$
3) $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = ...$

Perkalian-perkalian semua bilangan bulat positif berurut di atas dalam matematika disebut faktorial, yang biasa disimbolkan dengan "!"

Maka perkalian tersebut dapat dituliskan ulang menjadi:

1) $3 \times 2 \times 1 = 3!$
2) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$
3) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7!$
4) $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 9!$

Secara umum faktorial dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 8.1

a) Jika n bilangan asli maka $n!$ (dibaca "n faktorial") didefinisikan dengan:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$$

atau

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-3) \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

b) $0! = 1$

Berikan beberapa contoh tentang faktorial agar siswa memahami apa yang dimaksud dengan faktorial.

Contoh 8.3

1. Hitunglah:

a. $7! + 4!$ b. $7! \times 4!$ c. $\dfrac{7!}{4!}$

Alternatif Penyelesaian

a. $7! + 4! = (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) + (4 \times 3 \times 2 \times 1)$

$= 5.040 + 24 = 5.064$

b. $7! \times 4! = (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) + (4 \times 3 \times 2 \times 1)$

$= 5.040 \times 24 = 120.960$

c. $\dfrac{7!}{4!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$

2. Nyatakan bentuk-bentuk berikut dalam bentuk faktorial.
   a. 7×6
   b. $(6!) \times 7 \times 8$
   c. $n \times (n - 1) \times (n - 3)$

Alternatif Penyelesaian

a. $7 \times 6 = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$= \dfrac{7!}{5!}$

Maka dapat dituliskan bahwa $7 \times 6 = \dfrac{7!}{5!}$.

b. $(6!) \times 7 \times 8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8!$

c. Kerjakan secara mandiri

3. Diketahui $\dfrac{14.(n-1)!.(n-4)!}{5.n!.(n-5)!} = \dfrac{4!}{120}$, tentukanlah nilai n, dengan n bilangan asli.

Alternatif Penyelesaian

$$\frac{14.(n-1)!.(n-4)!}{5.n!.(n-5)!} = \frac{4!}{120} \Leftrightarrow \frac{14.(n-1)!.(n-4)!}{5.n.(n-1)!.(n-5).(n-4)!} = \frac{4!}{120}$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{5.n.(n-5)} = \frac{4!}{120}$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{n.(n-5)} = \frac{5!}{120}$$

$$\Leftrightarrow n2 - 5n - 14 = 0$$

$\therefore$ n = 7.

Informasikan kepada siswa bahwa materi selanjutnya adalah mengenai permutasi. Untuk memahami makna dari permutasi, minta siswa untuk memahami Masalah 8.3.

c. Permutasi

1) Permutasi dengan Unsur yang Berbeda

Masalah-8.3

Seorang resepsionis klinik ingin mencetak nomor antrian pasien yang terdiri tiga angka dari angka 1, 2, 3, dan 4. Tentukan banyak pilihan nomor antrian dibuat dari:

a. Tiga angka pertama.

b. Empat angka yang tersedia.

Alternatif Penyelesaian

a. Jika resepsionis menggunakan angka 1, 2, 3 maka nomor antrian yang dapat disusun adalah:

123	132	213	231	312	321

Terdapat 6 angka kupon antrian.

b. Jika nomor antrian disusun dengan menggunakan angka 1, 2, 3, dan 4, maka susunan nomor antrian yang diperoleh adalah:

123	142	231	312	341	421
124	143	234	314	342	423
132	213	243	321	412	431
134	214	241	324	413	432

Sehingga terdapat 24 pilihan nomor antrian.

Mari kita cermati bagaimana menyelesaikan masalah di atas dengan menggunakan konsep faktorial.

1. Jika nomor antrian disusun dengan menggunakan angka 1, 2, 3 maka banyak susunan nomor antrian adalah:

$$6 = 3 \times 2 \times 1 = \frac{3 \times 2 \times 1}{1} = \frac{3!}{1!} = \frac{3!}{(3-3)!}$$

2. Jika nomor antrian disusun dengan menggunakan angka 1, 2, 3, dan 4 maka banyak susunan nomor antrian adalah:

$$24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = \frac{4!}{1!} = \frac{4!}{(4-3)!}$$

Demikian selanjutnya jika diteruskan, banyak susunan k angka dari n angka yang disediakan yang dapat dibuat adalah:

$$\frac{n!}{(n-k)!} \text{ dengan } n \geq k. \qquad (*)$$

Untuk kebenaran pola rumusan (*), Minta siswa untuk menyelesaikan masalah berikut ini.

Untuk menguji kebenaran pola rumusan (*), coba kita gunakan untuk memecahkan masalah berikut ini.

Masalah-8.4

Sekolah SMA Generasi Emas, setiap tahun mengadakan acara pentas seni. Biasanya 8 bulan sebelum acara akbar, para siswa melakukan pemilihan untuk jabatan ketua dan sekretaris. Setelah melalui seleksi terdapat 5 kandidat yang mendaftarkan diri; yakni, Ayu (A), Beni (B), Charli (C), Dayu (D), dan Edo (E).
Bagaimana kita mengetahui banyak cara memilih ketua dan sekretaris untuk acara pentas seni sekolah tersebut?

Berikan Masalah 8.4 kepada siswa, minta siswa untuk memahami masalah tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Untuk mengetahui banyak susunan pengurus dapat dilakukan dengan beberapa cara, antara lain:

Penyelesaian masalah ini menuntut siswa untuk lebih memahami tentang banyak susunan k benda dari n benda yang diberikan. Penyelesaian ini juga dapat menggunakan cara mendaftar seperti yang telah dibahas sebelumnya.

a) Dengan cara mendaftar:

Seluruh kandidat yang mungkin dibuat dapat didaftarkan sebagai berikut:

AB	BA	CA	DA	EA
AC	BC	CB	DB	EB
AD	BD	CD	DC	EC
AE	BE	CE	DE	ED

Dari daftar di atas diperoleh banyak susunan pengurus acara pentas seni adalah 20 cara.

b) Dengan Aturan Perkalian

Untuk masalah ini, akan dipilih 2 pengurus dari 5 kandidat yang ada. Dengan menggunakan pola rumusan (*) diperoleh:

$n = 5$ dan $k = 2$

maka $\dfrac{n!}{(n-k)!} = \dfrac{5!}{(5-2)!} = 20$ cara

Dengan pembahasan Masalah 8.3 dan 8.4 ditemukan bahwa banyak susunan k unsur berbeda dari n unsur yang tersedia dan memperhatikan urutan susunannya dapat dirumuskan dengan $\dfrac{n!}{(n-k)!}$. Bentuk susunan ini dikenal dengan "permutasi".

Berdasarkan penyelesaian masalah, guru bersama-sama dengan siswa mendefinisikan konsep permutasi seperti yang terdapat pada Definisi 8.2

Definisi 8.2

Permutasi k unsur dari n unsur yang tersedia biasa dituliskan P_k^n atau ${}_nP_k$ serta $P(n, k)$ dengan $k \leq n$.

- Banyak permutasi n unsur ditentukan dengan aturan

$$P_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times L \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

- Banyak permutasi unsur dari n unsur yang tersedia, dapat ditentukan dengan:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Pada buku ini, penulisan permutasi k unsur dari n unsur yang tersedia kita menggunakan: P_k^n .

Sekarang cermati permutasi-permutasi di bawah ini:

1) $P_1^{10} = \dfrac{10!}{(10-1)!} = \dfrac{10 \times 9!}{9!} = 10$

2) $P_9^{10} = \dfrac{10!}{(10-9)!} = \dfrac{10!}{1!} = 10!$

3) $P_7^{8} = \dfrac{8!}{(8-7)!} = \dfrac{8!}{1!} = 8!$

4) $P_{44}^{45} = \dfrac{45!}{(45-44)!} = \dfrac{45!}{1!} = 45!$

5) $P_1^{1000} = \dfrac{1000!}{(1000-1)!} = \dfrac{1000 \times 999!}{999!} = 1000$

6) $P_{2013}^{2014} = \dfrac{2014!}{(2014-2013)!} = \dfrac{2014!}{1!} = 2014!$

7) $P_{1000}^{1000} = \dfrac{1000!}{(1000-1000)!} = \dfrac{1000!}{0!} = 1000!$

Diperlukan strategi untuk menyelesaikan perkalian dengan faktorial.

Dari pembahasan permutasi-permutasi di atas, dapat kita simpulkan sifat berikut ini.

Sifat 8.1

Diketahui $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, dengan $n \geq k$.

1) Jika $n - k = 1$, maka $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n!$.

2) Jika $k = 1$, maka $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n$.

3) Jika $n - k = 0$, maka $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n!$.

Bukti:

1) Diketahui $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, dengan $n \geq k$, dan $n - k = 1$ atau $n = k + 1$. Akibatnya:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \Leftrightarrow P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1-k)!} = \frac{n!}{1!} = n!$$

$$\therefore \; P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n!.$$

2) Diketehui $k = 1$ dan $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, dengan $n \geq k$, maka:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \Leftrightarrow P_1^n = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

3) Kerjakan sebagai latihanmu.

2) Permutasi dengan Unsur-Unsur yang Sama

Minta siswa untuk memahami Masalah 8.5. dan minta siswa untuk menyelesaikannya dengan caranya sendiri. Jika ada siswa yang sudah memahami tentang penyelesaiannya minta untuk menjelasknnya di depan kelas. Diharapkan dengan diselesaikannya masalah ini akan membentuk prinsip permutasi unsur-unsur yang sama.

Masalah-8.5

Berapa banyak susunan yang dapat dibentuk dari 3 huruf yang diambil dari huruf-huruf pembentuk kata APA?

Alternatif Penyelesaian

Tersedia 3 unsur; yakni, huruf-huruf A, P, dan A. Dari 3 unsur yang tersedia memuat 2 unsur yang sama; yaitu, huruf A.

Banyak permutasi 3 unsur yang memuat 2 unsur yang sama tersebut akan dicari melalui pendekatan banyak permutasi 3 unsur yang berbeda. Oleh karena itu, huruf-huruf yang sama (huruf A) diberi label A_1, dan A_2.

Banyak permutasi dari 3 unsur yang melibatkan 2 unsur yang sama adalah:

A_1PA_2, A_2PA_1, A_1A_2P, A_2A_1P, PA_1A_2, PA_2A_1.

Susunan-susunan tersebut dikelompokkan sedemikian rupa sehingga dalam satu kelompok memuat permutasi yang sama apabila labelnya dihapuskan.

Misalnya:

- Kelompok A_1PA_2 dan A_2PA_1, jika labelnya dihapus maka diperoleh permutasi APA .
- Kelompok A_1A_2P, A_2A_1P , jika labelnya dihapus maka diperoleh permutasi AAP.
- Kelompok PA_1A_2, PA_2A_1, jika labelnya dihapus maka diperoleh permutasi PAA.

Dalam tiap-tiap kelompok di atas terdapat $2! = 2$ permutasi, yaitu menyatakan banyak permutasi dari unsur A_1 dan A_2. Sedangkan A_1 dan A_2 menjadi unsur-unsur yang sama jika labelnya dihapuskan.

Dengan demikian banyak permutasi 3 unsur yang memuat 2 unsur yang sama dapat ditentukan sebagai berikut.

$$P_{2,1}^{3} = \frac{3!}{2!.1!} = 3 \text{ susunan}$$

Masalah-8.6

Pada sebuah upacara pembukaan turnamen olah raga disusun beberapa bendera klub yang ikut bertanding. Terdapat 3 bendera berwarna putih, 2 bendera berwarna biru, dan 1 bendera berwarna merah. Tentukanlah susunan bendera yang ditampilkan pada acara upacara pembukaan tersebut!

Minta siswa untuk memahami Masalah 8.6. masalah ini memiliki permasalahan yang analogi dengan Masalah 8.5. diharapkan dengan penyelesaian masalah ini maka prinsip tentang permutasi unsur yang sama dapat dipahami siswa dengan baik dan benar.

Alternatif Penyelesaian

Dengan analogi yang sama pada Masalah 8.5 diperoleh:

Banyak unsur yang tersedia 6, sedangkan unsur yang sama adalah

1. 3 bendera berwarna putih
2. 2 bendera berwarna biru

dan 1warna merah. Oleh karena itu dapat diperoleh banyak permutasi dari 6 unsur yang memuat 3 unsur yang sama dan 2 unsur yang sama adalah

$$P^{6}_{3,2,1} = \frac{6!}{3!.2!.1!} \text{ susunan}$$

Dari pembahasan Masalah 8.5 dan 8.6 , dapat kita rumuskan pola secara umum permutasi n *unsur* dengan melibatkan sebanyak k_1, k_2, k_3, …, k_n unsur yang sama adalah sebagai berikut.

Berdasarkan penyelesaian masalah dan contoh yang sebelumnya, minta siswa untuk memahami prinsip tentang banyak permutasi dari n unsur.

Sifat 8.2

Misalkan dari n unsur terdapat k_1, k_2, k_3, …, k_n unsur yang sama dengan $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n \leq n$. Banyak permutasi dari n unsur tersebut adalah

$$P^{n}_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots k_n!}$$

Berikan Contoh 8.4 kepada siswa untuk dipahami. Contoh ini bertujuan untuk melatih siswa menggunakan prinsip tentang permutasi dari n unsur.

Contoh 8.4

Berapa banyak susunan yang dapat dibentuk dari 3 huruf yang diambil dari huruf-huruf pembentuk kata K O G N I T I V I S T I K?

Alternatif Penyelesaian

Tersedia 13 unsur dalam kata tersebut; yaitu huruf-huruf K, O, G, N, I, T, I, V, I, S, T, I, K. Dari 13 unsur yang tersedia memuat 4 huruf I yang sama, 2 huruf K yang sama dan 2 huruf T yang sama.

Jika kita partisi banyak huruf pembentuk kata K O G N I T I V I S T I K adalah sebagai berikut:

$k_K + k_O + k_G + k_N + k_I + k_T + k_V + k_S = 2 + 1 + 1 + 1 + 4 + 2 + 1 + 1 = 13.$

Jadi permutasi yang melibatkan unsur yang sama, dihitung dengan menggunakan Sifat 8.2, diperoleh:

$$\frac{n!}{k_1!.k_2!.k_3!....k_k!} = \frac{13!}{2!.1!.1!.1!.4!.2!.1!.1!} = 129.729.600 \text{ cara.}$$

Sampai sejauh ini, kita sudah mengkaji bagaimana menentukan susunan unsur baik yang melibatkan unsur yang sama atau tidak. Pernahkan kamu melihat susunan objek- unsur dalam suatu meja berputar? Bagaimana menentukan banyak cara menyusun unsur jika disusun melingkar?

Berikut ini, kita akan pelajari permutasi siklis sebagai cara menentukan banyak cara menyusun unsur yang tersusun melingkar.

c. Permutasi Siklis

Masalah-8.7

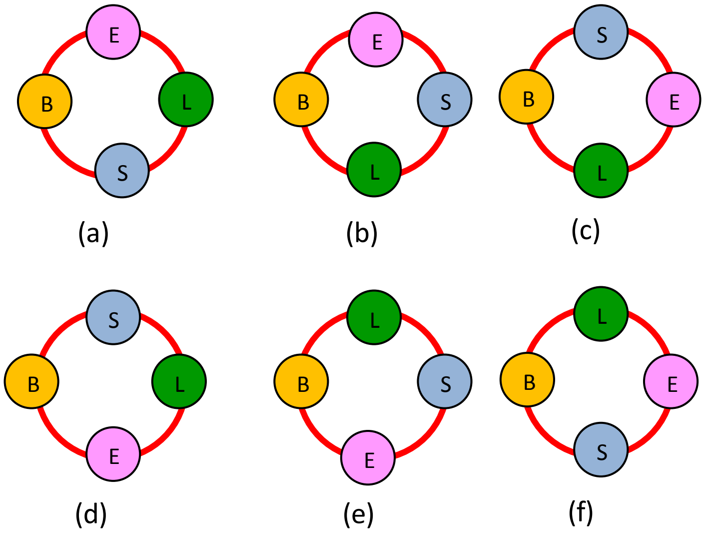
Beny (B), Edo (E), dan Lina (L) berencana makan bersama di sebuah restoran. Setelah memesan tempat, pramusaji menyiapkan sebuah meja bundar buat mereka. Selang beberapa waktu Siti datang bergabung dengan mereka. Berapa banyak cara keempat orang tersebut duduk mengelilingi meja bundar tersebut?

Kajian selanjutnya adalah tentang permutasi siklis. Agar siswa dapat memahaminya minta siswa untuk memahami Masalah 8.7. Untuk menyelesaikan masalah ini, minta siswa mencoba-coba kemungkinan cara keempat orang dapat duduk mengelilingi meja bundar.

Alternatif Penyelesaian

Meskipun dalam keseharian kita tidak mempersoalkan urutan posisi duduk mengitari suatu meja, tidak ada salahnya kita menyelidiki posisi duduk Beny, Edo, Lina, dan Siti yang duduk mengitari meja bundar. Adapun posisi duduk yang mungkin keempat orang tersebut adalah sebagai berikut:

Berikut ini merupakan kemungkinan cara duduk yang mungkin terbentuk yaitu sebanyak 6 cara.



Gambar 8.3 Susunan posisi tempat duduk

Berdasarkan penyelesaian yang telah dilakukan, minta siswa untuk menemukan pola penyelesaian masalah. Jika siswa masih mengalami kesulitan berikan beberapa permasalahan lain sehingga siswa dapat menyimpulkan bahwa permutasi siklis itu adalah (n – 1)!.

Terdapat 6 cara posisi duduk keempat mengitari meja bundar tersebut.

- Ternyata, pola $(n - 1)!$ Akan menghasilkan banyak cara dengan banyak cara yang diperoleh dengan cara manual, yaitu $(4 - 1)! = 3! = 6$ cara.

  Coba temukan susunan posisi duduk Beny, Edo, dan Lina secara manual. Kemudian bandingkan dengan menggunakan pola $(n - 1)!$.

Masalah-8.8

Seorang direktor bank swasta yang berkantor di Jakarta akan melakukan rotasi kepala cabang yang terdapat di 5 kota besar, yaitu Fahmi (Jakarta), Cintha (Surabaya), Trisnawati (Bandung), Novand (Medan), dan Rahmat (Padang). Dia meminta staff ahlinya untuk menyusun pilihan-pilihan yang mungkin untuk rotasi kepala cabang bank yang dipimpimnya.

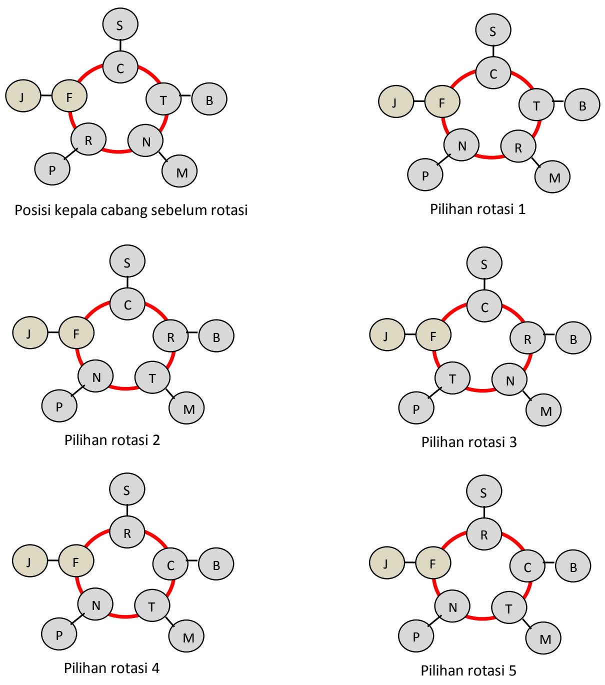
Bantulah staff ahli tersebut untuk menyusun pilihan rotasi kepala cabang bank swasta tersebut

Minta siswa untuk memahami Masalah 8.8. Penyelesaian masalah ini melibatkan permutasi siklis. Minta siswa untuk menyelesaikan dengan caranya sendiri .

Alternatif Penyelesaian

Misalkan kelima kepala cabang tersebut duduk melingkar, seperti diilustrasikan pada gambar berikut ini.

Berikut ini disajikan hanya beberapa kemungkinan rotasi duduknya kepala cabang. Diharapkan dengan memahami permutasi siklis siswa dapat menyelesaikan bahwa kemungkinan rotasi kepala cabang itu adalah 24 cara.



Gambar 8.4 Ilustrasi rotasi kepala cabang bank swasta

- ♦ Menurut kamu, ada berapakah pilihan rotasi kepala cabang bank swasta tersebut? Berikan penjelasanmu.

Berdasarkan pola (n – 1)! Minta siswa untuk menguji kebenaran dari pola tersebut, misalnya dengan mencoba pola itu atas 5 unsur, 4 unsur, 3 unsur atau beberapa unsur.

Untuk menentukan banyak cara menyusun unsur dalam posisi melingkar, kita dapat menguji validitas pola $(n - 1)!$.

- Jika terdapat 4 unsur, maka banyak susunan adalah $(4 - 1)! = 3! = 6$ cara.
- Jika terdapat 3 unsur, maka banyak susunan adalah $(3 - 1)! = 2! = 2$ cara.
- Jika terdapat 5 unsur, maka banyak susunan adalah $(5 - 1)! = 4! = 24$ cara.

Secara umum, jika terdapat *n* unsur yang disusun melingkar, maka banyak susunan unsur yang mungkin disebut permutasi siklis, dinyatakan dalam sifat berikut ini.

Sifat 8.3

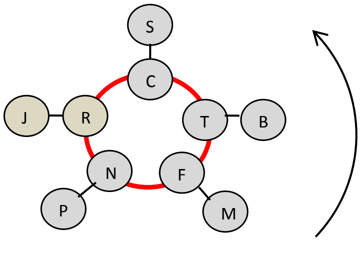
Misalkan dari n unsur yang berbeda yang tersusun melingkar. Banyak permutasi siklis dari *n* unsur tersebut dinyatakan:

$$P_{siklis} = (n-1)!$$

Berikan masalah ini kepada siswa, selanjutnya periksa.

- ♦ Perhatikan kembali Masalah 8.8, karena alasan keluarga Fahmi dan Trisnawati hanya mau dirotasi jika mereka berdua ditempatkan di pulau yang sama. Berapa pilihan rotasi kepala cabang bank swasta yang mungkin? Kerjakan secara mandiri dan bandingkan hasil kerjamu dengan temanmu.

Alternatif Penyelesaian



- Jika Fahmi di Jakarta dan Trisnawati di Bandung atau sebaliknya, maka terdapat 3 kemungkinan di Surabaya, 2 kemungkinan di Padang dan 1 kemungkinan di Medan.

  Akibat diperoleh: $2 \times (1 \times 1) \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ cara.
- Jika Fahmi di Jakarta dan Trisnawati di Surabaya atau sebaliknya, maka terdapat 3 kemungkinan di Bandung, 2 kemungkinan di Padang dan 1 kemungkinan di Medan.

  Akibat diperoleh: $2 \times (1 \times 1) \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ cara.
- Jika Fahmi di Bandung dan Trisnawati di Surabaya atau sebaliknya, maka terdapat 3 kemungkinan di Jakarta, 2 kemungkinan di Padang dan 1 kemungkinan di Medan.

  Akibat diperoleh: $2 \times (1 \times 1) \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ cara.
- Jika Fahmi di Medan dan Trisnawati di Padang, maka terdapat 3 kemungkinan di Surabaya, 2 kemungkinan di Bandung dan 1 kemungkinan di Jakarta.

  Akibat diperoleh: $2 \times (1 \times 1) \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ cara.

Jadi banyak rotasi kepala cabang bank swasta tersebut yang mungkin adalah: 48 cara.

1.4 Kombinasi

Cara menyusun unsur dengan memperhatikan urutan telah dikaji pada sub pokok bahasan permutasi. Selanjutnya, dalam percakapan sehari-hari kita mungkin pernah mengatakan “kombinasi warna pakaian kamu sangat tepat” atau tim sepakbola itu merupakan kombinasi pemain-pemain handal”. Apakah kamu memahami arti kombinasi dalam kalimat itu?

Untuk menjawabnya, mari kita pelajari makna kombinasi melalui memecahkan masalah-masalah berikut ini.

Informasikan kepada siswa bahwa pembelajaran selanjutnya adalah kombinasi. Dalam hal ini siswa harus memahami bahwa kombinasi itu merupakan susunan unsur tanpa memperhatikan urutan.

Minta siswa untuk memahami Masalah 8.9. Dengan diselesaikannya masalah ini diharapkan dapat dikonstruk tentang prinsip kombinasi dengan mengamati pola yang terbentuk.

Masalah-8.9

Hasil seleksi PASKIBRA di Kabupaten Bantul tahun 2012, panitia harus memilih 3 PASKIBRA sebagai pengibar bendera dari 5 PASKIBRA yang terlatih, yaitu Abdul (A), Beny (B), Cyndi (C), Dayu (D), dan Edo (E). 3 PASKIBRA yang dipilih dianggap memiliki kemampuan sama, sehingga tidak perhatikan lagi PASKIBRA yang membawa bendera atau penggerek bendera.
Berapa banyak pilihan PASKIBRA yang dimiliki panitia sebagai pengibar bendera?

Alternatif Penyelesaian

Mari kita selesaikan masalah ini dengan cara manual, sambil memikirkan bagaimana pola rumusan untuk menyelesaikannya.

Adapun pilihan-pilihan yang mungkin sebagai pengibar bendera adalah sebagai berikut:

- Pilihan 1: Abdul, Badu, Cyndi
- Pilihan 2: Abdul, Badu, Dayu
- Pilihan 3: Abdul, Badu, Edo
- Pilihan 4: Abdul, Cyndi, Dayu
- Pilihan 5: Abdul, Cyndi, Edo
- Pilihan 6: Abdul, Dayu, Edo
- Pilihan 7: Badu, Cyndi, Dayu
- Pilihan 8: Badu, Cyndi, Edo
- Pilihan 9: Badu, Dayu, Edo
- Pilihan 10: Cyndi, Dayu, Edo

Terdapat 10 pilihan PASKIBRA sebagai pengibar bendera.

Dengan menggunakan faktorial, 10 cara yang ditemukan dapat dijabar sebagai berikut:

$$10 = \frac{5}{3} \times 3! \text{ atau } 10 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} = \frac{5!}{2!.3!} \qquad (\#)$$

- ♦ Seandainya terdapat 4 PASKIBRA, berapa banyak cara memilih 3 PASKIBRA sebagai pengibar bendera? Coba kerja dengan cara manual, kemudian coba uji dengan menggunakan pola (#).

Selanjutnya beri pertanyaan seandainya ada 4 Paskibra untuk memilih 3 Paskriba. Alternatif penyelesaiannya dapat dilihat di samping.

Alternatif Penyelesaian

Misal keempat PASKIBRA itu adalah Abdul (A), Beny (B), Cyndi (C), Dayu (D), maka pilihan PASKIBRA pengibar bendera adalah sebagai berikut:

- Pilihan 1: Abdul, Badu, Cyndi
- Pilihan 2: Abdul, Badu, Dayu
- Pilihan 3: Abdul, Cyndi, Dayu
- Pilihan 4: Badu, Cyndi, Dayu

Selanjutnya tanyakan juga kepada siswa jika semua pembawa bendera semuanya harus perempuan.

Ada 4 cara memilih pengibar bendera.

Dengan menggunakan pola (#), maka diperoleh:

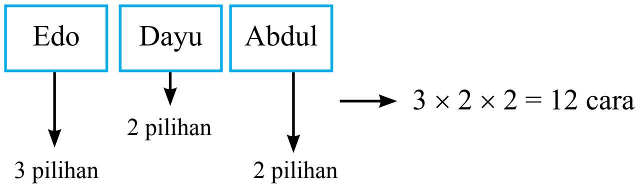
$$4 = \frac{4}{3} \times 3 \text{ atau } 4 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1!.(3 \times 2 \times 1)} = \frac{4!}{1!.3!}.$$

Perlu kita cermati, bahwa susunan kali ini perlu digarisbawahi bahwa pilihan (Abdul, Badu, Cyndi) sama dengan pilihan (Abdul, Cyndi, Badu) atau (Badu, Abdul, Cyndi) atau (Badu, Cyndi, Abdul) atau (Cyndi, Abdul, Badu) atau (Cyndi, Badu, Abdul).

- ♦ Jika pembawa bendera harus PASKIBRA perempuan, berapa banyak pilihan pengibar bendera yang mungkin? Coba kerjakan secara mandiri.

Alternatif Penyelesaian

Dari 5 PASKIBRA tersebut terdapat 5 PASKIBRA perempuan yaitu: Cyndi, Dayu. Jika diharuskan perempuan menjadi pembawa bendera,maka banyak pilihan pengibar bendera dirumuskan dengan aturan berikut:



Berikan Masalah 8.10 kepada siswa, minta siswa memahami masalah yang diberikan. Dengan penyelesaian dari permasalahan ini diharapkan siswa dapat mengkonstruk konsep kombinasi.

Masalah-8.10

Pada suatu pusat pelatihan atlit bulu tangkis, terdapat 3 atlit perempuan dan 4 atlit laki-laki yang sudah memiliki kemampuan yang sama. Untuk suatu pertandingan akbar, tim pelatih ingin membentuk 1 pasangan ganda campuran.

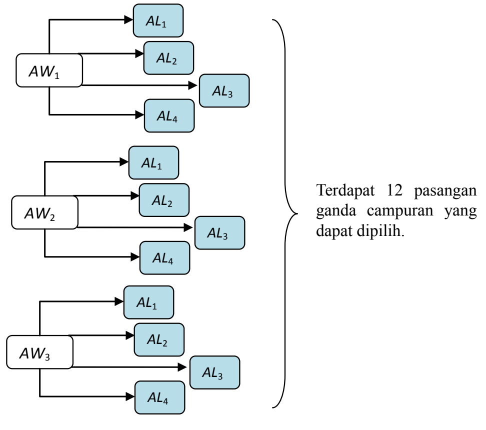
Berapa banyak pasangan yang dapat dipilih oleh tim pelatih?

Alternatif Penyelesaian

Mari kita selesaikan masalah ini dengan menggunakan cara manual. Untuk memilih 1 pasangan ganda campuran berarti memilih 1 atlit wanita dari 3 atlit wanita dan memilih 1 atlit laki-laki dari 4 atlit laki-laki.

Misalkan tiga atlit wanita kita beri inisial: AW_1, AW_2, AW_3; dan 4 atlit laki-laki kita beri inisial: AL_1, AL_2, AL_3, AL_4.

Dengan menggunakan metode diagram, banyak pilihan 1 pasangan ganda campuran dinyatakan sebagai berikut:



Gambar 85 Diagram pohon pilihan pasangan ganda campuran

Dengan menggunakan faktorial, mari kita mencoba menentukan jabarkan 12 cara dengan menerapakan pola (#).

$$12 = 3 \times 4 = \left(\frac{3}{1} \times 1!\right) \times \left(\frac{4}{1} \times 1!\right) = \left(\frac{3!}{1!.2!}\right) \times \left(\frac{4!}{1!.3!}\right)$$

Dari pembahasan Masalah 8.9 dan 8.10, memilih k unsur dari n unsur tanpa memperhatikan urutan unsur yang dipilih disebut kombinasi. Kombinasi k unsur dari n unsur yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 8.3

Kombinasi k unsur dari n unsur biasa dituliskan C_k^n ; ${}_nC_k$; $C(n, k)$ atau $\binom{n}{r}$

Banyak kombinasi *k* unsur dari *n* unsur yang tersedia, tanpa memperhatikan urutan susunannya dapat ditentukan dengan:

$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$, dengan $n \geq k$, n, k merupakan

bilangan asli.

Berdasarkan penyelesaian beberapa permasalahan bersama-sama dengan siswa membentuk konsep kombinasi k unsur dari n unsur.

Untuk keseragaman notasi, pada buku ini kita sepakati menggunakan simbol C_k^n untuk menyatakan kombinasi k unsur dari n unsur yang tersedia.

Perhatikan perhitungan kombinasi di bawah ini.

1) $C_5^6 = \frac{6!}{(6-5)!.5!} = \frac{6 \times 5!}{1!.5!} = 6$

2) $C_{25}^{26} = \frac{26!}{(26-25)!.25!} = \frac{26 \times 25!}{1!.25!} = 26$

3) $C_1^9 = \frac{9!}{(9-1)!.1!} = \frac{9 \times 8!}{8!.1!} = 8$

4) $C_{1999}^{2000} = \dfrac{2000!}{(2000-1999)!.1999!} = \dfrac{2000 \times 1999!}{1!.1999!} = 2000$

5) $C_{100}^{100} = \dfrac{100!}{(100-100)!.100!} = \dfrac{100!}{0!.100!} = 1$

Agar siswa dapat melatih kemampuan dalam memahami konsep yang telah dibentuk, minta siswa untuk mengamati contoh yang diberikan.

Contoh 8.5

Selidiki hubungan P_k^n dengan C_k^n.

Alternatif Penyelesaian

Pada Definisi 8.2 $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Sedangkan berdasarkan Definisi 8.3 $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!.k!}$.

Dari kedua definisi tersebut, dipereoleh hubungan:

$$C_k^n = \frac{P_k^n}{k!}.$$

- Secara hitungan matematis, hubungan P_k^n dengan C_k^n adalah $C_k^n = \dfrac{P_k^n}{k!}$. Jelaskan arti hubungan tersebut secara deskriptif.

Dari pembahasan komputasi dan Contoh 8.5 di atas, dapat kita simpulkan sifat berikut ini.

Sifat 8.4

Diketahui $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$, dengan $n \geq k$.

1) Jika $n - k = 1$, maka $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = n$.

2) Jika $k = 1$, maka $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = n$.

3) Jika $n = k$, maka $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = 1$.

4) Jika $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$, maka $C_k^n = \frac{P_k^n}{k!}$.

Bukti:

1) Diketahui $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$, dengan $n \geq k$, dan $n - k = 1$

   atau $n = k + 1$, maka:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \frac{(k+1)!}{(k+1-k)!.k!} = \frac{(k+1)\times k!}{(1)!.k!}$$

$$= k + 1 = n.$$

2) Karena $k = 1$, dan $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$, dengan $n \geq k$, maka:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!.k!} \Leftrightarrow C_1^n = \frac{n!}{(n-1)!.1!} = \frac{n\times(n-1)!}{(n-1)!.(1)!} = n.$$

3) Kerjakan sebagai latihanmu.

1.5 Binomial Newton

Kamu telah mempelajari tentang kombinasi sebagai bagian dari aturan pencacahan. Dengan menggunakan konsep kombinasi dapat juga kita kembangkan pada bahasan binomial. Perhatikan perpangkatan berikut ini.

Informasikan kepada siswa bahwa materi selanjutnya yang akan dibahas adalah Binomial

Newton. Berikan penjumlahan bilangan lalu pangkatkan mulai dari pangkat nol, satu, tiga, sampai pangkat tertentu lalu minta siswa menemukan pola dari hasil penjabaran bilangan berpangkat itu.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= 1a + 1b\\
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\
&= 1a^2 + 2ab + 1b^2\\
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\
&= (a+b)\left(1a^2 + 2ab + 1b^2\right)\\
&= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3\\
(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3\\
&= (a+b)\left(1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3\right)\\
&= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^3
\end{aligned}
$$

Bagaimana untuk penjabaran pada perpangkatan yang lebih tinggi? Untuk itu perhatikan langkah berikut. Dengan menggunakan sifat distribusi penjabaran dari $(a + b)^4$ adalah:

$$
\begin{array}{lr}
(a\times) \qquad 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^3 \quad (\times b) & \\
1a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 & \\
\qquad\qquad 1a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + 1b^5 & + \\
\hline
1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5 &
\end{array}
$$

Sehingga diperoleh $(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$.

Koefisien-koefisien penjabaran di atas jika disusun dalam bentuk diagram dapat menghasilkan gambar di bawah ini:

Berdasarkan pola yang ditemukan bantulah siswa untuk membentuk diagaram bilangan seperti di samping ini yanng dinamakan segitga Pascal.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Diagram di atas dikenal dengan sebutan segitiga Pascal

Sekarang amati pola segitiga Pascal. Dengan menggunakan konsep kombinasi C_r^n dapat dikaitkan dengan pola segitiga Pascal di atas yakni:

$$C_0^0 = C_0^1 = C_1^1 = C_0^2 = C_2^2 = C_0^3 = C_3^3 = C_0^4 = C_4^4 = C_0^5 = C_5^5 = 1$$

$$C_1^2 = 2$$

$$C_1^3 = C_2^3 = 3$$

dan seterusnya

sehingga dengan menggunakan konsep kombinasi maka dapat diperoleh pola segitiga Pascal yang baru, yakni:

$(a+b)^0 \rightarrow n=0$						C_0^0						
$(a+b)^1 \rightarrow n=1$					C_0^1		C_1^1					
$(a+b)^2 \rightarrow n=2$				C_0^2		C_1^2		C_2^2				
$(a+b)^3 \rightarrow n=3$			C_0^3		C_1^3		C_2^3		C_3^3			
$(a+b)^4 \rightarrow n=4$		C_0^4		C_1^4		C_2^4		C_3^4		C_4^4		
$(a+b)^5 \rightarrow n=5$	C_0^5		C_1^5		C_2^5		C_3^5		C_4^5		C_5^5	

Dari uraian di atas maka penjabaran perpangkatan dapat kita tuliskan kembali dalam bentuk kombinasi yaitu

$$(a+b)^0 = C_0^0$$

$$(a+b)^1 = C_0^1 a + C_1^1 b$$

$$(a+b)^2 = C_0^2 a^2 + C_1^2 ab + C_2^2 b^2$$

$$(a+b)^3 = C_0^3 a^3 + C_1^3 a^2 b + C_2^3 ab^2 + C_3^3 b^3$$

$$(a+b)^4 = C_0^4 a^4 + C_1^4 a^3 b + C_2^4 a^2 b^2 + C_3^4 ab^3 + C_4^4 b^3$$

$$(a+b)^5 = C_0^5 a^5 + C_1^5 a^4 b + C_2^5 a^3 b^2 + C_3^5 a^2 b^3 + C_4^5 ab^4 + C_5^5 b^5$$

Berdasarkan pola yang dibentuk dan dengan bantuan guru maka minta siswa untuk membentuk suatu aturan yang disebut dengan Aturan Binomial Newton.

Dengan pola di atas, dikenal sebagai *aturan Binomial Newton* (ekspansi binomial) dan bentuk umum $(a + b)^n$ dituliskan sebagai berikut:

Aturan Binomial Newton

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b^1 + \ldots + C_{n-1}^n a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

atau

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$$

n, r merupakan bilangan asli.

Minta siswa untuk memahami Contoh 8.6. contoh ini merupakan latihan untuk meningkatkan kemampuan siswa dalam menggunakan aturan Binomial Newton danlam permasalahan.

Contoh 8.6

Jabarkan bentuk binomial berikut ini:

1. $(2a - 5)^3 =$
2. $(a + b)^5 =$
3. $(3a + 2b)^4 =$
4. $\left(a + \dfrac{2}{a}\right)^5 =$
5. Diketahui binomial $\left(2a + \dfrac{1}{a}\right)^{14}$. Jabarkanlah 3 suku pertama dan dua suku terakhir.
6. Tentukanlah koefisien dari pada bentuk binomial $\left(a^2 + \dfrac{2}{a}\right)^{12}$.

Alternatif Penyelesaian

1. Dari soal di atas diketahui $a = 2a$ dan $b = 5$ maka

$$(2a-5)^3 = C_0^3(2a)^3 5^0 + C_1^3(2a)^2 5^1 + C_2^3(2a)^1 5^2 + C_3^3(2a)^0 5^3$$
$$= 2(8a^3)1 + 3(4a^2)5 + 3(2a)25 + 1(1)125$$
$$(2a-5)^3 = 16a^3 + 60a^2 + 150a + 125$$

2.
$$(a+b)^6 = C_0^6 a^6 b^0 + C_1^6 a^{6-1} b^1 + C_2^6 a^{6-2} b^2 + C_3^6 a^{6-3} b^3 + C_4^6 a^{6-4} b^4 +$$
$$C_5^6 a^{6-5} b^5 + C_6^6 a^{6-6} b^6$$
$$= 1a^6 1 + 6a^5 b^1 + 15a^4 b^4 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6a^1 b^5 + 1a^0 b^6$$
$$= a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^4 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^6 + b^6$$

3. Cermati ekpansi di bawah ini.

$$(3a+2b)^4 = C_0^4(3a)^4 b^0 + C_1^4(3a)^{4-1} b^1 + C_2^4(3a)^{4-2} b^2 + C_3^4(a)^{4-3} b^3 +$$
$$C_4^4(a)^{4-4} b^4$$
$$= 1(81a^4)1 + 4(3a)^3 b^1 + 6(3a)^2 b^2 + 4(3a)^1 b^3 + 1(3a)^0 b^4$$
$$= 81a^4 + 4(81a^3)b + 6(9a^2)b^2 + 4(3a)b^3 + 1b^4$$
$$= 81a^4 + 324a^3 b + 54a^2 b^2 + 12ab^3 + b^4$$

♦ Sebagai latihan untuk mengasah kemampuan dalam menyelesaikan soal-soal binomial newton, kerjakan secara mandiri soal nomor 4, 5, dan 6.

Alternatif Penyelesaian

1.
$$\left(a+\frac{2}{a}\right)^5 = C_0^5(a)^5 . \left(\frac{2}{a}\right)^0 + C_1^5(a)^4 . \left(\frac{2}{a}\right)^1 + C_2^5(a)^3 . \left(\frac{2}{a}\right)^2 + C_3^5(a)^2 . \left(\frac{2}{a}\right)^3 +$$
$$C_4^5(a)^1 . \left(\frac{2}{a}\right)^4 + C_5^5(a)^0 . \left(\frac{2}{a}\right)^5 .$$

$$= \begin{array}{l} 1\times a^5 \times 1 + \left(5\times a^4 \times \dfrac{2}{a}\right) + \left(10\times a^3 \times \dfrac{4}{a^2}\right) + \left(10\times a^2 \times \dfrac{8}{a^3}\right) \\ + \left(5\times a \times \dfrac{16}{a^4}\right) + \left(1\times 1\times \dfrac{32}{a^5}\right) \end{array}$$

$$= a^5 + 10a^3 + 40a + 80\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3}\right) + \frac{32}{a^5}$$

5. Tiga suku pertama dan dua suku terakhir dari ekspansi $\left(2a + \dfrac{1}{a}\right)^{14}$ adalah:

$$C_0^{14} \times (2a)^{14} \times \left(\frac{1}{a}\right)^0 \rightarrow \text{suku pertama.}$$

$$C_1^{14} \times (2a)^{13} \times \left(\frac{1}{a}\right)^1 \rightarrow \text{suku kedua.}$$

$$C_2^{14} \times (2a)^{12} \times \left(\frac{1}{a}\right)^2 \rightarrow \text{suku ketiga.}$$

$$C_{14}^{14} \times (2a)^{0} \times \left(\frac{1}{a}\right)^{14} \rightarrow \text{suku terakhir.}$$

$$C_{13}^{14} \times (2a)^{1} \times \left(\frac{1}{a}\right)^{13} \rightarrow \text{suku sebelum suku terakhir.}$$

6. Agar diperoleh a6, hanya dipenuhi pada saat $\left(a^2\right)^6$ dan $\left(\dfrac{2}{a}\right)^6$. Koefisien a6 hitung dari perkalian berikut ini.

$$C_6^{12} \times \left(a^2\right)^6 \times \left(\frac{2}{a}\right)^6 = 924 \times a^6 \times 2 = 1848a^6$$

Jadi koefisien a^6 adalah 1.848.

Uji Kompetensi 8.1

Uji Kompetensi ini bertujuan untuk mengukur tingkat kemampuan siswa terhadap prinsip dan konsep aturan perkalian, permutasi, kombinasi, dan Binomial Newton. Uji kompetensi ini dapat juga dijadikan sebagai tugas di rumah.

1. Seorang staff ahli di suatu POLDA mendapat tugas untuk menyusun nomor pada plat kendaraan roda empat yang terdiri 3 angka dan 4 angka. Staff tersebut hanya diperbolehkan menggunakan angka 1, 2, 3, 4, 5, 6 untuk plat yang terdiri dari 3 angka dan angka 0 sampai 9 untuk plat yang terdiri 4 angka.
   a) Berapa cara menyusun plat kendaraan yang terdiri dari 3 angka dan 4 angka?
   b) Jika nomor-nomor plat tersebut akan dilengkapi dengan seri yang terdiri dari dua huruf vokal. Berapa banyak susunan seri plat yang mungkin?
2. Diberikan angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Rangkailah bilangan yang terdiri dari 5 angka yang berbeda dengan syarat:
   a) Bilangan ganjil
   b) Bilangan genap
3. Dari kota A ke kota B dilayani oleh 4 bus dan dari B ke C oleh 3 bus. Seseorang berangkat dari kota A ke kota C melalui B kemudian kembali lagi ke A juga melalui B. Jika saat kembali dari C ke A, ia tidak mau menggunakan bus yang sama, maka hitunglah banyak cara perjalanan orang tersebut.
4. Tentukan nilai dari: $\dfrac{89! \times 38!}{86! \times 41!}$
5. Sederhanakanlah persamaan berikut:
   a. $\dfrac{n!}{(n-1)!}$
   b. $\dfrac{(n+2)!}{n!}$
   c. $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$

6. Banyak garis yang dapat dibuat dari 8 titik yang tersedia, dengan tidak ada 3 titik yang segaris?
7. Banyak garis yang dapat dibuat dari 8 titik yang tersedia, dengan tidak ada 3 titik yang segaris?
8. Tentukan banyak susunan pemain yang berbeda dari team bola voli yang terdiri dari 10 pemain bila salah seorang selalu menjadi kapten dan seorang lain tidak bisa bermain karena cedera!
9. Berapa banyak cara untuk menempatkan 3 anak laki-laki dan 2 anak perempuan duduk berjajar tanpa membedakan tiap anak?
10. Suatu delegasi terdiri dari 3 pria dan 3 wanita yang dipilih dari himpunan 5 pria yang berbeda usia dan 5 wanita yang juga berbeda usia. Delegasi itu boleh mencakup paling banyak hanya satu anggota termuda dari kalangan wanita atau anggota termuda dari kalangan pria. Hitunglah banyak cara memilih delegasi tersebut.
11. Seminar Matematika dihadiri oleh 20 orang. Pada saat bertemu mereka saling berjabat tangan satu dengan yang lain. Berapakah jabat tangan yang terjadi?
12. Perhatikan gambar berikut.

   Jika suatu segitiga dibentuk dengan menggunakan 3 titik. Berapa banyak segitiga yang dapat dibentuk.
13. Tentukanlah banyak susunan huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf:
    a. MATEMATIKA
    b. PENDIDIKAN
    c. TRIGONOMETRI
    d. MALAKA

11. Jabarkanlah bentuk binomial berikut ini:

a. $(2a + 3b)^8$

b. $(4a + 2b)^{10}$

c. $\left(2a + \dfrac{b}{2}\right)^6$

d. $\left(\dfrac{2a}{3} + \dfrac{1}{3b}\right)^8$

Projek

Rancang suatu permainan yang menggunakan konsep aturan pencacahan. Sebelum kamu susun laporan projek ini, terlebih dahulu lakukan simulasi sebagai uji validitas penggunaan konsep.

Berikan tugas projek ini sebagai tugas tambahan yang dikerjakan secara berkelompok.

2. PELUANG

Kamu sudah mempelajari konsep peluang pada Bab 12 Buku Matematika kelas X. Dengan pengalaman belajar itu, kita akan mengembangkan konsep peluang dengan memperhatikan banyak cara semua kejadian mungkin terjadi dan banyak cara suatu kejadian mungkin terjadi. Dengan demikian, pada sub bab ini, kita akan mendalami bagaimana menentukan banyak anggota ruang sampel kejadian dengan menggunakan konsep aturan pencacahan.

Mari kita mulai sub bab ini dengan mengkaji ruang sampel suatu kejadian.

Informasikan kepada siswa bahwa materi yang akan dibahas adalah peluang dengan melibatkan.

2.1 Konsep Ruang Sampel

Masih ingatkah kamu konsep himpunan yang kamu pelajari di kelas VII SMP? Pada sub bab ini, kita ingin membangun konsep ruang sampel dengan menggunakan konsep aturan pencacahan melalui konsep himpunan bagian.

Informasikan kepada siswa bahwa pembahasan tentang konsep ruang sampel pada waktu SMP akan dibahas kembali dengan melibatkan aturan pencacahan yang telah dipelajari.

Mari kita cermati pembahasan di bawah ini.

Diberikan $S = \{p, r, s, t\}$ $n(S) = 4$.

Tentu kamu masih ingat bagaimana cara menentukan himpunan bagian dari S. Semua himpunan bagian S disajikan di tabel berikut ini.

Tabel 8.2: Himpunan bagian *S* dengan tidak memperhatikan urutan

Himpunan Bagian Beranggota						
Kejadian	0	1	2	3	4	
	$\varnothing$	$\{p\}$, $\{r\}$, $\{s\}$, $\{t\}$	$\{p,r\}$, $\{p,s\}$, $\{p,t\}$, $\{r,s\}$, $\{r,t\}$, $\{s,t\}$	$\{p,r,s\}$, $\{p,r,t\}$, $\{p,s,t\}$ $\{r,s,t\}$	$\{p, r, s, t\}$	
Total	1	4	6	4	1	16
	C_0^4	C_1^4	C_2^4	C_3^4	C_4^4	2^n

Perhatikan angka-angka; 1, 4, 6, 4, 1 merupakan koefisien binomial untuk ekspansi $(a + b)^4$, yang dapat ditentukan berturut-turut melalui C_0^4 , C_1^4 , C_2^4, C_3^4, dan C_4^4.

Dari tabel di atas, dapat diartikan bahwa banyak kejadian munculnya 2 anggota himpunan bagian dari S adalah C_2^4 = 6. Banyak semua himpunan bagian dari himpunan S = 24 = 16. Himpunan kuasa S adalah koleksi semua himpunan bagian S (Ingat kembali konsep himpunan kuasa seperti yang telah kamu pelajari pada kelas VII SMP). Jadi 16 adalah banyak anggota ruang sampel kejadian semua himpunan bagian S.

Selanjutnya Tabel 8.2 akan berubah jika kita memperhatikan urutan anggota. Kondisi ini disajikan pada tabel berikut ini.

Tabel 8.3: Himpunan bagian *S* dengan memperhatikan urutan

Himpunan Bagian Beranggota						
Kejadian	0	1	2	3	4	
	∅	{*p*}, {*r*}, {*s*}, {*t*}	{*p*,*r*},{*r*,*p*} {*p*,*s*},{*s*,*p*} {*p*,*t*},{*t*,*p*} {*r*,*s*},{*s*,*r*} {*r*,*t*},{*t*,*r*} {*s*,*t*},{*t*,*s*}	{*p*,*r*,*s*}, {*p*,*s*,*r*}, … {*p*,*r*,*t*}, {*p*,*t*,*r*}, … {*p*,*s*,*t*}, {p,s,t}, …	{*p*, *r*, *s*, *t*}, {*p*, *r*, *t*, *s*}, {*p*, *s*, *r*, *t*}, …	
					{*r*,*s*,*t*}, {*r*,*t*,*s*}, …	
Total	1	4	6	24	24	65
	P_0^4	P_1^4	P_2^4	P_3^4	P_4^4	

Pada kasus memperhatikan urutan anggota, konsep kombinasi yang digunakan pada Tabel 8.2 berubah menjadi konsep permutasi. Analog dengan kombinasi, banyak anggota kejadian munculnya himpunan bagian *S* beranggota dua (dengan memperhatikan urutan) adalah $P_2^4 = 12$. Sedangkan 65 merupakan banyak anggota ruang sampel kejadian semua himpunan bagian dengan memperhatikan urutan anggotanya.

Tentunya sudah punya gambaran tentang penerapan konsep permutasi atau kombinasi dalam menentukan banyak kejadian muncul pada suatu percobaan.

Berikut ini seorang ibu memiliki kesempatan memilih, mari kita selidiki apakah masalah tersebut menggunakan konsep permutasi atau kombinasi.

Minta siswa untuk memahami Masalah 8.11 dan masalah ini bertujuan untuk melatih siswa dalam menentukan ruang sampel dengan melibatkan kombinasi.

Masalah-8.11

Pada suatu tempat penitipan anak berusia 3 – 6 tahun menyediakan makanan dan minimum bergizi yang bervariasi. Bu Sity, karena alasan jam kerja memilih menitipkan anaknya di tempat penitipan ini. Dari semua variasi makanan dan minimum, Bu Sity harus memilih 2 jenis buah dari 4 jenis buah yang disediakan dan memilih 4 makanan dari 6 jenis makanan yang disediakan.

Berapa banyak pilihan yang dimiliki oleh Bu Sity? Diasumsikan setiap anak makan juga harus makan buah.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Tersedia 4 jenis buah dan akan dipilih 2 jenis buah.

Tersedia 6 jenis makanan dan akan dipilih 4 jenis makanan.

Setiap si anak makan harus makan bauh.

Ditanya:

Banyak pilihan jenis susu dan jenis makanan.

Untuk kasus ini, misalnya Bu Sity memilih jenis buah 1 (b_1) dan jenis buah 2 (b_2) sama saja dengan memilih b_2 dan b_1. Demikian juga makanan, jika Bu Sity makanan 1 (m_1) dan makanan 3 (m_3) sama saja dengan memilih m3 dan m1(mengapa?).

Dengan demikian kita menggunakan konsep kombinasi untuk menentukan banyak pilihan yang dimiliki oleh Bu Sity.

Karena setiap makan anak Bu Sity juga harus makan bauh, maka banyak kombinasi pilihan makanan dan minuman dinyatakan sebagai berikut:

$$C_2^4 \times C_4^6 = 6 \times 15 = 90 \text{ pilihan.}$$

- Menurut kamu, apa alasannya mengapa kita menggunakan operasi perkalian? Mengapa bukan operasi penjumlahan? Berikan alasanmu serta berikan contoh yang menggunakan operasi penjumlahan.

Contoh 8.7

Sebagai penguatan terhadap penguasaan siswa dalam menentukan ruang sampel dengan melibatkan kombinasi berikan contoh 8.7 berikut.

Bu Jein Mumu, seorang guru matematika di Ambon. Suatu ketika dia ingin memberikan tugas kepada siswa yang sangat rajin dan memiliki daya tangkap di atas rata-rata teman satu kelasnya. Dia mempersiapkan 15 soal matematika berbentuk essai. Namun dari 15 soal itu, Bu Mumu hanya meminta si anak mengerjakan 10 soal, tetapi harus mengerjakan soal nomor 7, 12, dan 15.

Berapa banyak pilihan yang dimiliki anak itu?

Alternatif Penyelesaian

Siswa Bu Mumu harus memilih 7 soal lagi dari 12 soal sisa (mengapa) dan untuk mengetahui banyak cara memilih soal tersebut ditentukan dengan menggunakan kombinasi (beri alasannya), yaitu:

$$C_7^{12} = \frac{12!}{(12-7)!.7!} = \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7!}{(5\times4\times3\times2\times1)\times7!} = 729 \text{ cara.}$$

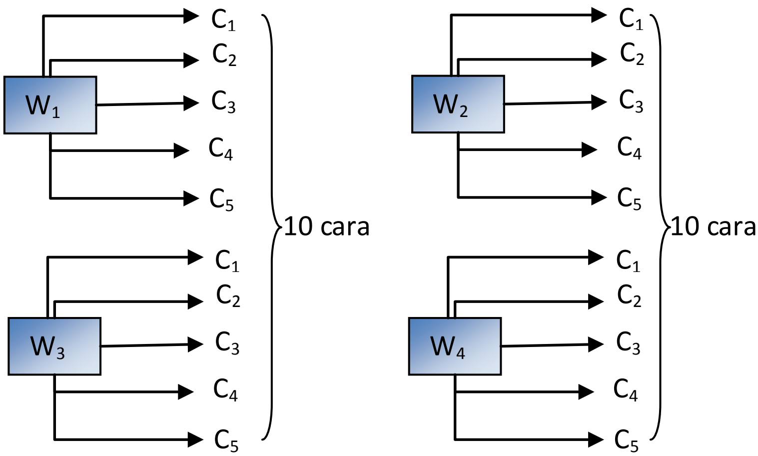
Contoh 8.8

Minta siswa untuk memahami Contoh 8.8 contoh ini bertujuan untuk melatih siswa dalam menentukan ruang sampel dengan melibatkan permutasi.

Toko perhiasan yang berlokasi pusat perbelanjaan menerima 5 jenis cincin keluaran terbaru, misalkan C_1, C_2, C_3, C_4, dan C_5. Tidak lama setelah toko itu buka, 4 wanita berminat mencoba kelima cincin itu. Berapakah banyak cara pemasangan cincin tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Untuk menyelesaikan ini, kita menggunakan aturan kaidah pencahahan. Semua kemungkinan pemasangan cincin dengan keempat wanita tersebut, diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 8.6 Diagram pemasangan cincin

Dengan menggunakan permutasi pemasangan cincin ditentukan sebagai berikut:

$$P_1^5 \times P_1^4 = \frac{5!}{(5-4)!} \times \frac{4!}{(4-1)!} = 5 \times 4 = 20 \text{ cara.}$$

- Jelaskan mengapa perhitungan permutasi di atas menggunakan operasi perkalian!

Seandainya setiap dua wanita pertama ingin membeli masing-masing 1 cincin. Banyak pilihan cincin untuk kedua wanita itu dihitung dengan permutasi, yaitu:

$P_1^5 \times P_1^4 = 5 \times 4 = 20$ cara (selidiki dengan menggambarkan skema pencacahan).

Dari pembahasan kajian, masalah-masalah, dan contoh-contoh di atas perlu kita tarik kesimpulan penggunaan permutasi atau kombinasi dalam menentukan banyak susunan/cara dalam memilih k unsur dari n unsur yang tersedia. Kesimpulan itu dinyatakan dalam prinsip berikut ini.

Berdasarkan beberapa penyelesaian yang sudah diselesaikan ajak siswa untuk menentukan cara memilih melalui prinsip Permutasi dan Kombinasi.

Prinsip-8.1

Misalkan dipilih k unsur dari n unsur (secara acak) yang tersedia, dengan $n \geq k$,

i. Jika ada urutan dalam pemilihan k unsur, maka menentukan banyak cara pemilihan ditentukan dengan P_k^n.

ii. Jika tidak urutan dalam pemilihan k unsur, maka menentukan banyak cara pemilihan ditentukan dengan C_k^n.

Contoh 8.9

Berikan contoh berikut sebagai pemantapan bagi siswa dalam memahami tentang penggunaan prinsip kombinasi.

Dalam sebuah kantong berisi 8 manik putih dan 5 manik merah. Dari kantong itu diambil 6 buah manik. Berapa banyak pilihan untuk mengambil manik-manik itu, jika 6 buah manik itu terdiri atas:

a) 5 manik putih dan 1 manik merah?

b) 4 manik merah dan 2 manik putih?

Alternatif Penyelesaian

Objek yang akan diambil dari kantong adalah objek yang tidak memperhatikan urutan. Dengan demikian, menentukan banyak pilihan menggunakan konsep kombinasi, yaitu:

a) $C_5^8 \times C_1^5 = \dfrac{8!}{3!.5!} \times \dfrac{5!}{4!.1!} = 280$ cara.

b) $C_4^8 \times C_2^5 = \dfrac{8!}{4!.4!} \times \dfrac{5!}{2!.3!} = 700$ cara.

2.2 Peluang Kejadian Majemuk

Masih ingatkah kamu konsep peluang yang telah kamu pelajari pada kelas X SMA? Definisi 12.3 pada buku matematika kelas X menyatakan:

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$$

Pada kelas X, kamu sudah mempelajari bagaimana menentukan $n(E)$ dan $n(S)$ untuk kejadian tunggal. Pada Sub bab 2.1 di atas, kita sudah mengkaji bagaimana menentukan $n(E)$ dan $n(S)$ untuk suatu kejadian majemuk. Sekarang kita akan mempelajari menentukan peluang suatu kejadian dengan kejadian yang dimaksud adalah kejadian majemuk.

Mari kita mulai sub bab ini, dengan memecahkan masalah berikut ini.

Berikan Masalah 8.12 kepada siswa. Minta siswa untuk memahami masalah tersebut, lalu minta perwakilan siswa untuk menjelaskan penyelesaian terhadap masalah yang diberikan. Jika siswa mengalami kesulitan ingatkan kembali siswa tentang konsep dan prinsip peluang yang melibatkan kombinasi.

Masalah-8.12

Dalam sebuah kolam kecil terdapat sebanyak 10 ikan lele dan sebanyak 5 ikan gurame. Dengan menggunakan jaring tangan, akan diambil 12 ikan secara acak. Hitunglah nilai peluangnya jika yang terambil itu adalah:

a) 10 ikan lele dan 2 ikan gurame,
b) 9 ikan lele dan 3 ikan gurame,
c) 7 ikan lele dan 5 ikan gurame.

Alternatif Penyelesaian

Jelas untuk kasus ini, banyak cara memilih 12 ikan dari 15 ikan yang ada dihitung dengan menggunakan kombinasi, yaitu: $C_{12}^{15}=\frac{15!}{3!.12!}=\frac{15\times14\times13\times12!}{(3\times2\times1).12!}=455$ cara.

Artinya banyak anggota ruang sampel memilih 12 ikan dari 15 ikan adalah 455.

a) Banyak cara memilih 10 ikan lele dari 10 ikan lele dan memilih 2 ikan gurame dari 5 ikan gurame, dihitung menggunakan konsep kombinasi, yaitu:

$C_{10}^{10} \times C_2^5 = 1 \times 10 = 10$ cara.

Artinya banyak kejadian terambilnya 10 ikan lele dan 2 ikan gurame adalah 10 cara.

Jadi, peluang terambilnya 10 ikan lele dan 2 ikan gurame adalah:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \Leftrightarrow \frac{10}{455} = \frac{2}{91}$$

b) $$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C_9^{10} \times C_3^5}{C_{12}^{15}} = \frac{10 \times 10}{455} = \frac{20}{91}$$

c) $$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C_7^{10} \times C_5^5}{C_{12}^{15}} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$$

Uji Kompetensi 8.2

Berikan soal-soal yang terdapat pada Uji Kompetensi 8.2 kepada siswa untuk mengukur tingkat penguasaan siswa terhadap konsep dan prinsip peluang yang melibatkan permutasi dan kombinasi.

1. Di dalam sebuah kotak terdapat 10 bola yang sama tetapi berbeda warna. 5 bola berwarna merah, 3 bola berwarna putih, dan 2 bola berwarna kuning. Seorang anak mengambil 3 bola secara acak dari kotak. Tentukanlah:
   a) Banyak cara pengambilan ketiga bola tersebut.
   b) Banyak cara pengambilan ketiga bola dengan dua bola berwarna sama.
   c) Banyak cara pengambilan ketiga bola tersebut dengan banyak bola berwarna merah selalu lebih banyak daripada banyak bola berwarna lainnya.
   d) Banyak cara pengambilan ketiga bola jika bola berwarna kuning paling sedikit terambil 2.

2. Dari angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7 akan dibuat bilangan dengan angka yang berbeda. Tentukanlah:
   a) Banyak bilangan yang dapat dibentuk.
   b) Banyak bilangan ribuan yang lebih besar atau sama dengan 4000.
   c) Banyak bilangan ratusan dengan angka ratusan adalah bilangan prima.
   d) Jika x adalah bilangan ratusan yang dapat dibentuk dari angka di atas, maka tentukan banyaknya bilangan ratusan yang memenuhi $250 < x < 750$.
   e) Banyak bilangan ratusan dengan angka di posisi puluhan selalu lebih dari angka di posisi satuan.
3. Tentukan banyak kata berbeda yang dapat dibentuk dari huruf pembentuk kata:
   a) ATURAN
   b) INDONESIA
   c) KURIKULUM
   d) STATISTIKA
4. Berapa banyak kata yang dapat dibentuk dari huruf pembentuk kata PERMUTASI dengan selalu mengandung unsur kata TAMU.
5. Sepuluh buku yaitu: 6 buku IPA, 2 buku IPS, dan 2 buku Bahasa akan disusun di atas meja. Tentukanlah:
   a) Banyak susunan jika disusun berjajar.
   b) Banyak susunan jika disusun berjajar dengan buku yang sejenis bidang ilmu berdekatan.
   c) Banyak susunan jika disusun berjajar dengan buku IPA selalu berada di pinggir.
   d) Banyak susunan jika disusun secara siklis.
   e) Banyak susunan jika disusun secara siklis dengan buku yang sejenis bidang ilmu berdekatan.

6. Bayu pergi menonton pertandingan sepak bola ke stadion. Jika stadion memiliki 5 pintu masuk/keluar maka tentukan banyak cara Bayu memilih masuk ke stadion dengan dan keluar melalui pintu yang berbeda.
7. Dua orang pergi menonton pertandingan sepak bola ke stadion. Jika stadion memiliki 6 pintu masuk/keluar maka:
   a. Tentukan banyak cara mereka memilih masuk ke stadion dengan masuk melalui pintu yang sama tetapi keluar dengan pintu yang berbeda.
   b. Tentukan banyak cara mereka memilih masuk ke stadion dengan masuk melalui pintu yang sama tetapi mereka keluar dengan pintu yang berbeda dan tidak melalui pintu di saat mereka masuk.
8. Didalam sebuah kotak terdapat 12 bola yang sama dan berbeda warna, yaitu 6 bola berwarna Merah, 4 bola berwarna Biru, dan 2 berwarna hijau. Jika, seorang anak mengambil 3 bola secara acak maka tentukan:
   a. Peluang pengambilan ketiga bola tersebut
   b. Peluang terambil 2 bola berwarna merah
   c. Peluang terambil ketiga bola berbeda warna
   d. Peluang terambil banyak bola berwarna merah selalu lebih banyak dari bola lainnya.
   e. Peluang terambil banyak bola berwana merah selalu lebih banyak dari banyak bola berwarna biru dan banyak bola berwarna berwarna biru lebih banyak dari bola berwarna hijau.
9. Di dalam kandang terdapat 40 ekor ayam, yaitu 18 ekor ayam jantan, 6 diantaranya berbulu tidak hitam dan 21 ekor ayam berwarna hitam. Ibu memilih 2 ekor ayam untuk dipotong, maka tentukanlah peluang bahwa ayam yang terpilih untuk dipotong adalah ayam betina berbulu tidak hitam.

10. Siti menyusun bilangan ratusan dari angka 0, 1, 2, 3, dan 5. Siti menuliskan setiap bilangan di kertas dan menggulungnya dan mengumpulkannya di dalam sebuak kotak. Siti meminta Udin mengambil sebuah gulungan secara acak. Tentukanlah:
    a. Peluang yang terambil adalah bilangan 123.
    b. Peluang yang terambil adalah bilangan ganjil
    c. Peluang yang terambil adalah bilangan dengan angka di posisi satuan adalah bilangan prima.
    d. Peluang yang terambil adalah bilangan diantara 123 dan 321
11. Dua puluh lima titik disusun membentuk pola bilangan persegi (5 5), seperi gambar

    Jika dibentuk segitiga dengan menghubungkan tiga titik maka tentukan banyak segitiga yang dapat dibentuk.
12. Didalam kelas terdapat 10 siswa (6 pria dan 4 wanita) sebagai calon pengurus OSIS, yaitu ketua, sekretaris dan bendahara. Tentukan peluang terpilih kepengurusan dengan:
    a. Kepengurusan tidak mempunyai persyaratan atau mereka semua berhak menduduki salah satu posisi.
    b. Ketua dan sekretaris harus pria
    c. Ketua, sekretaris harus pria dan bendahara harus seorang wanita
    d. Ketua harus seorang pria.
13. Tunjukkan bahwa $C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots + C_n^n = 2^n$ dengan n bilangan bulat positif.

14. Jika P_k^n adalah permutasi k unsur dari n unsur dan C_k^n adalah kombinasi k unsur dari n unsur maka $C_{n+3}^{n+5} = 22$ maka tentukan nilai P_{n-5}^{n-3}

15. Jika P_k^n adalah permutasi k unsur dari n unsur dan C_k^n adalah kombinasi k unsur

    dari n unsur maka tentukan harga n yang memenuhi $P_{n-2}^n - P_{n-3}^n - P_{n-3}^{n+1} = C_{n-2}^n$

D. PENUTUP

Bagian penutup ini merupakan rangkuman tentang konsep dan prinsip aturan perkalian, permutasi, kombinasi, Binomial Newton, dan peluang yang melibatkan permutasi dan kombinasi, diharapkan dengan dengan adanya bagian penutup ini siswa dapat dengan mudah mengingat konsep dan prinsip tersebut.

Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep aturan pencacahan, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. Aturan pencacahan merupakan metode untuk menentukan banyak cara/susunan/pilihan pada saat memilih k unsur dari n unsur yang tersedia. Aturan pencacahan ini meliputi perkalian berurut (faktorial), permutasi, dan kombinasi.
2. Faktorial dinyatakan dengan $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$.
3. Permutasi adalah susunan k unsur dari n unsur tersedia dalam satu urutan. Terdapat tiga jenis unsur permutasi yakni 1. Permutasi dengan unsur-unsur yang berbeda, 2. Permutasi dengan unsur-unsur yang sama, dan 3. Permutasi siklis.

   Secara umum banyak permutasi dinyatakan dengan: $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, dengan $n \geq k$.

4. Kombinasi adalah susunan k unsur dari n unsur tersedia dengan tanpa memperhatikan urutannya, dinyatakan dengan $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, dengan $n \geq k$.

5. Untuk kejadian majemuk, banyak anggota ruang sampel $n(S)$ suatu kejadian merupakan banyak cara/ susunan suatu kejadian majemuk tersebut. Sedangkan banyak anggota kejadian $n(E)$ merupakan kombinasi atau permutasi suatu kejadian pada kejadian majemuk.

6. Peluang suatu kejadian *majemuk* (E) dirumuskan: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$.

Dengan memiliki sikap, pengetahuan, dan keterampilan akan aturan pecacahan dapat kamu aplikasikan mengatasi masalah dunia nyata. Untuk selanjutnya, konsep dasar aturan pencacahan ini akan membantu kamu memahami konsep peluang majemuk dan matematika diskrit. Selanjutnya kita akan membahas materi lingkaran, tentunya pengalaman belajar yang kita peroleh pada Bab VIII ini harus membantu cara berpikir kita memecahkan masalah.

Bab 9

LINGKARAN

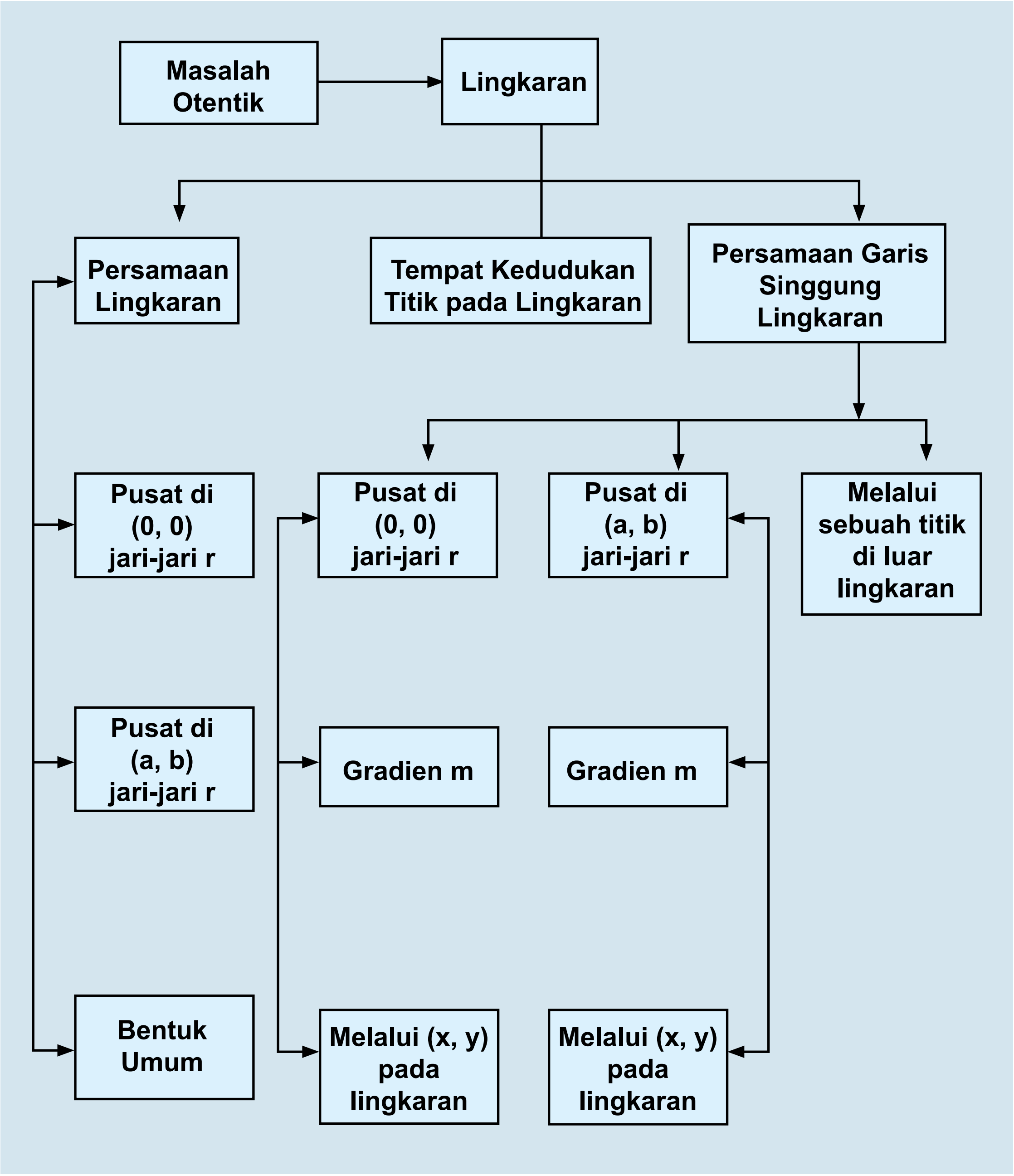
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran lingkaran siswa mampu: 1. Mendeskripsikan konsep persamaan lingkaran dan menganalisis sifat garis singgung lingkaran dengan menggu-nakan metode koordinat. 2. Mendeskripsikan konsep dan Kurva lingkaran dengan titik pusat tertentu dan menurunkan persamaan umum lingkaran dengan metode koordinat. 3. Mengolah informasi dari suatu masalah nyata, mengidentifikasi sebuah titik sebagai pusat lingkaran yang melalui suatu titik tertentu, membuat model Matematika berupa persamaan lingkaran dan menyelesaikan masalah tersebut. 4. Merancang dan mengajukan masalah nyata terkait garis singgung lingkaran serta menyelesaikannya dengan melakukan manipulasi aljabar dan menerapkan berbagai konsep lingkaran.	Melalui proses pembelajaran lingkaran, siswa memiliki pengalaman belajar sebagai berikut. • menemukan konsep persamaan lingkaran berpusat di (0, 0) dan (a, b) melalui pemecahan masalah otentik; • menemukan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik pada lingkaran; • Menemukan persamaan garis singgung yang gradiennya diketahui; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur dalam menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dengan menggunakan diskriminan; • berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis, kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep lingkaran dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Persamaan lingkaran*
- *Persamaan garis singgu-ng lingkaran*
- *Kedudukan garis pada lingkaran*
- *Kedudukan titik pada ling-karan*
- *Diskriminan*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Persamaan Lingkaran

Lingkaran adalah sebuah bangun datar yang sering digunakan sebagai alat bantu dalam menjelaskan ilmu pengetahuan lain maupun dalam berbagai penyelesaian masalah kehidupan sehari-hari.

Pada bab ini akan dibahas tentang lingkaran dan beberapa hal dasar yang pada akhirnya membantu kita untuk menemukan konsep tentang lingkaran itu sendiri.

Masalah-9.1

Gunung Sinabung di Kabupaten Karo, Sumatera Utara kembali meletus sekitar pukul 12.00 WIB hari Selasa tanggal 17 September 2013. Material yang dikeluarkan lebih banyak dibanding letusan pertama dua hari lalu. Akibat letusan ini banyak warga yang mengungsi. Pemerintah setempat pun memberikan peringatan agar masyarakat yang berada pada radius 3 km dari puncak gunung Sinabung harus segera mengungsi dan daerah tersebut harus bebas dari aktivitas dan dikosongkan untuk sementara. Bantulah pemerintah kabupaten Karo untuk menentukan daerah mana saja masyarakatnya harus mengungsi. (Petunjuk: Gunakan Peta Kabupaten Karo)

Alternatif Penyelesaian

Gambar 9.1: Peta Kabupaten Karo

Menjelaskan kepada siswa kompetensi-kompetensi dasar yang harus dimiliki siswa setelah menyelesaikan materi lingkaran. Tanyakan kepada siswa tentang konsep lingkaran yang digunakan dalam kehidupan nyata seperti ban sepeda, jam dinding, dan jenis yang lain.

Selanjutnya ajak siswa untuk memahami Masalah 9.1. masalah ini adalah masalah yang benar-benar terjadi yaitu mengenai letusan gunung Sinabung. Ajak siswa untuk memahami Peta Kabupaten Karo tempat terjadinya letusan gunung itu. Beri pemahaman kepada siswa bahwa yang merupakan titik lingkaran adalah puncak gunung Sinabung.

Berikan juga informasi kepada siswa bahwa wilayah Indonesia banyak sekali gunung berapinya, sehingga jika ada kejadian seperti ini perlu diinformasikan kepada siswa akan bahaya letusan gunung berapi tersebut.

Ajak juga siswa untuk bersikap saling mengasihi sesamanya jika terjadi bencana alam, sehingga mereka dapat menolong sesamanya melalui perbuatan sekecil apapun.

Pertama kali yang dilakukan adalah membuat radius (jari-jari) sepanjang 3 km dari titik pusatnya yaitu puncak Gunung Sinabung. Setelah itu tariklah secara melingkar dan terbentuklah sebuah lingkaran. Berdasarkan daerah lingkaran yang dibuat tersebut ternyata terdapat beberapa desa yang penduduknya harus mengungsi karena berada pada daerah radius 3 km yaitu Desa Simacem, Bekerah, Sigaranggarang, dan Kutatonggal di Kecamatan Naman Teran, serta Desa Sukameriah di Kecamatan Payung.

Berdasarkan penyelesaian masalah 9.1 fasilitasi siswa untuk membuat definisi 9.1 dan memahami definisi yang telah dibuat

Definisi 9.1

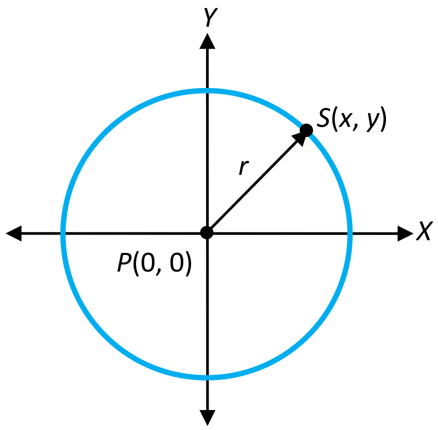
Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik pada suatu bidang yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu

Selanjutnya ajak siswa untuk memahami masalah 9.2. Setelah siswa memahami maksud dari Masalah 9.2 suruh siswa untuk menyelesaikan masalah tersebut. Tujuan diselesaikannya masalah 9.2 ini adalah agar siswa dapat menentukan rumus dari bentuk lingkaran yang berpusat di titik (0, 0) dan berjari-jari r. Pandu siswa untuk menyelesaikan masalah 9.2 dan ingatkan kembali kepada siswa tentang rumus jarak dua titik sebagai bekal awal untuk menyelesaikan masalah tersebut.

Masalah-9.2

Misalkan Gambar 9.1 pada Masalah 9.1 dipindahkan ke bidang koordinat cartesius dan gunung Sinabung berpusat di $P(0, 0)$ dan jari-jarinya r = 3. Misalkan salah satu desa yaitu Sigaranggarang berada pada titik $S(x, y)$ pada lingkaran tersebut, tentukanlah persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif penyelesaian



Gambar 9.2: Lingkaran pusat $P(0, 0)$ dan jari-jari $r = 3$

jarak titik $S(x, y)$ ke titik $P(0, 0)$ dapat ditentukan dengan rumus:

$$|PS| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

Diketahui bahwa jari-jarinya adalah r dan $PS = r$, maka

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$$

Kuadratkan kedua ruas sehingga diperoleh

$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$

Diketahui bahwa r = 3, maka diperoleh

$x^2 + y^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$

Sifat 9.1

Persamaan lingkaran yang berpusat di P(0, 0) dan memiliki jari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$

Atau dengan kata lain

Jika L adalah himpunan titik-titik yang berjarak r terhadap titik $P(0, 0)$ maka L $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$

Dengan diselesaikannya Masalah 9.2, pastikan siswa dapat mendefinisikan bentuk baku persamaan lingkaran yang berpusat di titik (0, 0) dan berjari-jari r sehingga siswa memahami arti dari Sifat 9.1

Contoh 9.1

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(0, 0) dengan jari-jari sebagai berikut:

a. 3 b. 4 c. 5 d. 6

Sebagai bentuk uji tentang pemahaman siswa terhadap Definisi 9.2, suruh siswa untuk memahami contoh 9.1 dan menyelesaikannya dengan caranya sendiri.

Alternatif Penyelesaian

a. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(0, 0) dengan panjang jari-jari 3 adalah

$x^2 + y^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$

b. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(0, 0) dengan panjang jari-jari 4 adalah

$x^2 + y^2 = 4^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$

c. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(0, 0) dengan panjang jari-jari 5 adalah

$x^2 + y^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$

d. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(0, 0) dengan panjang jari-jari 6 adalah

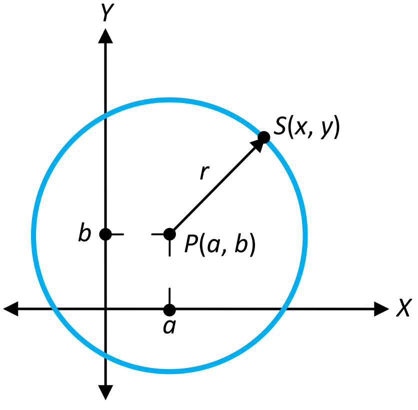
$x^2 + y^2 = 6^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 36$

Selanjutnya ajak siswa untuk mengamati masalah 9.3 dan suruh siswa untuk menyelesaikannya dengan caranya sendiri, selanjutnya fasilitasi siswa jika ada yang bertanya. Agar siswa memahami dengan baik masalah yang diberikan suruh siswa untuk mencoba menggambarkannya selanjutnya ajak siswa untuk menyimpulkan hasil dari penyelesaian masalah yang diberikan. Tujuan dari menyelesaikan masalah ini adalah agar siswa dapat mendefinisikan bentuk baku dari persamaan lingkaran yang berpusat di titik (0, 0) dan berjari-

Masalah-9.3

Misalkan gambar pada masalah 1 dipindahkan ke bidang koordinat Kartesius dan gunung Sinabung berpusat di $P(a, b)$ dan jari-jarinya r = 3 Misalkan salah satu desa yaitu Sukameriah berada pada titik $S(x, y)$, tentukanlah persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:



Gambar 9.3: Lingkaran pusat $P(a, b)$ dilalui titik $S(x, y)$

Jarak titik $S(x, y)$ ke titik $P(a, b)$ adalah

$$|PS| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Diketahui bahwa jari-jarinya adalah r dan $PS = r$, maka

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Dikuadratkan kedua ruas maka diperoleh $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Berdasarkan informasi diketahui bahwa $r = 3$, maka diperoleh

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = 9$

Sifat 9.2

Persamaan lingkaran yang berpusat di $P(a, b)$ dan memiliki jari-jari r adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Atau dengan kata lain

Jika L adalah himpunan titik-titik yang berjarak r terhadap titik $P(a, b)$ maka $L \{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$

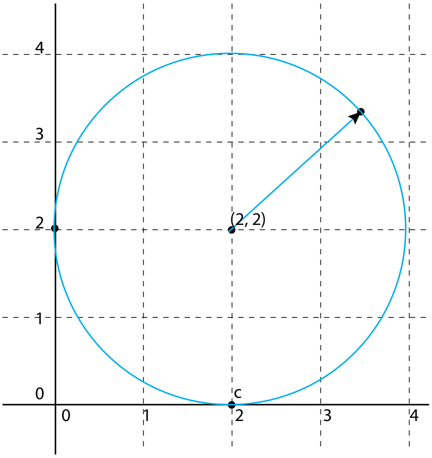
Contoh 9.2

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (2, 2) dan berjari-jari $r = 2$.

jari r. Seperti halnya menyelesaikan Masalah 9.2, ingatkan kembali siswa tentang rumus jarak dua titik sebagai bekal awal untuk menyelesaikan masalah tersebut.

Dengan diselesaikannya Masalah 9.3, pastikan siswa dapat mendefinisikan bentuk baku persamaan lingkaran yang berpusat di titik (a, b) dan berjari-jari r sehingga siswa memahami arti dari sifat 9.2.

Sebagai bentuk uji tentang pemahaman siswa terhadap Sifat 9.2, suruh siswa untuk memahami contoh 9.2 dan 9.3 serta menyelesaikannya dengan caranya sendiri.



Gambar 9.4 : Lingkaran pusat (2, 2) dan $r = 2$

Alternatif Penyelesaian:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$a = 2;\ b = 2;\ c = 2$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Jadi persamaan lingkaran yang berpusat di (2, 2) dan berjari-jari $r = 2$ adalah $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Contoh 9.3

Tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran berikut!

a. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

b. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$

c. $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$

d. $(x + 2)^2 + y^2 = 16$

Alternatif Penyelesaian:

a. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$

$a = 2; b = -2; r = 2$

lingkaran tersebut berpusat di titik (2, – 2) dan berjari-jari 2

b. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$

$a = -2; b = -2; r = 3$

Lingkaran tersebut berpusat di titik (–2, –2) dan berjari-jari 3

c. $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$

$a = -2; b = 2; r = 4$

Lingkaran tersebut berpusat di titik (–2, 2) dan berjari-jari 4

d. $(x + 2)^2 + y^2 = 16$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 16$

$a = -2; b = 0; r = 4$

Lingkaran tersebut berpusat di titik (–2, 0) dan berjari-jari 4

2. Bentuk Umum Persamaan Lingkaran

Pada pembahasan sebelumnya telah dibahas tentang konsep persamaan lingkaran yaitu :

a. Lingkaran yang berpusat di $P(0, 0)$ dan berjari-jari r persamaannya adalah

$x^2 + y^2 = r^2$

b. Lingkaran yang berpusat di $P(a, b)$ dan berjari-jari r persamaannya adalah

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Berikan informasi kepada siswa bahwa materi yang akan dibahas selanjutnya adalah mengenai sebuah lingkaran yang digambarkan pada koordinat kartesius berjari-jari r yang berpusat di (0, 0) dan (a, b). informasikan juga kepada siswa bahwa persamaan di samping dinamakan bentuk baku persamaan lingkaran .

Jika diperhatikan kedua bentuk persamaan lingkaran tersebut, maka dapat langsung diketahui titik pusat lingkaran dan panjang jari-jarinya. Persamaan tersebut dinamakan bentuk baku persamaan lingkaran.

Berikut ini merupakan kegiatan siswa untuk mengekspansi persamaan lingkaran yang berpusat di titik (a, b) dalam menemukan bentuk umum persamaan lingkaran.

Kegiatan 9.1

Jabarkanlah persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Alternatif Penyelesaian

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

Jika $-a = A$; $-b = B$; dan $a^2 + b^2 - r^2 = C$ maka diperoleh

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2ax + 2By + C = 0$

Berdasarkan kegiatan 9.1 diperoleh persamaan $x^2 + y^2 + 2a + 2by + C = 0$, persamaan tersebut merupakan persamaan umum lingkaran.

Sebagai bentuk evaluasi terhadap pemahaman siswa tentang bentuk umum persamaan lingkaran, berikan contoh 9.4 dan 9.5. jika siswa telah selesai menyelesaikannya suruh siswa untuk menjelaskannya kepada temannya yang lain.

Contoh 9.4

Berdasarkan kegiatan 9.1 diperoleh persamaan $a^2 + b^2 - r^2 = C$ dengan $-a = A$; $-b = B$, tentukanlah nilai r.

Alternatif Penyelesaian

Karena $a^2 + b^2 - r^2 = C$ dan $-a = A$; $-b = B$, maka $r^2 = A^2 + B^2 - C^2 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{A^2 + B^2 - C}$

Contoh 9.5

Berdasarkan kegiatan 9.1 diperoleh persamaan $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, ubahlah persamaan tersebut ke dalam persamaan bentuk baku persamaan lingkaran!

Alternatif Penyelesaian

$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2Ax + 2By = -C$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2Ax + A^2) - A^2 + (y^2 + 2By + B^2) - B^2 = -C$

$\Leftrightarrow (x + A)^2 + (y + B)^2 = A^2 + B^2 = -C$

$\Leftrightarrow (x + A)^2 + (y + B)^2 = \left(\sqrt{A^2 + B^2 - C}\right)^2$

Berdasarkan penyelesaian Latihan 9.2 diperoleh bahwa persamaan $(x + A)^2 + (y + B)^2 = \left(\sqrt{A^2 + B^2 - C}\right)^2$ adalah persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(-A, -B)$ dan berjari-jari $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$

Sifat 9.3

Bentuk Umum persamaan lingkaran adalah

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

dengan titik pusat $P(-A, -B)$ dan berjari-jari

$r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$

dengan A, B, C bilangan real dan $A^2 + B^2 \geq C^2$

Berdasarkan penyelesaian dari contoh 9.4 dan 9.5 ajak siswa untuk mengamati penyelesaian itu, lalu bertanya-tanya dalam hati tentang kemungkinan-kemungkinan hal-hal yang perlu dilakukan selanjutnya pastikan masing-masing siswa telah mencoba dan mengelompokkan hal-hal yang perlu untuk mendefinisikan sesuatu dari penyelesaian latihan yang telah dilakukan. Selanjutnya suruh siswa untuk menyimpulkan penyelesaian dari masalah yang dilakukan dengan membuat sebuah Fakta tentang bentuk umum lingkaran.

Berikan soal berikut sebagai bentuk uji pemahaman siswa tentang jari-jari. Pastikan siswa memahami maksud dari jari-jari.

Pertanyaan Kritis

1. Berdasarkan Fakta 9.1 diperoleh bahwa $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$. Bagaimana jika $A^2 + B^2 = 0$? Apa yang kamu peroleh?
2. Mengapa $C^2 \leq A^2 + B^2$

Alternatif Penyelesaian:

1. Jika $A^2 + B^2 - C = 0$ akan diperoleh jari-jari yang bernilai nol. Jika jari-jari suatu lingkaran bernilai nol maka bentuknya seperti sebuah titik.
2. Nilai C haruslah lebih besar sama dengan $A^2 + B^2$. Nilai C itu harus terpenuhi karena dalam bentuk akar ada persamaan $A^2 + B^2 - C$ sehingga nilai tersebut haruslah bernilai nol atau positif.

Berikan Contoh 9.6 sebagai penerapan dari prinsip jari-jari dan titik pusat lingkaran, minta siswa memahami penyelesaian contoh yang diberikan. Jika siswa mengalami kesulitan minta siswa yang lain untuk menjelaskan penyelesaian contoh tersebut.

Contoh 9.6

Tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran yang memiliki persamaan $x^2 + y^3 + 10x - 8y + 25 = 0$, lalu gambarkan lingkaran tersebut dalam bidang Kartesius!

Alternatif Penyelesaian:

$x^2 + y^3 + 10x - 8y + 25 = 0$

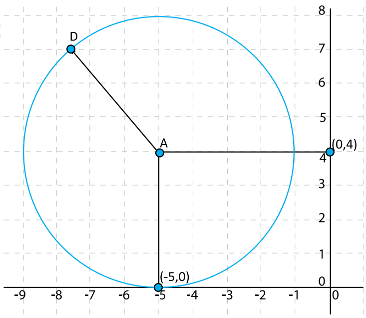
$A = -5$; $B = 4$, dan $C = 25$

Titik Pusat $(-5, 4)$

Jari-jari lingkaran

$$r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 - 25} = 4$$



Gambar 9.5 : Lingkaran $x^2 + y^3 + 10x - 8y + 25 = 0$

Latihan 9.1

Tentukanlah persamaan-persamaan di bawah ini yang merupakan persamaan lingkaran.

a. $x - y = 16$
b. $x^2 + 4y^2 + 8x - 6 - 16y = 25$
c. $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$
d. $x^2 - y^2 + 8x - 2y + 100 = 0$

Berikan Latihan 9.1 kepada siswa untuk menguji siswa apakah memahami tentang konsep dan prinsip persamaan lingkaran. Jika siswa mengalami kesulitan berikan pertanyaan-pertanyaan tentang persamaan-persamaan lingkaran dan kaitannya dengan jari-jari lingkaran yang dibentuk.

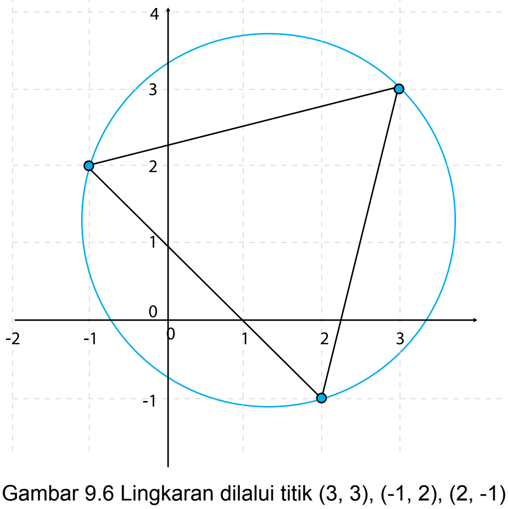
Alternatif Penyelesaian

a. $x - y = 16$ bukan persamaan lingkaran karena x dan y berpangkat 1.
b. $x^2 + 4y^2 + 8x - 6 - 16y = 25$ bukan persamaan lingkaran karena koefisien x^2 tidak sama dengan koefisien y^2.
c. $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$ persamaan lingkaran dengan titik pusat $(-3, 4)$ dan berjari-jari $r = 2$
d. $x^2 - y^2 + 8x - 2y + 100 = 0$ bukan persamaan lingkaran karena jari-jari nya imaginer.

Latihan 9.2

Misalkan pada bidang koordinat Kartesius desa Sigaranggarang terletak pada titik (3, 3), desa sukameriah terletak pada titik (–1, 2), dan desa Kutatonggal terletak pada titik (2, –1) yang terkena dalam radius daerah yang penduduknya harus mengungsi. Tentukanlah letak gunung Sinabung (titik pusat) dan radiusnya!

Berikan Latihan 9.2 dan ajak siswa untuk mengamati secara seksama pertanyaan yang diberikan, lalu tanyakan hal-hal mengenai persamaan bentuk umum lingkaran dan ajak siswa untuk mencoba menyelesaikan permasalahan tersebut. Hasil yang diperoleh didiskusikan untuk ditarik kesimpulannya.



Gambar 9.6 Lingkaran dilalui titik (3, 3), (-1, 2), (2, -1)

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menentukan persamaan lingkarannya digunakan bentuk umum persamaan lingkaran yaitu $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ Persamaan

1) lingkaran yang melalui titik (3, 3)

   $3^2 + 3^2 + 2A(3) + 2By + C = 0$

   $\Leftrightarrow 9 + 9 + 6A + 6B + C = 0$

   $\Leftrightarrow 6A + 6B + C = -18$ ....(1)

2) Persamaan lingkaran yang melalui titik (–1, 2)

   $(-1)^2 + 2^2 + 2A(-1) + 2B(2) + C = 0$

   $\Leftrightarrow 1 + 4 - 2A + 4B + C = 0$

   $\Leftrightarrow -2A + 4B + C = -5$ ....(2)

3) Persamaan lingkaran yang melalui titik (2, –1)

   $2^2 + (-1)^2 + 2A(2) + 2B(-1) + C = 0$

   $\Leftrightarrow 4 + 1 + 4A - 2B + C = 0$

   $\Leftrightarrow 4A - 2B + C = -5$ ....(3)

Berdasarkan penyelesaian di atas diperoleh tiga persamaan yaitu:

$6A + 6B + C = -18$

$-2A + 4B + C = -5$

$4A - 2B + C = -5$

Dengan menyelesaikan ketiga persamaan di atas diperoleh $A = -\dfrac{39}{30} = -13$, $B = -\dfrac{39}{30} = -13$, $C = -\dfrac{168}{5} = 33{,}6$, sehingga persamaan lingkarannya menjadi

$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$

$x^2 + y^2 + 2(-1{,}3)x + 2(-1{,}3)y + 3{,}6 = 0$

$x^2 + y^2 - 2{,}6x + 2{,}6y + 3{,}6 = 0$

Berdasarkan persamaan lingkaran yang diperoleh maka dapat ditentukan bahwa titik pusatnya (gunung Sinabung) adalah $P(-1{,}3, -1{,}3)$ dan berjari-jari $r = 5{,}78$.

Uji Kompetensi 9.1

Berikan soal-soal uji kompetensi ini sebagai tugas di rumah, yang bertujuan untuk mengetahui seberapa besarkah penguasaan siswa terhadap materi persamaan lingkaran yang berpusat di titik (0, 0) dan (a, b).

1. Tulislah persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(0, 0)$ dan melalui titik berikut.

   a. (1, 2) c. (0, 1)

   b. (3, 2) d. (4, 0)

2. Tulislah persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(0, 0)$ dengan panjang jari-jari sebagai berikut.

   a. 1 c. 3

   b. 2 d. 4

3. Tulislah dan gambarkan pada bidang koordinat Kartesius persamaan lingkaran yang

   a. Pusat di titik $P(1, 2)$ dan panjang jari-jari 1

   b. Pusat di titik $P(-1, 2)$ dan panjang jari-jari 2

   c. Pusat di titik $P(1, -2)$ dan panjang jari-jari 3

   d. Pusat di titik $P(-1, -2)$ dan panjang jari-jari 4

4. Tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran berikut.

   a. $x^2 + y^2 = 5$ e. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 31 = 0$

   b. $x^2 + y^2 - 4 = 5$ f. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 4y - 10 = 0$

   c. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 30$ g. $(x - p)^2 + (y - q)^2 = 25$

   d. $x^2 + (y - 4)^2 = 15$ h. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 6y = 20$

5. Tulis dan gambarkanlah persamaan lingkaran yang melalui titik-titik berikut.

   a. Titik $A(-4, 7)$, $B(-1, 7)$, dan $C(0, 5)$

   b. Titik $A(-2, 7)$, $B(2, 7)$, dan $C(0, 4)$

   c. Titik $A(0, 6)$, $B(0, 3)$, dan $C(-4, 3)$

   d. Titik $A(-2, 1)$, $B(1, 1)$, dan $C(-1, -1)$

6. Tentukan pusat lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 13 = 0$.

7. Tentukan pusat lingkaran $3x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

8. Nyatakanlah persamaan lingkaran-lingkaran berikut ini ke dalam bentuk umum

   a. Pusat (1, 2), dan jari-jari 1

   b. Pusat (–3, –4), dan jari-jari 2

   c. Pusat $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, dan jari-jari 3

   d. Pusat $\left(1\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, dan jari-jari $\frac{1}{2}$

9. Carilah pusat dan jari-jari lingkaran berikut ini.

   a. $x^2 + (y - 2)^2 = 1$

   b. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

   c. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = -3$

   d. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

   e. $x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$

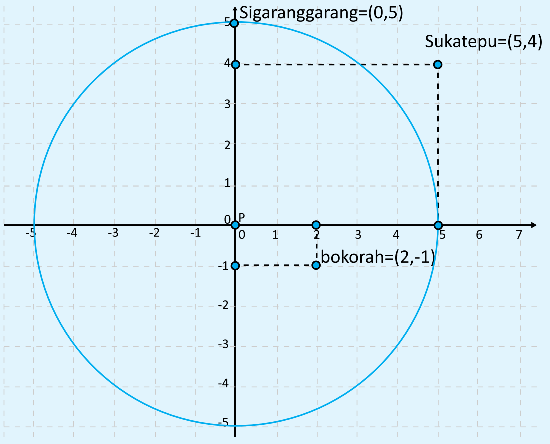
   f. $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$

10. Titik A(–2, a) terletak di dalam lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$?

3. Kedudukan Titik terhadap Lingkaran

Masalah-9.4

Masih ingatkah kamu masalah gunung Sinabung. Misalkan Gambar 9.7 berikut menyajikan letak beberapa desa dengan menganggap gunung Sinabung berada pada titik P(0, 0) dan berjari jari 5 satuan. Tentukan kedudukan titik desa Sigaranggarang, desa Sukatepu, dan desa Bekerah berdasarkan gambar di atas. Apakah penduduk desa-desa tersebut perlu mengungsi?



Gambar 9.7 Lingkaran dengan Pusat (0, 0) dan *r* = 5

Selanjutnya ajak siswa untuk mengamati masalah 9.4 dan suruh siswa untuk menyelesaikannya dengan caranya sendiri, selanjutnya fasilitasi siswa jika ada yang bertanya. Agar siswa memahami dengan baik masalah yang diberikan suruh siswa untuk mencoba menggambarkannya selanjutnya ajak siswa untuk menyimpulkan hasil dari penyelesaian masalah yang diberikan. Tujuan dari menyelesaikan masalah ini adalah agar siswa dapat kedudukan suatu titik pada sebuah lingkaran yang berpusat di titik (0, 0).

Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan permasalahan di atas maka persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 = 25$

Untuk desa Sigaranggarang dengan titik (0, 5)

Jika disubstitusikan titik (0, 5) pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ maka diperoleh

$0^2 + 5^2 = 0 + 25 = 25 = 25$

Artinya titik (0, 5) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$

Oleh karena itu desa Sigaranggarang terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$

Kesimpulannya, penduduk desa Sigaranggarang perlu mengungsi.

Untuk desa Sukatepu dengan titik (5, 4)

Jika disubstitusikan titik (5, 4) pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ maka diperoleh

$5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 > 25$

Artinya titik (5, 4) terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 25$

Oleh karena itu desa Sukatepu terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 25$

Kesimpulannya, penduduk desa Sukatepu tidak perlu mengungsi.

Untuk desa Bekerah dengan titik (2, –1)

Jika disubstitusikan titik (2, –1) pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ maka diperoleh

$2^2 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5 < 25$

Artinya (2, –1) terletak di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 25$

Oleh karena itu desa Bekerah terletak di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 25$.

Kesimpulannya, penduduk desa Bekerah perlu mengungsi.

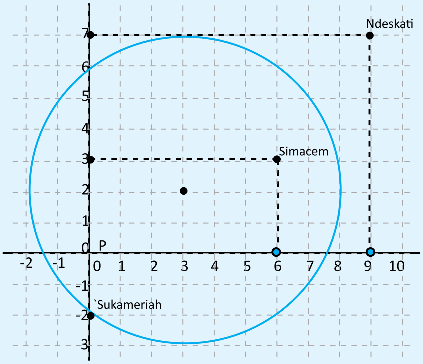
Berdasarkan penyelesaian Masalah 9.4 arahkan siswa untuk dapat membuat kesimpulan dan mendefinisikan tentang kedudukan suatu titik terhadap sebuah lingkaran yang berpusat di titik (0, 0)

Definisi 9.2

1. Suatu titik $A(v, w)$ terletak di dalam lingkaran yang berpusat di $P(0, 0)$ dan berjari-jari r jika $v^2 + w^2 < r^2$.
2. Suatu titik $A(v, w)$ terletak pada lingkaran yang berpusat di $P(0, 0)$ dan berjari-jari r jika $v^2 + w^2 = r^2$.
3. Suatu titik $A(v, w)$ terletak di luar lingkaran yang berpusat di $P(0, 0)$ dan berjari-jari r jika $v^2 + w^2 > r^2$.

Masalah-9.5

Misalkan Gambar 9.8 berikut menyajikan letak beberapa desa dengan menganggap gunung Sinabung berada pada titik $P(3, 2)$ dan berjari-jari 5 satuan. Tentukan kedudukan titik desa Sigaranggarang, desa Sukatepu, dan desa bekerah berdasarkan gambar di samping. Apakah penduduk desa-desa tersebut perlu mengungsi?



Gambar 9.8 : Lingkaran dengan Pusat $P(3, 2)$ dan $r = 5$

Selanjutnya ajak siswa untuk mengamati masalah 9.5 ajak siswa untuk mengamati masalah tersebut fasilitasi siswa jika ada yang bertanya. Agar siswa memahami dengan baik masalah yang diberikan suruh siswa untuk mencoba menggambarkannya selanjutnya ajak siswa untuk menyimpulkan hasil dari penyelesaian masalah yang diberikan. Tujuan dari menyelesaikan masalah ini adalah agar siswa dapat kedudukan suatu titik pada sebuah lingkaran yang berpusat di titik (a, b).

Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan permasalahan di atas maka persamaan lingkarannya adalah $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

Untuk desa Sukameriah dengan titik (0, –2)

Jika disubstitusikan titik (0, 5) pada persamaan lingkaran $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ maka diperoleh $(0 - 3)^2 + (- 2 - 2)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 25$ Ternyata desa Sukameriah terletak pada lingkaran $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ Kesimpulannya, penduduk desa Sukameriah perlu mengungsi.

Untuk desa Simacem dengan titik (6, 3)

Jika disubstitusikan titik (6, 3) pada persamaan lingkaran $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ maka diperoleh $(6-3)^2+(3-2)^2=3^2+1^2=9+1=10<25$ Ternyata desa Simacem terletak di dalam lingkaran $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ Kesimpulannya, penduduk desa Simacem perlu mengungsi.

Untuk desa Ndeskati dengan titik (9, 7)

Jika disubstitusikan titik (9, 7) pada persamaan lingkaran $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ maka diperoleh $(9-3)^2+(7-2)^2=6^2+5^2=36+25=61>25$

Ternyata desa Simacem terletak di luar lingkaran $(x-3)^2+(y-2)^2=25$

Kesimpulannya, penduduk desa Ndeskati tidak perlu mengungsi.

Berdasarkan penyelesaian Masalah 9.5 arahkan siswa untuk dapat membuat kesimpulan dan mendefinisikan tentang kedudukan suatu titik terhadap sebuah lingkaran yang berpusat di titik (0, 0)

Definisi 9.3

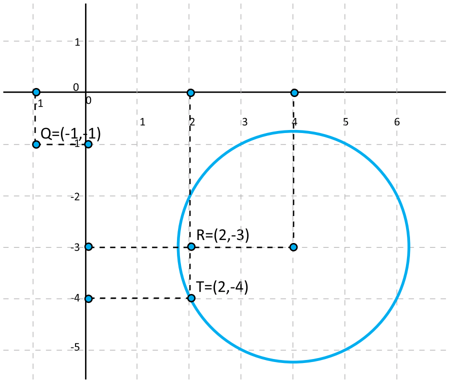
1. Suatu titik $A(v, w)$ terletak di dalam lingkaran yang berpusat di $P(a, b)$ dan berjari-jari r jika $(v-a)^2+(w-b)^2<r^2$.
2. Suatu titik $A(v, w)$ terletak pada lingkaran yang berpusat di $P(a, b)$ dan berjari-jari r jika $(v-a)^2+(w-b)^2=r^2$.
3. Suatu titik $A(v, w)$ terletak di luar lingkaran yang berpusat di $P(a, b)$ dan berjari-jari r jika $(v-a)^2+(w-b)^2>r^2$.

Berikan contoh 9.7 berikut kepada siswa untuk mengetahui pemahaman siswa terhadap Definisi 9.3, suruh siswa untuk memahami contoh 9.9 dan menyelesaikannya dengan caranya sendiri.

Contoh 9.7

Apakah titik-titik berikut terletak di luar, di dalam, atau pada lingkaran $x^2+y^2-8x+6y+20=0$?

a. $Q(-1, -1)$	c. $S(0, 5)$
b. $R(2, -3)$	d. $T(-4, 0)$



Gambar 9.9 : Titik-titik yang terletak di luar, di dalam, atau pada lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$?

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$ diubah menjadi bentuk baku persamaan kuadrat menjadi $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$

1. $Q(-1, -1)$ disubstitusikan ke persamaan $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ diperoleh

   $(-1 - 4)^2 + (-1 + 3)^2 = (-5)^2 + 2^2 = 29 > 5$

   Titik $Q(-1, -1)$ berada di luar lingkaran $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$
2. $R(2, -3)$ disubstitusikan ke persamaan $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ diperoleh

   $(2 - 4)^2 + (-3 + 3)^2 = (-2)^2 + 0 = 4 < 5$

   Titik $R(2, -3)$ berada di dalam lingkaran $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$
3. $S(4, -3)$ disubstitusikan ke persamaan $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ diperoleh

   $(4 - 4)^2 + (-3 + 3)^2 = 0 + 0 = 0 < 5$

   Titik $S(4, -3)$ berada di dalam lingkaran $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$

4. $T(2, -4)$ disubstitusikan ke persamaan $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ diperoleh

   $(2 - 4)^2 + (-4 + 3)^2 = (-2)^2 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5 = 5$

   Titik $T(2, -4)$ berada pada lingkaran $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$

Pertanyaan Kritis

Mengapa (pada contoh 9.7) untuk menentukan suatu titik terletak di luar, di dalam, atau pada lingkaran, persamaan lingkaran harus berbentuk persamaan lingkaran baku?

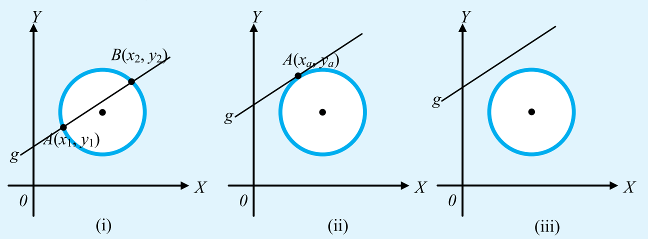
Pertanyaan ini untuk menguji siswa apakah memahami letak titik terhadap lingkaran. Bentuk persamaan suatu lingkaran tidak harus diubah ke dalam bentuk persamaan lingkaran baku. Misalkan pada contoh 9.9 jika titik S(4, –3)di subsitusikan ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$ maka diperoleh $-5 < 0$, ini menunjukkan bahwa titik S(4, –3) berada di luar lingkaran. Ajak siswa untuk mencoba titik-titik lain pada contoh 9.9

Selanjutnya ajak siswa untuk mengamati masalah 9.6 fasilitasi siswa jika ada yang bertanya. Agar siswa memahami dengan baik masalah yang diberikan suruh siswa untuk mencoba menyelidiki gambar tersebut selanjutnya ajak siswa untuk menyimpulkan hasil dari penyelesaian masalah yang diberikan. Tujuan dari menyelesaikan

4. Kedudukan Garis terhadap Lingkaran

Masalah-9.6

Perhatikan gambar berikut ini



Gambar 9.10 : Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran

Gambar 9.10 merupakan kedudukan garis terhadap lingkaran. Berdasarkan gambar di atas, buatlah pendapatmu mengenai gambar tersebut!

masalah ini adalah agar siswa dapat kedudukan suatu garis pada sebuah lingkaran.

Alternatif Penyelesaian:

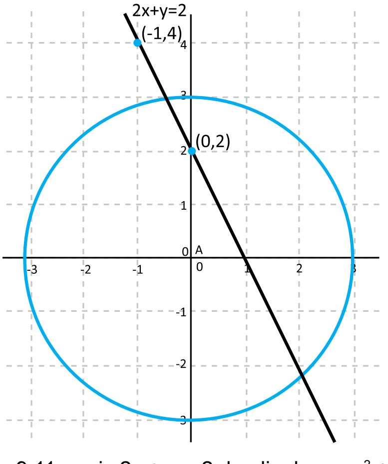
Gambar 9.10 (i) merepresentasikan tentang sebuah garis yang memotong sebuah lingkaran di dua titik yang berlainan.

Gambar 9.10 (ii) merepresentasikan tentang sebuah garis yang memotong sebuah lingkaran pada suatu titik atau dengan kata lain menyinggung lingkaran.

Gambar 9.10 (iii) merepresentasikan tentang sebuah garis yang tidak memotong sebuah lingkaran.

Contoh 9.8

Diberikan sebuah garis $2x + y = 2$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$, selesaikanlah sistem persamaan linear-kuadrat tersebut! Kemudian tentukan nilai diskriminannya.



Gambar 9.11: garis $2x + y = 2$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$

Alternatif Penyelesaian :

$2x + y = 2$ ....(1)

$x^2 + y^2 = 9$ ....(2)

digambarkan pada bidang Kartesius akan diperoleh seperti gambar 9.11. Berdasarkan persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2 - 2x)^2 = 5$$

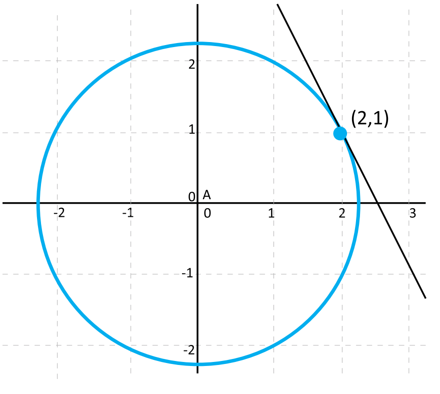
$$\Leftrightarrow x^2 + 4 - 8x + 4x^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 8x - 1 = 0$$

Sehingga selesaian dari sistem persamaan linear-kuadrat tersebut adalah $5x^2 - 8x - 1 = 0$, dengan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(5)(-1) = 64 + 20 = 84$

Contoh 9.9

Diberikan sebuah garis $2x + y = 5$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 5$, selesaikanlah sistem persamaan linear-kuadrat tersebut! Kemudian tentukan nilai diskriminannya.



Gambar 9.12 : garis $2x + y = 5$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 5$

Alternatif Penyelesaian:

$2x + y = 5$ ....(1)

$x^2 + y^2 = 5$ ....(2)

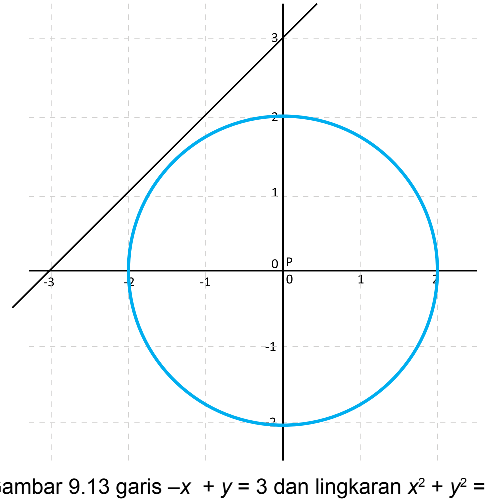
Digambarkan pada bidang kartesius akan diperoleh seperti gambar 9.12. Berdasarkan persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 = 5 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + (-2x + 5)^2 = 5 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 4x^2 - 20x + 25 - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 5x^2 + 20x^2 + 20 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 4x + 4 = 0 \end{aligned}$$

Sehingga selesaian dari sistem persamaan linear-kuadrat tersebut adalah $x^2 + 4x + 4 = 0$ dengan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$

Contoh 9.10

Diberikan sebuah garis $-x + y = 3$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 5$, selesaikan-lah sistem persamaan linear-kuadrat tersebut! Kemudian tentukan nilai diskriminannya.



Gambar 9.13 garis $-x + y = 3$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 5$

Alternatif Penyelesaian:

$-x + y = 3$ ....(1)

$x^2 + y^2 = 5$..(2)

Digambarkan pada bidang kartesius akan diperoleh seperti gambar 9.13. Berdasarkan persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$x^2 + y^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (3 + x)^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 9 + 6x + x^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$$

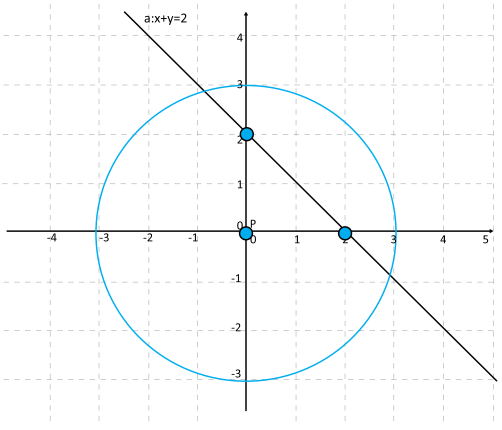
Sehingga selesaian dari sistem persamaan linear-kuadrat tersebut adalah $x^2 + 3x + 2$ dengan nilai diksriminan

Berdasarkan $x + y = 2$ dan diperoleh $x = 2 - y$ sehingga

$$(2 - 2y)^2 + y^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 2y^2 - 4y - 5 = 0$$

Latihan 9.3

Diketahui sebuah garis $x + y = 2$ dan sebuah lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ seperti yang disajikan pada gambar 9.14, kemudian tentukan persamaan kuadrat gabungan antara garis dan lingkaran, kemudian tentukan nilai diskriminannya.



Gambar 9.14 garis $x + y = 2$ dan sebuah lingkaran $x^2 + y^2 = 9$

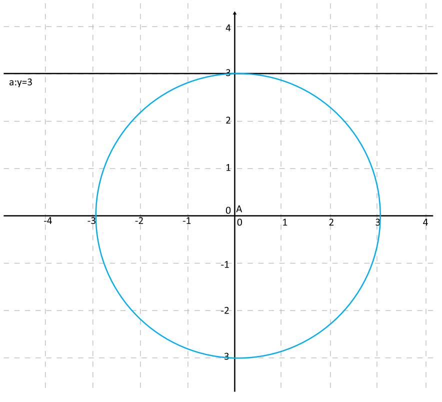
Latihan 9.4

Diketahui sebuah garis y = 3 dan sebuah lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ seperti yang disajikan pada gambar 9.15, kemudian tentukan persamaan kuadrat gabungan antara garis dan lingkaran, kemudian tentukan nilai dis-kriminannya.

Berdasarkan $y = 3$ *dan* $x^2 + y^2 = 9$ *diperoleh*

$x^2 + (3)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 = 0$



Gambar 9.15 garis y = 3 dan sebuah lingkaran $x^2 + y^2 = 9$

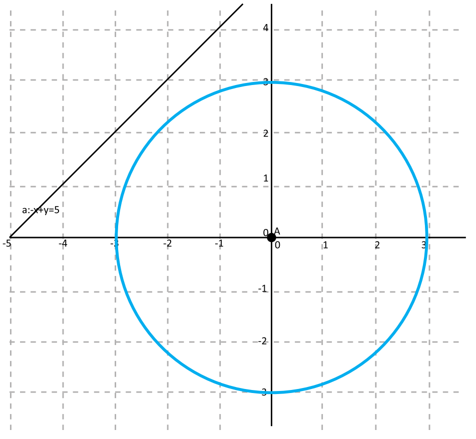
Latihan 9.5

Diketahui sebuah garis $-x + y = 5$ dan sbuah lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ seperti yang disajikan pada gambar 9.16, kemudian tentukan persamaan kuadrat gabungan antara garis dan lingkaran, kemudian tentukan nilai diskriminannya.

Berdasarkan $-x + y = 5$ *dan diperoleh* $y = 5 + x$ *sehingga*

$x^2 + (5 + x)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 8 = 0$



Gambar 9.16 garis $-x + y = 5$ dan sbuah lingkaran $x^2 + y^2 = 9$

Latihan 9.6

Berdasarkan penyelesaian Latihan 9.1, 9.2, dan 9.3 syarat apa yang harus dipenuhi agar garis memotong lingkaran di dua titik yang berlainan, garis menyinggung lingkaran, dan garis tidak memotong maupun menyinggung lingkaran?

Syarat yang harus dipenuhi oleh garis jika memotong lingkaran adalah diskriminan dari persamaan kuadrat gabungan antara garis dan lingkaran lebih besar dari nol.

Syarat yang harus dipenuhi oleh garis jika menyinggung lingkaran adalah diskriminan dari persamaan kuadrat gabungan antara garis dan lingkaran sama dengan nol.

Syarat yang harus dipenuhi oleh garis jika tidak memotong maupun menyinggung lingkaran adalah diskriminan dari persamaan kuadrat gabungan antara garis dan lingkaran lebih kecil dari nol.

Sifat 9.4

Misalkan g garis dengan persamaan $y = ax + b$ dan L lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = r^2$

Kedudukan garis g terhadap sebuah lingkaran ditentukan oleh nilai diskriminan $D = (1 + a^2)r^2 - b^2$, yaitu:

(1) $D > 0 \Leftrightarrow$ garis g memotong lingkaran di dua titik yang berlainan

(2) $D = 0 \Leftrightarrow$ garis g menyinggung lingkaran

(3) $D < 0 \Leftrightarrow$ garis g tidak memotong maupun menyinggung lingkaran

Ajak siswa untuk memahami sifat 9.4 yaitu tentang kedudukan garis terhadap lingkaran. Untuk menentukan nilai diskriminannya yaitu:

substitusikan $y = ax + b$ *ke persamaan* $x^2 + y^2 = r^2$ *diperoleh* $x^2 + (ax + b)^2 = r^2$ *sehingga* $x2 + a^2x^2 + 2abx + b^2 + r^2$.

diperoleh $(1 + a^2)x^2 + 2abx + b^2 - r^2 = 0$

Berdasarkan persamaan kuadrat tersebut maka diperoleh nilai diskriminannya adalah $D = (1 + a^2)\, r^2 - b^2$

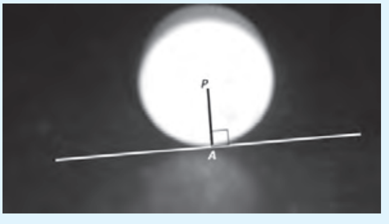
5. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

a. Persamaan Garis Singgung melalui Suatu Titik pada Lingkaran berpusat *P*(0, 0) dan berjari-jari *r*

Masalah berikut ini diberikan untuk membangun konsep persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di (0, 0) dan berjari-jari r. perlu dijelaskan kepada siswa bahwa tutup botol yang dipermainkan itu dianggap sebuah lingkaran yang melintasi sebuah lintasan.

Masalah-9.7

Beberapa anak berkumpul dan sedang bermain. Di tangan mereka terdapat beberapa tutup botol plastik yang dijadikan permainan ibarat kelereng. Tutup botol dibuat berdiri, lalu bagian atasnya ditekan dengan telunjuk agar tutup botol itu meluncur ke depan. Setelah itu mereka lalu berlari mengejar tutup botol yang melaju kencang itu.



Gambar 9.17 Tutup Botol terletak di lantai

Dari gambar 9.17 di atas jelas terlihat bahwa lantai yang dilalui tutup botol selalu menyinggung di titik $A(x_1, y_1)$. Garis di lantai yang dilalui tutup botol dapat disebut garis singgung dan titik yang bersinggungan antara tutup botol dan lantai disebut titik singgung. Perhatikan bahwa jari-jari yang melalui titik singgung $A(x_1, y_1)$ tegak lurus dengan lantai. Misalkan titik *P* adalah titik pusat lingkaran di (0, 0). Berdasarkan keadaan di atas tentukanlah persamaan garis *g* tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalnya titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada sebuah lingkaran yang berpusat di $O(0, 0)$ dan berjari-jari r yaitu, $x^2 + y^2 = r^2$.

Asumsikan $x_1 \neq 0$ dan $y_1 \neq 0$ Gradien garis PA adalah $m_{op} = \frac{y_1}{x_1}$, garis singgung g tegak lurus dengan garis PA. Gradien garis g adalah $m_g = -\frac{1}{m_{OP}} = -\frac{1}{\frac{y_1}{x_1}} = -\frac{x_1}{y_1}$. Akibatnya,

persamaan garis singgung g adalah

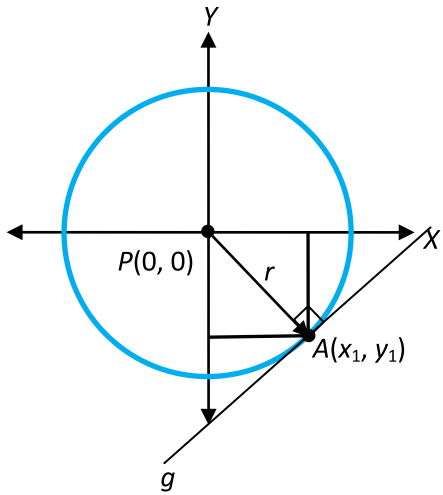
$y - y_1 = m_g\,(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$

$\Leftrightarrow (y - y_1)y_1 = -x_1\,(x - x_1)$

$\Leftrightarrow yy_1 - y_1^2 = -xx_1^2$

$\Leftrightarrow xx_1 - yy_1^2 = x_1^2 + y_1^2$



Gambar 9.18 : Lingkaran Pusat (0, 0)
dan jari-jari *r*

Karena $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, maka diperoleh $x_1^2\, y_1^2\, r$. Jadi, persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di titik $P(0, 0)$ dan berjari-jari r yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = r$ adalah $x_1x + y_1y = r^2$

Sifat 9.5

Persamaan garis singgung yang melalui titik ($x1$, $y1$) pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $x_1x + y_1y = r^2$

Ajak siswa untuk memahami sifat 9.5 tentang persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat lingkaran (0, 0).

Contoh 9.11

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik (2, 0) dengan pusat P(0,0) dan berjari-jari 3!

Minta siswa untuk memahami contoh 9.11 sebagai penerapan dari prinsip persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di titik (0, 0).

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan lingkaran dengan pusat (0, 0) dan berjari-jari 3 adalah $x_2 + y_2 = 9$ Persamaan garis singgung lingkaran $x_2 + y_2 = 9$ yang melalui titik (2, 0) adalah

$x_1x + y_1y = r^2$

$\Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = 9$

$\Leftrightarrow x(2) + y(0) = 9$

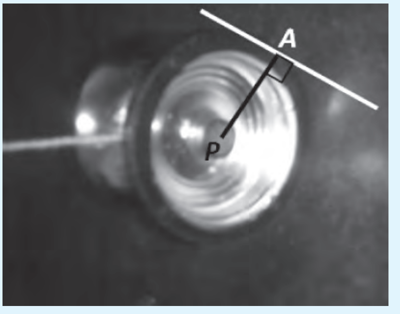
$\Leftrightarrow 2x - 9 = 0$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat (0, 0) dan berjari-jari 3 adalah $2x - 9 = 0$

Masalah berikut ini diberikan untuk membangun konsep persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di (a, b) dan berjari-jari r. perlu dijelaskan kepada siswa bahwa tutup botol yang dipermainkan itu dianggap sebuah lingkaran yang melintasi sebuah lintasan.

b. Persamaan Garis Singgung melalui Suatu Titik pada Lingkaran berpusat *P* (*a*, *b*) dan berjari-jari *r*

Masalah-9.8



Gambar 9.19 : Yoyo menyinggung dinding

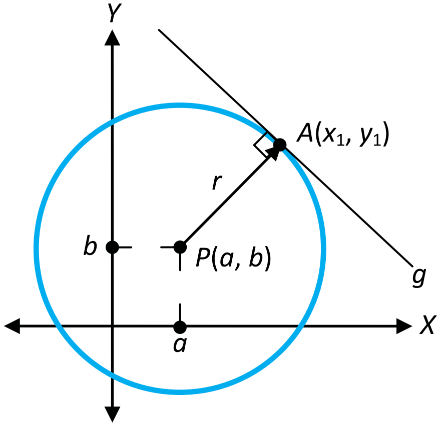
Seorang anak tampak asyik bermain yoyo bersama teman-temannya yang lain. Mainan Yoyo tersebut dimainkan sambil sesekali berjalan dan bergesekan dengan lantai, kadang-kadang juga dengan lihainya anak-anak tersebut melemparkannya sambil sesekali berjalan dan bersinggungan dengan tembok.

Dari gambar di atas jelas terlihat bahwa dinding yang disinggung yoyo selalu menyinggung di titik $A(x_1, y_1)$. Garis di dinding yang dilalui yoyo dapat disebut garis singgung dan titik yang bersinggungan antara yoyo dan dinding disebut titik singgung. Perhatikan bahwa jari-jari yang melalui titik singgung $A(x_1, y_1)$ tegak lurus dengan dinding. Misalkan titik P adalah titik pusat lingkaran di (a, b). Berdasarkan keadaan di atas tentukanlah persamaan garis g tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Perhatikan gambar 9.20.

Gradien garis PA adalah $m_{PA} = \dfrac{y_1 - b}{x_1 - a}$.



Gambar 9.20 : Lingkaran dilalui titik A(x_1, y_1)

Garis singgung g tegak lurus garis PA, sehingga gradien garis singgung g adalah $m_g = -\dfrac{1}{m_{PA}} = -\dfrac{x_1 - a}{y_1 - b}$

Persamaan garis singgung g adalah

$y - y_1\ m_g\ (x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - y_1 = -\dfrac{x_1 - a}{y_1 - b}(x - x_1)$

$\Leftrightarrow (y - y_1)(y1 - b) = -\ (x_1 - a)(x - x_1)$

$\Leftrightarrow yy_1 - yb - y_1^{\ 2} + y_1 b = -(x_1 x - x_1^{\ 2} - ax + ax_1)$

$\Leftrightarrow yy_1 - yb - y_1^{\ 2} + yb = -x_1 x + x_1^{\ 2} + ax - ax_1$

$\Leftrightarrow xx_1 - xa + x_1 a + yy_1 - yb + y_1 b = x_1^{\ 2} - y_1^{\ 2}$

Karena $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, maka diperoleh

$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x_1^{\ 2} - 2x_1 a + a^2 + y_1^{\ 2} - 2y_1 b + b^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} = r^2 + 2x_1 - a^2 + a^2 + 2y_1 b - b^2$

Substitusikan $x_1^2 + y_1^2 = r^2 + 2x_1 - a^2 + a^2 + 2y_1b - b^2$ ke persamaan garis singgung di atas, diperoleh

$xx_1 - xa + x_1a + yy_1 - yb + y_1b = r^2 + 2x_1a - a^2 + 2_1yb - b^2$

$\Leftrightarrow (xx_1 - xa + x_1a + a^2) + (yy_1 - yb + y_1b + b^2) = r^2$

$\Leftrightarrow (x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di titik P(a, b) dan berjari-jari r yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah

$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$

Ajak siswa untuk memahami Sifat 9.6 tentang persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat lingkaran (a, b).

Sifat 9.6

Persamaan garis singgung yang melalui titik (x_1, y_1) pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah $(x - a)(x_1 - q) + (y_1 - b) = r^2$

Minta siswa untuk memahami contoh 9.12 sebagai penerapan dari prinsip persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di titik (a, b).

Contoh 9.12

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik (2, 4) dengan persamaan lingkarannya adalah $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan garis singgung lingkaran $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ yang melalui titik (2, 4) adalah

$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x_1 - 1) + (y - 2)(y_1 - 2) = 5$

$\Leftrightarrow (x - 1)(2 - 1) + (y - 2)(4 - 2) = 5$

$\Leftrightarrow (x - 1)1 + (y - 2)2 = 5$

$\Leftrightarrow x - 1 + 2y - 4 = 5$

$\Leftrightarrow x + 2y = 0$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $(x-1)^2+(y-2)^2 = 5$ adalah $x+2y=0$

Latihan 9.7

1. Misalkan titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Tentukanlah persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2+y^2+ax+by+c=0$ yang melalui titik $A(x_1, y_1)$!

Alternatif Penyelesaian:

Jika diberikan lingkaran $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ dan diminta untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ maka yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut adalah dengan menggunakan konsep tentang persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(a, b)$.

Karena persamaan lingkaran yang berpusat di $P(A, B)$ adalah $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ maka persamaan lingkaran $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ berpusat di titik

$$P\left(-\frac{1}{2}A,-\frac{1}{2}B\right)$$

Berdasarkan prinsip persamaan garis singgung yang melalui titik (x_1, y_1) pada lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ diperoleh persamaannya adalah $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$

Karena $-a=A$ dan $-b=B$ sehingga persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ yang melalui $A(x_1, y_1)$ adalah $\left(x-\frac{1}{2}a\right)\left(x_1-\frac{1}{2}a\right)+\left(y-\frac{1}{2}b\right)\left(y_1-\frac{1}{2}b\right)=r^2$

2. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2+10x-12y+25=0$ di titik
   a. (5, 12)
   b. (1, 6)
   c. (–5, 0)

Minta siswa untuk menyelesaikan latihan 9.7
Soal no 1 bertujuan untuk memberitahukan kepada siswa bahwa persamaan lingkaran juga dapat berbentuk $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ dengan jari-jari $P\left(-\frac{1}{2}A,-\frac{1}{2}B\right)$ dan menerapkan prinsip persamaan garis singgung lingkaran
Soal no 2 bertujuan untuk menerapkan tentang konsep persamaan lingkaran $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ dengan jari-jari $P\left(-\frac{1}{2}A,-\frac{1}{2}B\right)$

Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan persamaan lingkaran yang diberikan yaitu maka pusat lingkarannya adalah   penyelesaian soal no 2 dapat digunakan prinsip yang ditemukan dalam soal no 1 sehingga

a. Untuk titik (5, 12) diperoleh

$$\left(x-\frac{1}{2}a\right)\left(x_1-\frac{1}{2}a\right)+\left(y-\frac{1}{2}b\right)\left(y_1-\frac{1}{2}b\right)=r^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}(-5)\right)\left(5-\frac{1}{2}(-5)\right)+\left(y-\frac{1}{2}(6)\right)\left(12-\frac{1}{2}(6)\right)=61$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)\left(5+\frac{5}{2}\right)+(y-3)(12-3)=61$$

$$\Leftrightarrow 30x + 36y - 521 = 0$$

b. Untuk titik (1, 6) diperoleh

$$\left(x-\frac{1}{2}a\right)\left(x_1-\frac{1}{2}a\right)+\left(y-\frac{1}{2}b\right)\left(y_1-\frac{1}{2}b\right)=r^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}(-5)\right)\left(1-\frac{1}{2}(-5)\right)+\left(y-\frac{1}{2}(6)\right)\left(6-\frac{1}{2}(6)\right)=61$$

$$\Leftrightarrow 14x + 12y - 245 = 0$$

c. Untuk titik (–5, 0) diperoleh

$$\left(x-\frac{1}{2}a\right)\left(x_1-\frac{1}{2}a\right)+\left(y-\frac{1}{2}b\right)\left(y_1-\frac{1}{2}b\right)=r^2$$

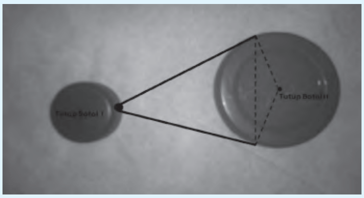
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}(-5)\right)\left(-5-\frac{1}{2}(-5)\right)+\left(y-\frac{1}{2}(6)\right)\left(0-\frac{1}{2}(6)\right)=61$$

$$\Leftrightarrow 10x + 12y + 233 = 0$$

c. Persamaan Garis Singgung Lingkaran melalui Suatu Titik di Luar Lingkaran

Masalah-9.9

Permainan tutup botol juga dapat dimainkan dengan versi yang berbeda. Beberapa membuat tutup botol dalam keadaan tertidur (seperti pada gambar), lalu bagian belakangnya disentil dengan jari telunjuk ataupun jari tengah agar tutup botol itu meluncur ke depan.



Gambar 9.21 Dua buah tutup botol

Setelah itu mereka lalu berlari mengejar tutup botol yang melaju kencang itu. Mereka tertawa ketika tutup botol salah satu pemain berhasil meluncur dan mengenai tutup botol lainnya. Dari gambar di atas jelas terlihat bahwa salah satu tutup botol akan menyinggung tutup botol yang lain di dua titik. Misalkan $A(x_1, y_1)$ adalah titik yang berada pada tutup botol I dan sasarannya adalah tepi tutup botol II. Berdasarkan keadaan di atas tentukanlah persamaan garis g_1 dan g_2 tersebut!

Masalah berikut ini diberikan untuk membangun konsep persamaan garis singgung lingkaran dari sebuah titik di luar lingkaran. perlu dijelaskan kepada siswa bahwa tutup botol yang dipermainkan itu dianggap menyinggung tutup botol yang lain sehingga ada dua kemungkinan titik singgungnya.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran. Terdapat dua garis singgung lingkaran yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan digambarkan sebagai berikut.

Langkah-langkah untuk menentukan persamaan garis singgungnya adalah sebagai berikut:

1. Misalkan gradien garis singgung yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ adalah m sehingga diperoleh persamaan.

   $$y - y_1 = m(x - x_1)$$
   $$\Leftrightarrow y - y_1 = mx - mx_1$$
   $$\Leftrightarrow y = mx - mx_1 + y_1$$

2. Dari langkah 1 substitusikan nilai $y = mx - mx_1 + y_1$ ke dalam persamaan lingkaran, sehingga diperoleh persamaan kuadrat dalam variabel x, kemudian tentukan nilai diskriminannya, dari persamaan kuadrat tersebut.
3. Karena garis singgung itu merupakan garis lurus dan menyinggung lingkaran akibatnya nilai diskriminan nol, Setelah itu carilah nilai m. Selanjutnya nilai m tersebut substitusikan ke persamaan $y = mx - mx_1 + y_1$ sehingga diperoleh persamaan-persamaan garis singgung tersebut.

Contoh 9.13

Tentukanlah persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat $P(0, 0)$ dan berjari-jari 5 yang melalui titik (7, 1).

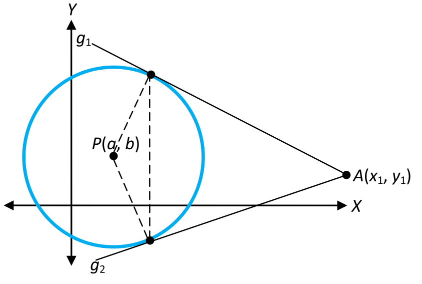
Alternatif Penyelesaian:

Titik (7, 1) berada di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ sebab jika titik (7, 1) disubstitusikan ke persamaan lingkaran tersebut diperoleh $7^2 + 1^2 = 50 > 25$

Persamaan lingkaran dengan pusat $P(0, 0)$ dan berjari-jari 5 adalah $x^2 + y^2 = 25$

Garis yang melalui titik (7, 1) dengan gradient m, memiliki persamaan

$$y = mx - mx_1 + y_1$$
$$\Rightarrow y = mx - 7m + 1$$



Gambar 9.22 : Dua Buah garis yang menyinggung Lingkaran

Substitusikan nilai $y = mx - 7m + 1$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ diperoleh

$$x^2 + (mx - 7m + 1)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + m^2x^2 - 49m^2 + 1 - 14m^2x + 2m - 14m = 25$$

$$\Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + (2m - 14m^2)x + (-49m^2 - 14m - 24) = 0$$

Selanjutnya ditentukan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$

$$\begin{aligned} D &= (2m - 14\,m^2)^2 - 4(1 + m^2)(49m^2 - 14m - 24) \\ &= 4m^2 - 56m^3 + 196m^4 - 4(49m^2 - 14m - 24 + 49m^4 - 14m^3 - 24m^2) \\ &= 4m^2 - 56mm^3 + 1196m^4 - 196m^2 + 56m + 96 - 196m^4 + 56m^3 + 96m^2 = 4m^2 + 96m^2 - 196m^2 + 56m + 96 \\ &= -96m^2 + 56m + 96 \end{aligned}$$

Syarat $D = 0$

$$-96m^2 + 56m + 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow 96m^2 - 56m - 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12m^2 - 7m - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4m + 3)(3m - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{3}{4} \text{ atau } m = \frac{4}{3}$$

Sehingga diperoleh persamaan garis singgung

$3x - 4y - 25 = 0$ atau $4x - 3y - 25 = 0$

Latihan ini ingin mengasah kemampuan siswa dalam menentukan letak titik terhadap lingkaran. latihan ini tentu tidak dapat diselesaikan karena titik (0, 2) berada di dalam lingkaran, berarti tidak mungkin ada garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik (0, 2)

Latihan 9.8

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik (0, 2).

Berikan soal-soal uji kompetensi ini sebagai tugas di rumah, yang bertujuan untuk mengetahui seberapa besarkah penguasaan siswa terhadap materi persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di titik (0, 0) dan (a, b).

Uji Kompetensi 9.2

1. Tentukanlah nilai C agar garis $y = x + C$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$.
2. Berapakah nilai r jika r positif dan $x + y = r$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = r$?
3. Tentukanlah gradien garis singgung jika kedua garis lurus yang ditarik dari titik (0, 0) dan menyinggung sebuah lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 – 6x + 2y + 5 = 0$!
4. Tentukanlah persamaan garis yang sejajar dengan $x – 2y = 0$ dan membagi lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ menjadi dua bagian yang sama!
5. Tentukanlah persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 – 4x + 6y – 12 = 0$ melalui titik (6, –6)!
6. Jika lingkaran $x^2 + y^2 – 2ax + 6y + 49 = 0$ menyinggung sumbu x, tentukanlah nilai a!
7. Tentukanlah persamaan lingkaran yang berpusat di (3, 4) dan menyinggung sumbu x kemudian tentukan persamaan lingkaran hasil pencerminan lingkaran terhadap gaaris $y = – x$!

8. Tentukanlah persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ bergradien 1!

9. Tentukanlah persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik $(-3, -4)$!

10. Tentukanlah nilai q jika diberikan garis $x + y = q$, menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 8$ di titik A pada kuadran pertama!

11. Tentukanlah nilai k, jika titik $(-5, k)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 5y - 12 = 0$!

12. Tentukanlah nilai C agar garis $y = x + C$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$!

13. Tentukanlah persamaan garis lurus yang melalui pusat lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$ tegak lurus garis $2x - y + 3 = 0$!

Projek

Kumpulkanlah kejadian yang terkait tentang permasalahan penerapan sifat-sifat lingkaran dalam kehidupan nyata yang ada di sekitarmu. Ujilah sifat-sifat dan rumus lingkaran di dalam pemecahan masalah tersebut, kemudian buatlah laporan hasil karyamu untuk disajikan di depan kelas.

Tugas proyek diberikan sebagai tugas kelompok untuk menginformasikan kepada siswa bahwa belajar tentang lingkaran sangat diperlukan dalam perkembangan ilmu dan dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan.

Bagian penutup ini merupakan rangkuman tentang informasi dan konsep dan prinsip persamaan lingkaran.

D. PENUTUP

Beberapa hal penting sebagai kesimpulan dari hasil pembahasan materi Lingkaran, disajikan sebagai berikut:

1. Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang berjarak sama terhadap titik tertentu.
2. Persamaan lingkaran adalah sebagai berikut
   a. Persamaan lingkaran yang berpusat di P(0, 0) dan memiliki jari-jari r adalah $x^2 + y^2 + r^2$
   b. Persamaan lingkaran yang berpusat di P(a, b) dan memiliki jari-jari r adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
   c. Bentuk Umum persamaan lingkaran yang memiliki jari-jari r dengan $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$ dan A, B, C bilangan real adalah $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$
3. Kedudukan suatu titik terhadap lingkaran ada tiga yaitu di dalam lingkaran, pada lingkaran, dan di luar lingkaran.
4. Misalkan g garis dengan persamaan $y = ax + b$ dan L lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + r^2$ sehingga membentuk sistem persamaan linear-kuadrat. Persamaan garis singgung lingkaran dapat ditentukan dengan menentukan persamaan garis $y = mx - mx_1 + y_1$ yang bergradien m dengan syarat diskriminan pada selesaian sistem persamaan linear-kuadrat sama dengan nol kemudian mensubstitusikan nilai m ke persamaan $y = mx - mx_1 + y_1$

Bab 10

TRANSFORMASI

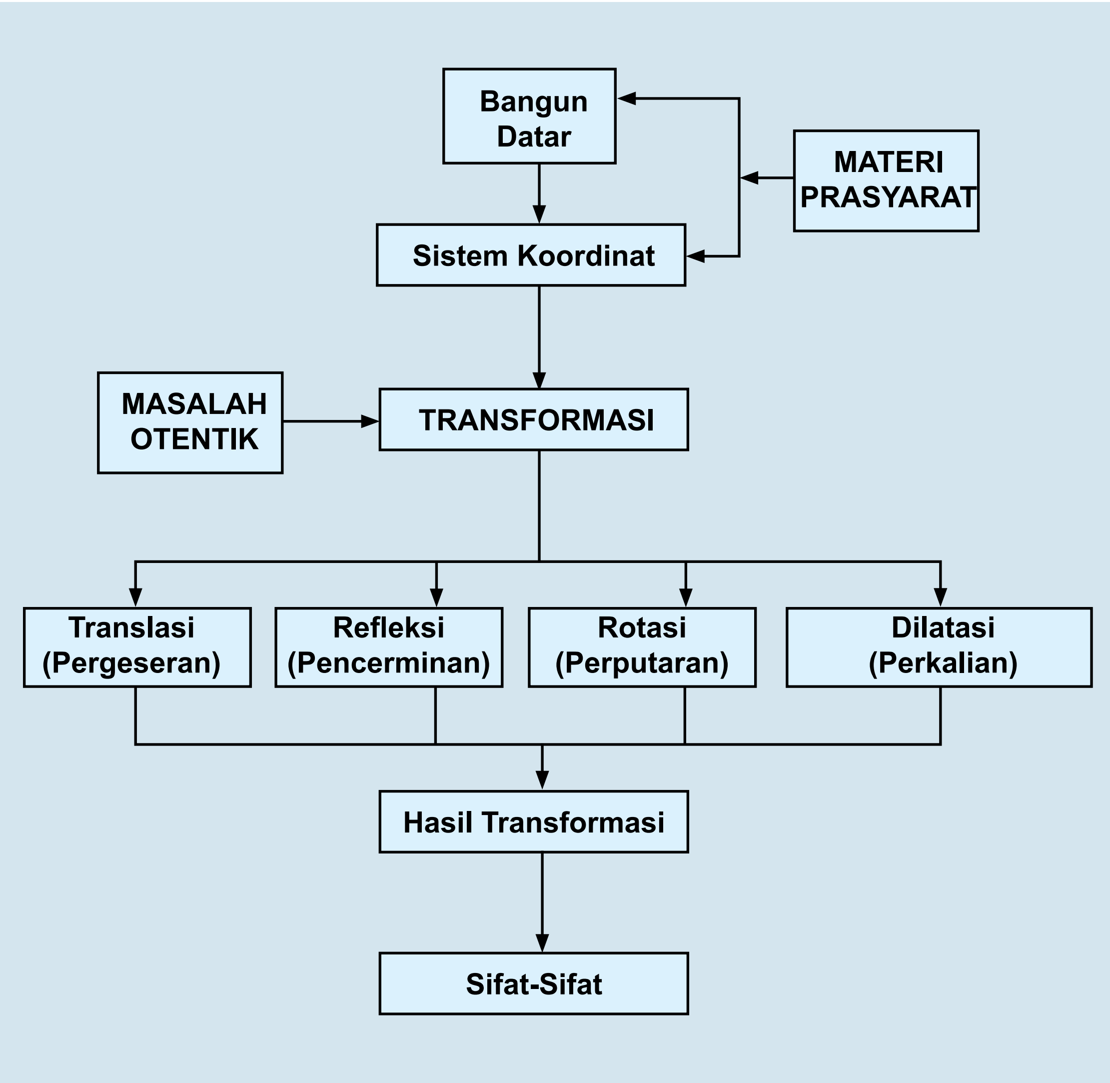
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran transformasi siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan stra-tegi menyelesaikan masalah. 2. Menganalisis sifat-sifat transformasi geometri (translasi, refleksi garis, dilatasi dan rotasi) dengan pendekatan koordinat dan menerapkannya dalam menyelesaikan masalah. 3. Menyajikan objek kontekstual, menganalisis informasi terkait sifat-sifat objek dan menerapkan aturan transformasi geometri (refleksi, translasi, dilatasi, dan rotasi) dalam memecahkan masalah.	Melalui proses pembelajaran transformasi, siswa memiliki pengalaman belajar sebagai berikut. • Terlatih berpikir kritis dan berpikir kreatif. • Menemukan ilmu pengetahuan dari pemecahan masalah nyata • Mengajak untuk melakukan penelitian dasar dalam membangun konsep. • Dilatih bekerjasama dalam tim untuk menemukan solusi permasalahan. • Dilatih mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka • Merasakan manfaat matematika dalam kehidupan sehari-hari.

Istilah Penting

- *Translasi*
- *Refleksi*
- *Rotasi*
- *Dilatasi*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Kamu masih ingat pelajaran transformasi di kelas VII, bukan? Nah, kita akan melanjutkan pelajaran transformasi tersebut kebentuk analitik atau dengan pendekatan koordinat. Sebagai langkah awal, kita akan mengingat kembali sifat-sifat transformasi dengan menggunakan media atau obyek nyata dalam kehidupan sehari-hari dan objek (titik, bidang dan kurva) dalam bidang koordinat kartesius. Menemukan kembali konsep transformasi translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran), dan dilatasi (perkalian) dengan pendekatan koordinat.

Ingatkan siswa materi transformasi yang dipelajari di SMP berhubungan erat dengan materi transformasi di tingkat SMA. Materi transformasi disini adalah kajian secara analitik dengan pendekatan koordinat dan objek (titik, garis dan bidang).

1. Memahami dan Menemukan Konsep Translasi (Pergeseran)

Untuk mengingat kembali sifat-sifat translasi, kita akan mencoba mengamati dan mempelajari serta mengambil kesimpulan terhadap pergeseran beberapa benda.

1.1 Menemukan Sifat-Sifat Translasi

Siswa di pandu untuk menemukan sifat – sfat translasi dengan mengamati pergeseran benda – benda nyata. Ajukan Masalah 10.1 kepada siswa, dan pandu siswa mengamati beberapa pergeseran objek di dalam kelas. Tanya siswa bagaimana bentuk, ukuran dan posisi setiap benda yang bergeser.

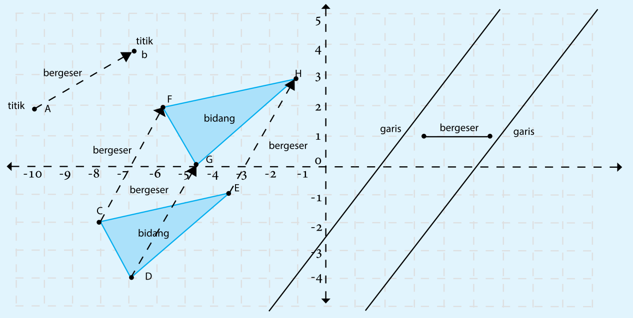
Masalah-10.1

Coba kamu perhatikan dan amati bentuk dan ukuran setiap benda yang bergerak (bergeser) atau berpindah tempat yang ada di sekitarmu. Sebagai contoh, kendaraan yang bergerak di jalan raya, orang yang sedang berjalan ataupun berlari, bola yang memantul ataupun menggelinding, dan lain-lain. Menurutmu, apakah bentuk objek tersebut berubah? atau apakah ukuran objek tersebut berubah oleh karena perpindahan tersebut? Tentu tidak, bukan? Jika demikian, pada sistem koordinat Kartesius, apakah kurva berubah bentuk dan ukuran bila digeser? Perhatikan pergeseran objek (titik, bidang dan kurva) pada sistem koordinat kartesius berikut.

Setelah siswa menemukan sifat bentuk, ukuran dan posisi pergeseran objek nyata, minta siswa mengamati pergeseran objek secara analitik pada gambar 10.1. Minta siswa mengamati satu persatu pergeseran objek tersebut, dimulai dari pergeseran titik, kurva dan bidang pada bidang koordinat kartesius.

Minta siswa membaca koordinat setiap objek sebelum dan sesudah bergeser, berubah atau tidak? Lakukan pengamatan perubahan letak setiap benda yang bergeser di depan kelas.

Berdasarkan pengamatan terhadap pergeseran objek nyata dan objek abstrak, pandu siswa menyimpulkan sifat-sifat pergeseran (sifat 10.1 dan sifat 10.2) berikut. Minta siswa menunjukkan kembali sifat-sifat tersebut pada pergeseran objek nyata.



Gambar 10.1 Pergeseran titik, bidang dan kurva pada bidang koordinat Kartesius

Secara analitik, titik, bidang dan kurva (garis) pada gambar di atas tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran oleh pergeseran, bukan? Tetapi letak mereka pasti berubah; artinya, koordinat benda setelah mengalami pergeseran akan berubah dari koordinat semula. Dengan demikan, kita akan mempelajari lebih lanjut tentang koordinat pergeseran suatu titik pada sistem koordinat. Berikut adalah sifat-sifat pergeseran atau translasi.

Sifat 10.1

Bangun yang digeser (ditranslasikan) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

Sifat 10.2

Bangun yang digeser (ditranslasikan) mengalami perubahan posisi.

1.2 Menganalisis Konsep Translasi

Masalah-10.2

Empat orang anak dan seorang guru olahraga sedang berlatih mengover bola voli di lapangan olahraga. Mereka membuat formasi sebagai berikut: Keempat anak berdiri di empat penjuru (utara, selatan, timur, dan barat) sedangkan guru mereka berdiri sebagai pusat penjuru. Tiap-tiap anak berjarak 4 meter ke guru olah raga mereka. Aturan latihan sebagai berikut:

1. Guru mengirim bola ke anak yang di utara dan anak tersebut akan mengirimnya kembali ke gurunya, kemudian
2. Guru langsung mengirim bola ke anak yang di timur dan anak tersebut akan mengirim kembali ke gurunya,
3. Demikian seterusnya, bola selalu dikirim ke gurunya, dan guru mengirim bola secara siklis dari utara ke timur, ke selatan, ke barat dan kembali ke utara.

Informasikan kepada siswa bahwa mereka akan menemukan konsep translasi dengan pendekatan koordinat. arahkan siswa memahami Masalah 10.2.

Permasalahan:

1. Dapatkah kamu gambarkan formasi cara berdiri keempat anak dan guru mereka sesuai permasalahan di atas?
2. Seandainya mereka dianggap sebagai titik, dapatkah kamu kembali menggambarkan formasi mereka dalam sistem koordinat Kartesius? Anggap guru olah raga tersebut adalah titik pusat $O(0, 0)$.
3. Seandainya posisi guru dianggap sebagai titik $P(1, 3)$, dapatkah kamu menggambar kembali formasi mereka di koordinat Kartesius?
4. Jika guru olah raga mengintruksikan kepada siswa untuk bebas mengover bola ke teman-temannya maka dapatkah kamu temukan pola pergeseran bola voli

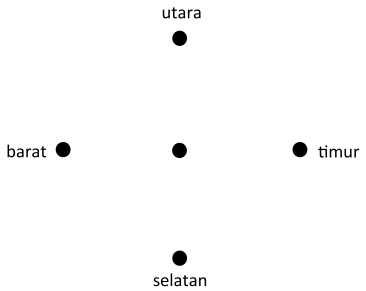
Arahkan siswa untuk mensketsa formasi guru dan keempat siswa dalam latihan bola voli tersebut.

tersebut? Coba kamu amati, teliti dengan baik hubungan koordinat Kartesius pada setiap titik. Dapatkah kamu temukan konsep pergeseran?

Minta siswa untuk menggambarkan formasi mereka latihan bola voli sesuai dengan masalah tersebut. Ingatkan siswa masalah arah mata angin untuk meletakkan titik di utara, timur, selatan dan barat. Perhatikan Gambar 10.2 di samping.

Alternatif Penyelesaian.

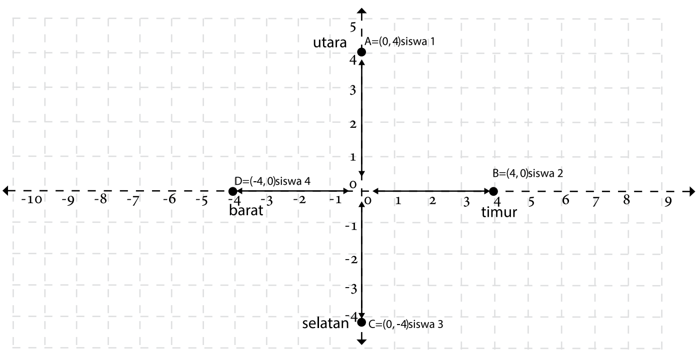
1. Gambar formasi cara berdiri keempat anak dan guru mereka pada latihan mengirim bola boli sesuai permasalahan di atas adalah sebagai berikut:



Gambar 10.2: Formasi guru dan siswa dalam latihan bola voli

Minta siswa mensketsa kembali formasi pada Gambar 10.2 ke bidang koordinat kartesius. Ingatkan siswa bahwa posisi guru adalah di O(0,0). Minta siswa memperhatikan Gambar 10.3. Tanya siswa, apa arti tanda panah pada gambar?

2. Formasi mereka dalam sistem koordinat Kartesius. Anggap guru olah raga tersebut adalah titik pusat $O(0, 0)$.



Gambar 10.3 Formasi 4 orang siswa dan 1 orang guru pada koordinat kartesius

Minta siswa menggambarkan formasi latihan bola voli tersebut kembali ke koordinat

3. Coba kamu gambarkan formasi mereka dalam bidang koordinat Kartesius dengan guru olah raga tersebut adalah titik pusat P(1, 3).

Langkah 1. Letakkanlah titik P(1, 3) di koordinat Kartesius.

Langkah 2. Buatlah garis di empat penjuru (utara, timur, selatan, dan barat) dengan titik P adalah titik pusatnya.

Langkah 3. Bergeraklah 4 satuan ke masing-masing penjuru dan letakkanlah sebuah titik serta berilah nama titik A, B, C dan D.

Langkah 4. Tentukanlah koordinat titik A, B, C dan D tersebut.

kartesius dengan mengubah posisi guru olah raga ke koordinat P(1,3), pandu siswa mengikuti langkah – langkah di samping.

4. Perhatikan tabel berikut.

Tabel 10.1 Posisi keempat siswa dalam bidang koordinat Kartesius dan hubungannya.

Dari/ke	Siswa 1 A(0, 4)	Siswa 2 B(4, 0)	Siswa 3 C(0, -4)	Siswa 4 D(-4, 0)
Siswa 1 A(0,4)	$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$
Siswa 2 B(4,0)	$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$
Siswa 3 C(0,-4)	$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$
Siswa 4 D(-4,0)	$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Coba kamu isi sel yang masih kosong pada tabel di atas. Secara umum dapat kita lihat bahwa: jika titik $A(x, y)$ ditranslasi oleh $T(a, b)$, koordinat hasil translasinya adalah $A'(x + a, y + b)$. Perhatikan definisi berikut.

Minta siswa melengkapi setiap sel pada tabel di samping. Minta siswa mengamati penjumlahan bilangan pada matriks pada tabel. Arahkan siswa mengamati hubungan antar koordinat asal dan tujuan pada setiap sel. Ingatkan siswa materi Matriks di kelas X.

Informasikan! Pada penjumlahan setiap sel diperoleh matriks baru selain matriks awal dan tujuan. Contoh di sel baris 1 kolom 1 diperoleh matriks $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tanya siswa, matriks lain yang diperoleh pada sel lainnya. Dengan mengamati penjumlahan matriks di atas, guru bersama – sama dengan siswa menarik pendefinisian berikut.

Untuk melihat tingkat pemahaman siswa tentang definisi di atas, minta siswa memahami penyelesaian Contoh soal 10.1 berdasarkan definisi tersebut. Guru sebagai fasilitator dan mengawasi kebenaran pendapat siswa.

Pandu siswa memahami setiap proses translasi bertahap berikut. Pastikan siswa memahami penggunaan konsep atau definisi di atas pada masing – masing tahap.

Definisi 10.1

Misalkan x, y, a, dan b adalah bilangan real,
Translasi titik $A(x, y)$ dengan $T(a, b)$ menggeser absis x sejauh a dan menggeser ordinat y sejauh b, sehingga diperoleh titik $A'(x + a, y + b)$, secara notasi ditulis:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$

Mari kita pelajari beberapa soal berikut yang diselesaikan dengan definisi di atas.

Contoh 10.1

Sebuah titik $A(10, -8)$ ditranlasikan berturut-turut dengan $T_1(-1, 2)$ dilanjutkan $T_2(1,-12)$ dan $T_3(-5, -6)$ kemudian dilanjutkan lagi dengan. Tentukan koordinat titik banyangan A tersebut setelah ditranslasikan.

Alternatif Penyelesaian-1

Permasalahan di atas dapat kita notasikan dengan:

$$A\begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \xrightarrow{T_2\begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix}} A''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \xrightarrow{T_3\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}} A'''\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, proses translasi dapat dilakukan secara bertahap (3 tahap)

Tahap 1.

$$A\begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+10 \\ 2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat bayangan pada tahap 1 adalah $A'(9,-6)$.

Tahap 2.

$$A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \xrightarrow{T_2\begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix}} A''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 \\ -12-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat bayangan pada tahap 2 adalah $A''(10, -18)$.

Tahap 3.

$$A''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \xrightarrow{T_3\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}} A'''\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+10 \\ -6-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat bayangan pada tahap 3 adalah $A'''(5, -24)$. Dengan demikian, bayangan titik $A(10, -8)$ setelah ditranlasikan berturut-turut dengan $T_1(-1, 2)$, $T_2(1, -12)$, dilanjutkan dengan $T_3(-5, -6)$ adalah $A'''(5, -24)$.

Alternatif Penyelesaian-2

Permasalahan translasi di atas, dapat juga kita proses secara langsung atau tidak bertahap sebagai berikut:

$$A\begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \xrightarrow{T_2\begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix}} A''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \xrightarrow{T_3\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}} A'''\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+1-1+10 \\ -6-12+2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -24 \end{pmatrix}$$

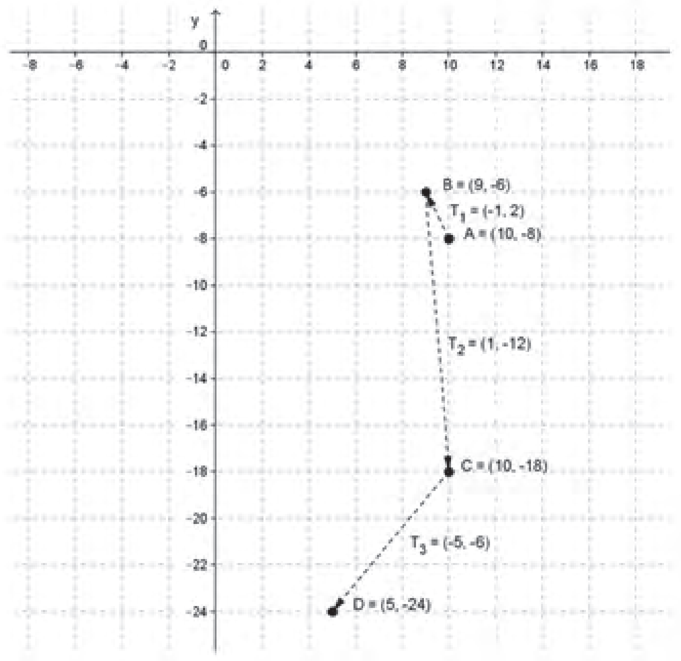
Dengan demikian, bayangan titik A(10, −8) setelah ditranlasikan berturut-turut dengan $T_1(-1, 2)$, $T_2(1, -12)$ dilanjutkan dengan $T_2(-5, -6)$ adalah $A'''(5, -24)$.

Arahkan siswa memahami alternatif penyelesaian kedua di samping. Tanya siswa, kenapa proses translasi dapat dilakukan sekaligus (tidak bertahap)? Minta siswa untuk menyampaikan pendapatnya.

Minta siswa mengamati pergerakan titik (objek) oleh translasi pada tahap 1, 2 dan 3 pada gambar di samping. Tanya siswa, dimanakah translasi yang membuat pergeseran dapat dilakukan sekaligus (alternatif penyelesaian 2)? Minta siswa menggambarkan proses translasi pada alternatif penyelesaian 2.

Alternatif Penyelesaian-3

Permasalahan di atas, dapat kita selesaikan secara geometri atau dengan menggambar pada bidang koordinat Kartesius.



Gambar 10.4 Pergeseran bertahap sebuah titik

Contoh 10.2 adalah proses translasi yang dilakukan pada sebuah garis sebagai objek. Arahkan siswa memahami proses penyelesaian di samping.

Tanya siswa, titik A(x,y) yang bagaimana yang dimaksud disamping? Pastikan siswa mengerti bahwa titik A(x,y) yang dimaksud adalah titik yang memenuhi garis (objek) tersebut.

Contoh 10.2

Sebuah garis g dengan persamaan $y = mx$, ditranslasikan dengan $T(x_1, y_1)$ sehingga terbentuk garis g'. Jika garis g' melalui titik $B(x_2, y_2)$ maka tentukanlah nilai m.

Alternatif Penyelesaian

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x \\ y_1 + y \end{pmatrix}$$

Diperoleh $x' = x_1 + x$ atau $x = x' - x_1$ serta $y = y' - y_1$ atau $y' = y_1 - y$ sehingga dengan mensubstitusi ke persamaan garis g diperoleh garis g' dengan persamaan:

$$y = mx \Rightarrow y = y' - y_1$$
$$\Rightarrow y' - y_1 = m(x - x_1)$$

Karena garis g' melalui titik $A(x_2, y_2)$ maka $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ sehingga $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ingatkan siswa konsep gradien pada persamaan garis yang dipelajari di SMP.

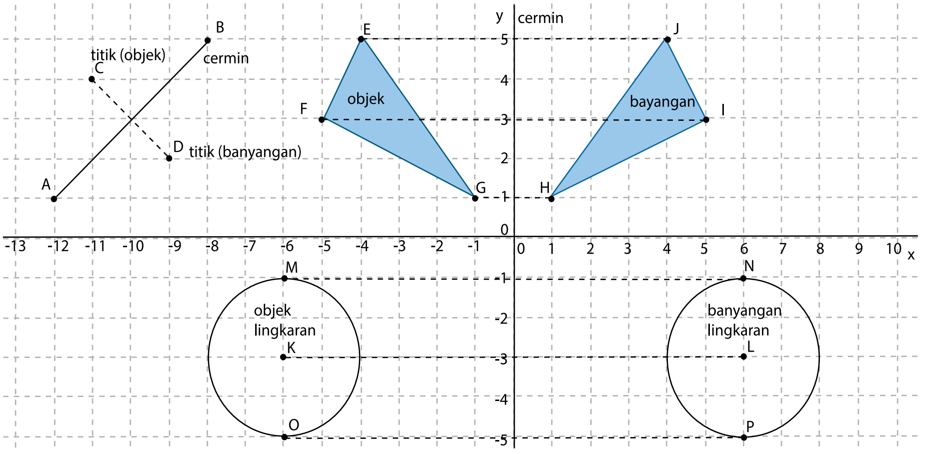
2. Memahami dan Menemukan Konsep Refleksi (Pencerminan)

2.1 Menemukan Sifat-Sifat Refleksi

Pada saat kamu berdiri di depan cermin (cermin datar), kemudian kamu berjalan mendekati cermin dan mundur menjauhi cermin, bagaimana dengan gerakan bayanganmu? Tentu saja bayanganmu mengikuti gerakanmu bukan? Bagaimana dengan jarak dirimu dan bayanganmu dengan cermin? Jarak dirimu dengan cermin sama dengan jarak bayanganmu dengan cermin. Mari kita lihat dan amati bentuk, ukuran dan posisi suatu objek bila dicerminkan pada sistem koordinat. Perhatikan gambar berikut.

Minta siswa menjelaskan pengalamannya pada saat bercermin. Arahkan siswa menjelaskan bentuk dan ukuran dan jarak bayangan setiap objek pada cermin.

Minta siswa mengamati pencerminan objek pada bidang koordinat kartesius berikut. Arahkan siswa mengamati bentuk, ukuran dan posisi titik, bidang dan kurva. Beri kesempatan pada siswa menyampaikan pendapatnya.



Gambar 10.5 Pencerminan titik, bidang dan kurva pada sistem koordinat Kartesius.3

Bersama – sama dengan siswa, guru memandu menyimpulkan sifat – sifat pencerminan pada dunia nyata dan pada pendekatan koordinat.

Mintasiswamengutarakan pendapatnya masing – masing tentang sifat – sifat pencerminan. Arahkan siswa memahami Sifat 10.3 dan Sifat 10.4

Pandu siswa dalam bekerja kelompok. Bentuk kelompok kerja siswa terdiri dari 3 atau 4 orang. Arahkan mereka bekerja dan mempresentasikan kerja kelompoknya. Berikan kesempatan

Pada sistem koordinat Kartesius di atas, objek (titik, bidang, kurva lingkaran) mempunyai bayangan dengan bentuk dan ukuran yang sama tetapi letak berubah bila dicerminkan (dengan garis). Perhatikan sifat- sifat pencerminan berikut.

Sifat 10.3

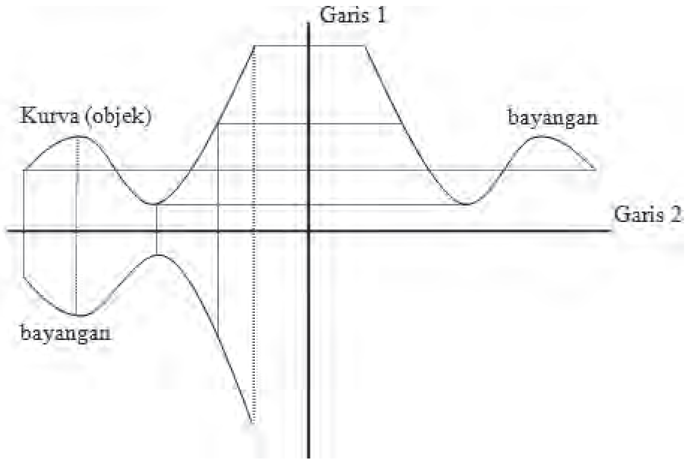
Bangun (objek) yang dicerminkan (*refleksi*) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

Sifat 10.4

Jarak bangun (objek) dari cermin (cermin datar) adalah sama dengan jarak bayangan dengan cermin tersebut.

Kerja kelompok.

Perhatikan gambar berikut. Jika garis 1 dan garis 2 adalah cermin maka berdasarkan sifat pencerminan, gambarkanlah bayangan kurva berikut!



Gambar 10.6 Pencerminan kurva oleh cermin garis 1 dan garis 2

pada kelompok yang lain menanggapi dan mempresentasikan hasil kerja kelompok mereka masing - masing. (Bayangan telah dilengkapi pada gambar)

2.2 Menganalisis Konsep Refleksi

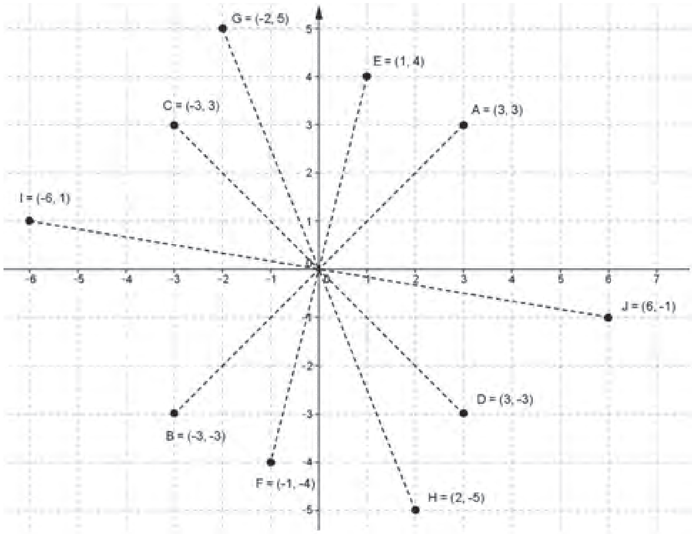
Berdasarkan sifat pencerminan (pada cermin datar), jarak objek dengan cermin sama dengan jarak bayangan objek tersebut ke cermin. Secara analitik, konsep dapat kita temukan dengan melakukan beberapa percobaan. Objek yang digunakan adalah titik pada koordinat kartesius dan garis sebagai cermin. Dengan demikian, kamu diminta mengamati perubahan koordinat titik menjadi bayangan titik oleh cermin. Tentu garis sebagai cermin yang kita kaji adalah garis lurus. Ingatlah kembali (atau pelajari kembali) buku Matematika di kelas VII pada pokok bahasan Transformasi.

Arahkan siswa, setelah mereka memahami sifat pencerminan maka siswa akan menemukan konsep pencerminan pada bidang koordinat (pencerminan terhadap sumbu x, sumbu y, titik asal, garis x = h, y = k, y = x dan y = -x)

Menemukan konsep pencerminan terhadap titik asal O(0,0)

Coba amati gambar berikut!

Guru meminta kepada siswa mengamati gambar berikut. Arahkan siswa menjelaskan hubungan setiap pasangan titik yang dihubungkan dengan garis putus – putus pada koordinat kartesius. Minta siswa memberikan contoh pasangan titik yang sesuai dengan gambar tersebut (contoh dirancang siswa itu sendiri).



Gambar 10.7 Pencerminan terhadap titik asal koordinat

Setiap pasangan titik dan banyangan pada gambar mendefinisikan garis melalui titik asal O(0,0). Jarak setiap titik ke titik asal sama dengan jarak banyangan titik tersebut ke titik asal. Sebagai contoh, titik A berpasangan dengan titik B dan jarak A ke O sama dengan jarak B ke O. Dengan demikian, titik O adalah sebuah cermin.

Minta siswa mengamati setiap koordinat objek dan koordinat bayangan pada tabel berikut. Beri kesempatan kepada siswa menyampaikan pendapatnya terkait hubungan masing- masing pasangan koordinat tersebut.

Tabel 10.2 Koordinat titik objek dan bayangannya oleh pencerminan terhadap titik O

Koordinat objek	Koordinat bayangan
A (3, 3)	B (-3, -3)
C (-3, 3)	D (3, -3)
E (-3, 3)	F (-1, -4)
G (-2, 5)	H (2, -5)
I (-6, 1)	J (6, -1)

Berdasarkan pengamatanmu terhadap koordinat objek dengan koordinat bayangan dari setiap titik pada tabel di atas, dapatkah kamu ambil pola hubungan setiap pasangan titik tersebut? Jika koordinat objek adalah titik A(a, b) maka koordinat bayangan adalah A'(-a, -b). Ingat konsep matriks! Koordinat A(a, b) dapat dituliskan dengan

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Arahkan siswa ke materi matriks sehingga hubungan titik A(a,b) dengan bayangan A'(-a,-b) memenuhi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Perhatikan definisi berikut.

Definisi 10.2

Pencerminan terhadap titik asal (0,0)

Jika titik P(a, b) dicerminkan terhadap/ke titik asal (0, 0) maka bayangannya adalah P'(-a, -b).

Dituliskan, $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

dengan $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Dengan memahami kesamaan matriks hubungan koordinat objek dengan bayangannya maka arahkan siswa bahwa matriks pencerminan terhadap titik asal (0,0) adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

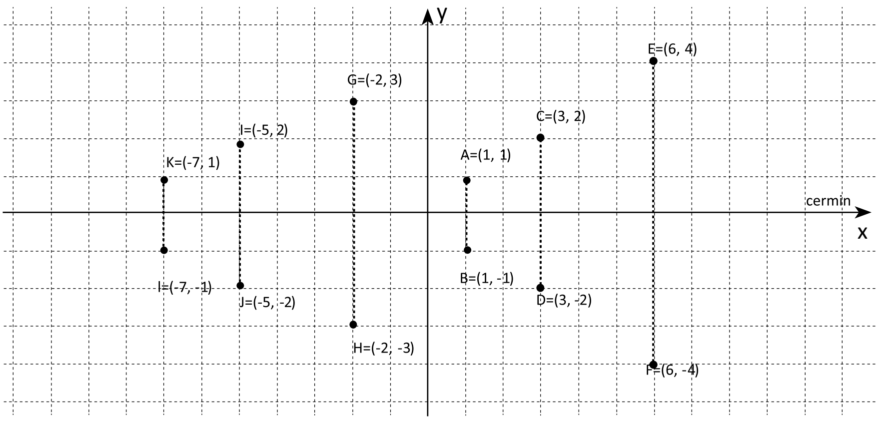
Dengan demikian pencerminan terhadap titik O

ditunjukkan dengan matriks $C_{O(0,\,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Menemukan konsep pencerminan terhadap sumbu *x* (atau *y* = 0)

Perhatikan pencerminan beberapa titik berikut terhadap sumbu x!

Minta siswa mengamati objek pada koordinat kartesius berikut. Minta siswa menyampaikan pendapatnya tentang pengamatan koodinat tersebut. Minta siswa membuat contoh pasangan titik yang lain.



Gambar 10.8 Pencerminan titik terhadap sumbu x

Mari kita sajikan setiap pasangan titik pada tabel berikut.

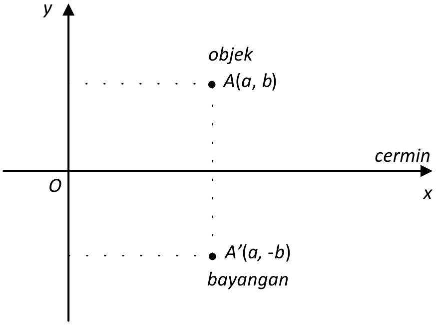
Tabel 10.3 Koordinat titik dan bayangannya oleh pencerminan terhadap sumbu x

Objek	A(1, 1)	C(3, 2)	E(6, 4)	G(-2,3)	I(-5, 2)	K(-7, 1)
Bayangan	B(1, -1)	D(3, -2)	F(6, -4)	H(-2,-3)	J(-5, -2)	L(-7, -1)

Untuk memudahkan pengamatan, minta siswa menyajikan setiap koordinat objek dan bayangan pada tabel. Perhatikan Tabel 10.3, minta siswa mengamati koordinat kemudian menemukan polanya. Arahkan siswa mendapatkan pola pencerminan terhadap sumbu x untuk sembarang titik A(a,b).

Secara umum, pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap sumbu x (garis dengan persamaan $y = 0$) akan menghasilkan koordinat bayangan $A'(a', b')$.

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 10.9 Pencerminan terhadap sumbu x

Jika kamu amati gambar di atas, dengan menentukan koordinat bayangan dari setiap objek yang dicerminkan terhadap sumbu x maka nilai absis tetap tetapi nilai ordinat berubah yaitu: jika koordinat objek adalah A(a, b) maka koordinat bayangan adalah A'(a, -b). Ingat konsep matriks bahwa koordinat A(a, -b) dapat dituliskan dengan .

$$\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Perubahan koordinat bayangan tersebut dapat diformulasikan pada konsep sebagai berikut.

> **Pencerminan terhadap sumbu x (garis y = 0)**
>
> Jika titik A(a, b) dicerminkan terhadap sumbu x (garis y = 0) maka bayangannya adalah A'(a,-b). Dituliskan,
>
> $$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{sumbu\ x}} A'\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$
>
> dengan $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Dengan demikian pencerminan terhadap sumbu x ditunjukkan dengan matriks .

$$C_{sumbu\ x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Berikut adalah pencerminan sembarang titik terhadap sumbu x. Arahkan siswa memahami pencerminan tersebut dan membuat kesamaan matriks hubungan koordinat objek dan bayangannya, sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Arahkan siswa kembali menemukan kesamaan matriks

$$\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Pandu siswa menyimpulkan bahwa matriks pencerminan terhadap sumbu x adalah

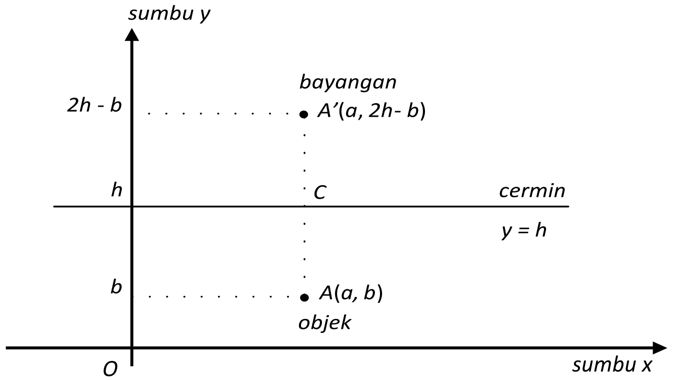
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Menemukan konsep pencerminan terhadap garis $y = h$

Misalkan titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap sumbu x atau garis dengan persamaan $y = h$ akan menghasilkan koordinat bayangan $A'(a', b')$.

Perhatikan gambar berikut!

Pandu siswa untuk menemukan konsep pencerminan terhadap garis y = h. Ingatkan siswa sifat jarak objek ke cermin sama dengan jarak bayangan ke cermin.



Gambar 10.10 Pencerminan terhadap garis $y = h$

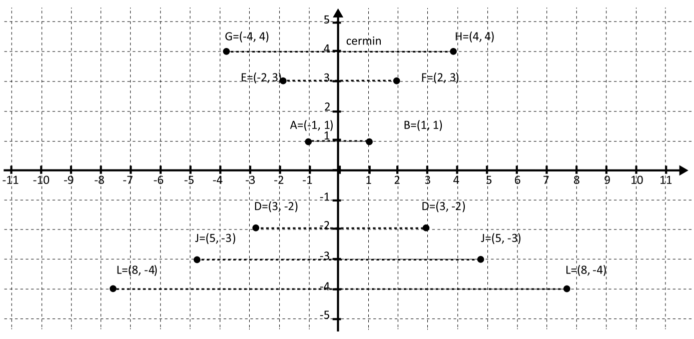
Pandu siswa membentuk kelompok. Minta siswa membuat percobaan pencerminan titik dengan garis y = h. Guru menentukan nilai h yang berbeda pada setiap kelompok. Siswa bebas menentukan titik yang akan dicerminkan. Kemudian, beri kesempatan pada setiap kelompok mempresentasikan pola hubungan koordinat objek dan bayangan yang mereka temukan.
Minta siswa mengamati setiap koordinat titik (objek) dan koordinat titik (bayangan) pada koordinat kartesius berikut. Arahkan siswa membuat contoh titik yang lain dan menentukan koordinat bayangannya.

Kerja Kelompok

Perhatikan gambar di atas! Berikan komentar anda, mengapa koordinat bayangan $A'(a, 2h - b)$ jika objek $A(a, b)$ dicerminkan ter-hadap garis $y = k$. Untuk menjawabnya, kamu harus menggunakan sifat pencerminan, yaitu AC sama dengan A'C.

Menemukan konsep pencerminan terhadap sumbu y (atau x = 0)

Perhatikan pencerminan titik terhadap sumbu y atau garis x = 0 berikut.



Gambar 10.11 Pencerminan titik terhadap sumbu y

Perhatikan tabel berikut

Tabel 10.4 Koordinat titik dan bayangannya oleh pencerminan terhadap sumbu y

Objek	A(-1, 1)	C(-3, -2)	E(-2, 3)	G(-4, 4)	I(-5, -3)	K(-8, -4)
Bayangan	B(1, 1)	D(3, -2)	F(2, 3)	H(4, 4)	J(5, -3)	L(8, -4)

Misalkan titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap sumbu y atau garis dengan persamaan $x = 0$ akan menghasilkan koordinat bayangan $A'(a', b')$.

Minta siswa mengamati koordinat objek dan bayangannya pada tabel di atas. Minta siswa menemukan pola hubungan kedua koordinat untuk masing-masing pasangan titik tersebut.

Pencerminan terhadap sumbu *y* (garis *x* = 0)

Jika titik A(*a*, *b*) dicerminkan terhadap sumbu *y* (garis *x* = 0) maka bayangannya adalah A'(-*a*, *b*).

$$\text{Dituliskan, } A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{sumbu\ y}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\text{dengan } \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & `1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Tugas Kelompok

Coba kamu temukan konsep pencerminan dengan garis $x = k$

Pandu siswa membentuk kelompok. Minta siswa membuat eksperimen pencerminan sembarang titik terhadap garis $x = k$. Guru menentukan nilai k yang berbeda untuk setiap kelompok dan siswa bebas menentukan koordinat objek yang akan dicerminkan. Minta kepada siswa menemukan hubungan koordinat objek, koordinat bayangan dan cermin. Beri kesempatan kepada siswa mempresentasikan hasil kerja masing – masing. Arahkan siswa membentuk pola pencerminan terhadap garis $x = k$ secara umum.

Arahkan siswa kembali menemukan konsep pencerminan terhadap garis y = x. Arahkan siswa ke permasalahan 10.3. Minta siswa mengamati koordinat objek dan bayangan pencerminan titik – titik pada koordinat kartesius di bawah.

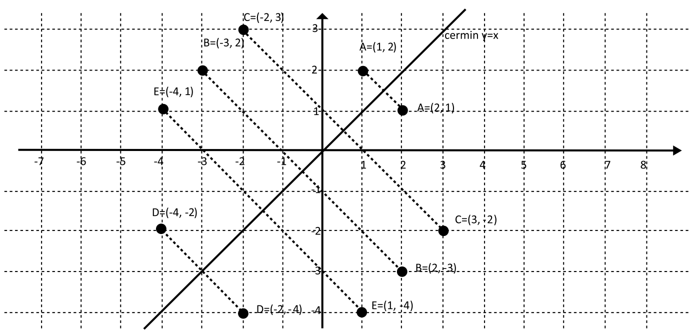
Menemukan konsep pencerminan terhadap garis $y = k$

Masalah-10.3

Kamu pernah berbelanja sepatu di sebuah toko, bukan? Jika kita memilih sepatu dan mencobanya, maka toko tersebut menyediakan sebuah cermin yang membuat kita bisa melihat sepatu yang sedang kita pakai, bukan. Cermin tersebut adalah cermin datar namun diletakkan miring terhadap objek yang dicerminkan. Seandainya, permasalahan ini, kita bawakan ke pendekatan koordinat dengan memisalkan kembali bahwa objek yang dicerminkan adalah sebuah titik pada koordinat kartesius dengan cermin tersebut adalah sebuah garis, maka dapatkah kamu temukan hubungan koordinat objek dengan koordinat bayangannya? Ingat, kamu harus memegang sifat pencerminan bahwa jarak objek ke cermin sama dengan jarak bayangan ke cermin. Mari kita kaji konsep pencerminan pada garis $y = x$ dan $y = –x$.

Berikut adalah pencerminan beberapa titik terhadap garis y = x. Tanya siswa, kenapa koordinat bayangan dapat ditemukan seperti pada gambar? Pastikan siswa menjawab mengarah ke sifat pencerminan: jarak objek ke cermin sama dengan jarak bayangan ke cermin.

Coba kamu amati pencerminan titik A(1, 2), B(2, -3), C(-2, 3), D(-4, -2), dan E(1, -4) terhadap garis $y = x$ berikut.



Gambar 10.12 Pencerminan beberapa titik terhadap garis $y = x$

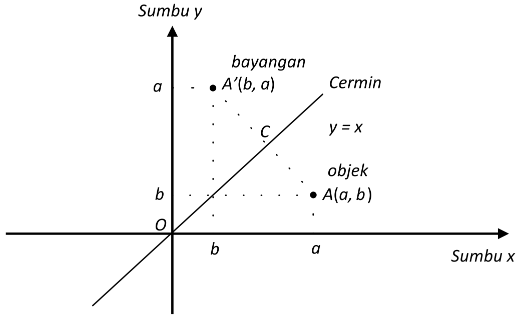
Perhatikan tabel berikut.

Tabel 10.5 Koordinat titik dan bayangannya oleh pencerminan terhadap garis *y* = *x*

Koordinat objek	Koordinat bayangan
A (1, 2)	A (2, 1)
B (2, -3)	B (-3, 2)
C (-2, 3)	C (3, -2)
D (-4, -2)	D (-2, -4)
E (1, -4)	E (-4, 1)

Secara umum, jika titik A(a, b) dicerminkan dengan garis maka koordinat bayangannya adalah A'(b, a).

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 10.13 Pencerminan terhadap garis y = x

Dapatkah kamu melihat hubungan koordinat objek dengan koordinat bayangannya. Perhatikanlah, jika titik A(a, b) dicerminkan dengan garis maka koordinat bayangannya adalah A'(b, a). Ingat pada matriks bahwa koordinat A(b, a) dapat dituliskan dengan

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Minta siswa mengamati koordinat titik (objek) dan koordinat titik (bayangan) pada tabel 10.5. Beri kesempatan kepada siswa memberi komentar tentang hubungan setiap pasangan koordinat. Arahkan siswa menentukan konsep pencerminan titik terhadap garis y = x.

Pandu siswa menemukan konsep pencerminan terhadap garis y = x. Ingatkan siswa sifat jarak pada pencerminan.

Berdasarkan konsep pencerminan terhadap garis y = x, minta siswa menemukan konsep pencerminan terhadap garis y = -x. Pandu siswa menemukan konsep berdasarkan kesamaan matriks hubungan antara titik A(a,b) dengan A'(b,a) adalah $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Arahkan siswa menentukan matriks pencerminan terhadap garis y = x adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Berdasarkan konsep pencerminan terhadap garis y = x maka arahkan siswa untuk bekerja kelompok menemukan matriks pencerminan terhadap garis y = -x. 1. Minta siswa menggambar garis y = -x. 2. Minta siswa menentukan sembarang titik yang akan dicerminkan. 3. Dengan menggunakan sifat pencerminan, tentukan koordinat bayangan. 4. Letakkan pasangan titik objek dan bayangan dalam tabel. 5. Amati pola yang diperoleh.

Perhatikan konsep berikut.

Pencerminan terhadap garis *y* = *x*

Jika titik A(*a*, *b*) dicerminkan terhadap garis *y* = *x*) maka bayangannya adalah A'(b, a). Dituliskan,

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{y=x}} A'\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

dengan $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Dengan demikian pencerminan terhadap garis $y = x$ ditunjukkan dengan matriks $C_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tugas Kelompok

Coba kamu tunjukkan bahwa pencerminan terhadap garis $y = -x$ diwakili dengan matriks $C_{y=-x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dengan demikian, matriks pencerminan dapat disajikan seperti berikut ini.

Matriks pencerminan terhadap

1. Titik O(0,0) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. Sumbu x $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. Sumbu y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. Garis $y = x$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. Garis $y = -x$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Contoh 10.3

Tentukan bayangan titik A(1, -2) dan B(-3, 5) setelah dicerminkan terhadap sumbu x.

Minta siswa memahami soal pada Contoh 10.3 dengan memanfaatkan konsep pencerminan terhadap sumbu x.

Alternatif Penyelesaian.

Minta siswa untuk menunjukkan pencerminan secara geometri pada bidang koordinat kartesius.

Permasalahan di atas dapat kita notasikan dengan:

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\xrightarrow{C_{\text{sumbu }x}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}A'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Jadi bayangan titik A(1, -2) setelah dicerminkan terhadap sumbu x adalah A’(1, 2).

$$B\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\xrightarrow{C_{\text{sumbu }x}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}B'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$$

Jadi bayangan titik A(-3, 5) setelah dicerminkan terhadap sumbu x adalah A’(-3, -5).

Contoh 10.4

Sebuah titik $P(10, 5)$ dicerminkan terhadap sumbu y kemudian dilanjutkan dicerminkan terhadap garis $y = x$. Tentukan bayangan titik tersebut.

Contoh 10.4 dengan memanfaatkan konsep pencerminan terhadap sumbu y dan garis y = x.

Alternatif Penyelesaian-1

Berikut adalah pencerminan yang dilakukan secara bertahap. Arahkan siswa memahami

$$P\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}\xrightarrow{C_{\text{sumbu }y}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}}P'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\xrightarrow{C_{y=x}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}P''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$$

proses pencerminan dengan memanfaatkan konsep. Minta siswa untuk menunjukkan pencerminan secara geometri pada bidang koordinat kartesius.

Permasalahan ini dapat diselesaikan secara bertahap, sebagai berikut:

Tahap 1.

$$P\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}\xrightarrow{C_{\text{sumbu } y}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}}P'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-5\end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik P(10, -5) setelah dicerminkan terhadap sumbu y adalah P'(-10, -5). Bayangan ini akan dilanjutkan dicerminkan terhadap garis $y = x$ pada tahap 2, sebagai berikut:

Tahap 2.

$$P'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\xrightarrow{C_{y=x}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}P''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-10\end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik P'(-10, -5) setelah dicerminkan terhadap sumbu $y = x$ adalah P''(-5, -10).

Dengan demikian, bayangan titik P(10, -5) setelah dicerminkan terhadap sumbu y, dilanjutkan terhadap garis $y = x$ adalah P''(-5, -10).

Contoh 10.4 dapat diselesaikan secara langsung (tidak bertahap). Pandu siswa memahami proses penyelesaian di samping. Ingatkan siswa kembali konsep perkalian matriks.

Alternatif Penyelesaian-2

Permasalahan di atas, dapat juga diselesaikan secara langsung sebagai berikut:

$$P\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}\xrightarrow{C_{\text{sumbu } y}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}}P'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\xrightarrow{C_{y=x}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}P''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-10\end{pmatrix}$$

Dengan demikian, bayangan titik $P(10, -5)$ setelah dicerminkan terhadap sumbu y, dilanjutkan terhadap garis $y = x$ adalah $P''(-5, -10)$.

Arahkan siswa memahami proses pencerminan suatu kurva (lingkaran) pada Contoh 10.5

Contoh 10.5

Sebuah lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ dicermin-kan terhadap garis $y = -x$. Tentukan persamaan bayangan lingkaran yang terjadi.

Alternatif Penyelesaian-1

Misalkan titik $P(x, y)$ dilalui oleh lingkaran tersebut atau terletak pada kurva lingkaran sehingga permasalahan di atas dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{y=-x}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} P'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Minta siswa menyelesaikan proses matriks di samping dengan menggunakan konsep invers matriks,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Diperoleh $x' = -y$ atau $y = -x'$ serta $y' = -x$ atau $x = -y'$ sehingga dengan mensubstitusikan ke persamaan lingkaran maka diperoleh bayangan lingkaran dengan persamaan:

$$(-y)^2 + (-x)^2 - 2(-y) + 2(-x) - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$y^2 + x^2 + 2y - 2x - 3 = 0\,.$$

Dengan demikian, bayangan lingkaran: $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ setelah dicerminkan terhadap garis $y = -x$ adalah $y^2 + x^2 + 2y - 2x - 3 = 0$.

Berikan soal - soal uji kompetensi ini sebagai tugas di rumah bagi siswa. Tujuan pemberian uji kompetensi ini adalah untuk mengetahui apakah siswa sudah memahami tentang konsep translasi dan refleksi

Uji Kompetensi 10.1

1. Tunjukkanlah secara gambar pergeseran dari beberapa titik berikut! Asumsikan arah ke kanan adalah arah sumbu x positif dan arah ke atas adalah ke arah sumbu y positif.
   a. Titik $A(2, –3)$ bila digeser 2 satuan ke kanan dan 3 satuan ke bawah.
   b. Titik $A(–3, 4)$ bila digeser 4 satuan ke kiri dan 2 satuan ke atas.
   c. Titik $A(1, 2)$ bila digeser 2 satuan ke kiri dan 3 satuan ke atas dilanjutkan dengan pergeseran 3 satuan ke kanan dan 2 satuan ke atas.
   d. Segitiga PQR dengan koordinat $P(2, 0)$, $Q(–3, 3)$ dan R(8, 0) bila digeser 3 satuan ke kiri dan 6 satuan ke bawah. Tentukanlah luas segitiga dan bayangannya.

2. Tentukanlah persamaan kurva oleh translasi T berikut, kemudian tunjukkanlah sketsa pergeseran kurva tersebut. Asumsikan arah ke kanan adalah arah sumbu x positif dan arah ke atas adalah ke arah sumbu y positif.
   a. Garis lurus $2x – 3y + 4 = 0$ digeser 2 satuan ke kiri dan 3 satuan ke bawah.
   b. Parabola $y = x^2 – 2x – 8$ ditranslasikan oleh $T(–3, 9)$.
   c. Lingkaran $x^2 + y^2 – 2x – 2y – 23 = 0$ ditranslasikan dengan $P(a, b)$ di mana $P(a, b)$ adalah koordinat lingkaran tersebut.
3. Titik A(-2, 1) ditranslasikan berturut-turut dengan translasi $T_n = \begin{pmatrix} 2n-1 \\ n+2 \end{pmatrix}$ untuk $n \in$ N. Tentukan posisi titik pada translasi ke-2013.

4. Tunjukkanlah secara gambar pencerminan dari beberapa titik berikut!
   a. Titik $A(2, -3)$bila dicerminkan terhadap sumbu x.
   b. Titik $A(-3, 4)$ bila dicerminkan terhadap garis $x = 5$.
   c. Titik $A(1, 2)$ bila bila dicerminkan dengan garis $y = x$ dilanjutkan terhadap garis $y = -2$.
   d. Segitiga PQR dengan koordinat $P(2, 0)$, $Q(-3, 3)$ dan $R(8, 0)$ bila dicerminkan dengan sumbu x. Tentukanlah luas segitiga dan bayangannya.

5. Tentukanlah persamaan kurva oleh pencerminan C berikut, kemudian tunjukkanlah sketsa pencerminan kurva tersebut.
   a. Garis lurus $2x - 3y + 4 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu x.
   b. Garis lurus $x + 2y + 3 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$.
   c. Parabola $y = -x^2 - 2x - 8$ dicerminkan terhadap garis $x = 1$.
   d. Parabola $y = x^2 + x - 6$ dicerminkan terhadap garis $y = 1$.
   e. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ dicerminkan terhadap 4 cermin yaitu dengan garis $y = -4$, dengan garis $y = 6$, dengan garis $y = -1$, dan terhadap garis $x = 6$.

6. Tunjukkan dan berilah tanda “v” pada tabel di bawah ini, pencerminan yang mungkin ada pada setiap kurva berikut.

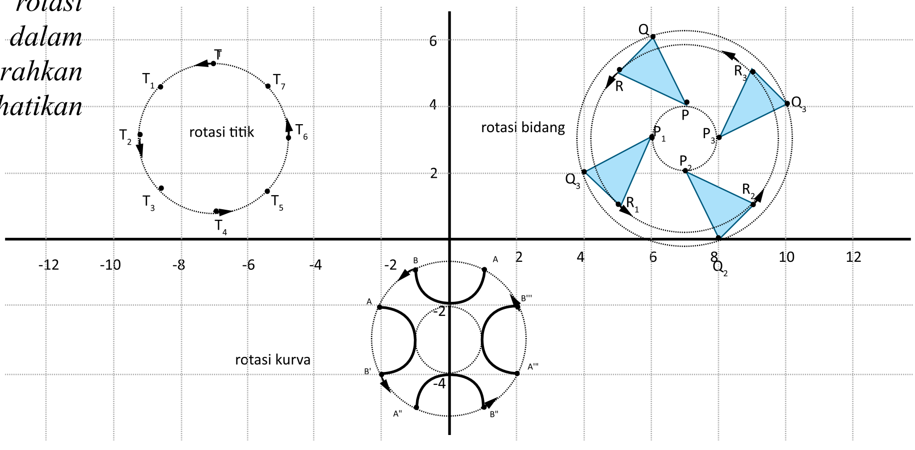
No.	Pers. Kurva	Pencerminan terhadap				
		Titik O(0, 0)	Sumbu *x*	Sumbu *y*	$y = x$	$y = -x$
1	Lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$					
2	Parabola $y = x^2$					
3	Parabola $x = y^2$					
4	Kurva $y = x^3$					
5	Kurva $y = \|x\|$					
6	Kurva $y = \cos x$					
7	Kurva $y = \sin^{2013} x$					

3. Memahami dan Menemukan Konsep Rotasi (Perputaran)

Minta siswa menyebutkan beberapa objek yang berputar dilingkungan sekitar. Minta siswa memberi komentar tentang bentuk, ukuran dan posisi benda yang berputar. Arahkan siswa mengamati rotasi beberapa objek dalam sistem koordinat. Arahkan siswa memperhatikan gambar di bawah.

3.1 Menemukan Sifat-Sifat Rotasi

Coba kamu perhatikan benda-benda yang berputar di sekelilingmu. Contohnya, jarum jam dinding, kincir angin, dan lain-lain. Menurutmu apakah bentuk dan ukuran benda tersebut berubah oleh perputaran tersebut? Tentu tidak, bukan. Bagaimana dengan objek yang diputar pada sistem koordinat, apakah bentuk dan ukurannya berubah juga? Perhatikan gambar berikut!



Gambar 10.14 Rotasi titik, bidang dan kurva pada sistem koordinat Kartesius

Coba kamu amati perputaran objek (titik, bidang dan kurva) pada sistem koordinat di atas. Titik, bidang dan kurva bila diputar tidak berubah bentuk dan ukuran tetapi mengalami perubahan posisi atau letak. Jadi, bentuk dan ukuran objek tidak berubah karena rotasi tersebut tetapi posisinya berubah. Perhatikan sifat-sifat rotasi berikut.

Sifat 10.5

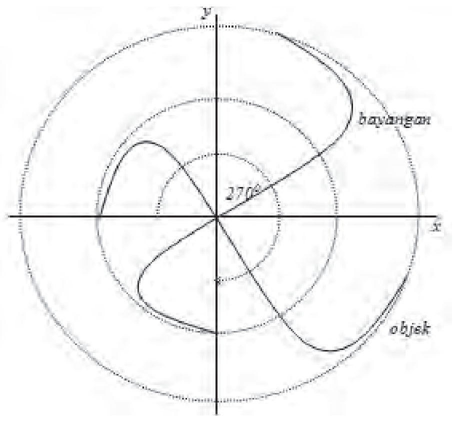
Bangun yang diputar (rotasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

Sifat 10.6

Bangun yang diputar (rotasi) mengalami perubahan posisi.

Tugas kelompok.

Putarlah kurva berikut sebesar 270^0 searah putaran jarum jam. Tunjuk-kanlah bahwa rotasi kurva tersebut memenuhi sifat-sifat rotasi.



Gambar 10.15 Kurva yang akan dirotasikan sebesar 270^0 dengan pusat O(0,0)

Pandu siswa memahami sifat – sifat perputaran atau rotasi. Berikan kesempatan kepada siswa menunjukkan kebenaran sifat – sifat perputaran tersebut dengan melihat perputaran objek dalam dunia nyata. Kemudian, minta siswa menunjukkan kebenaran sifat – sifat tersebut dalam sistem koordinat kartesius dengan mengerjakan tugas kelompok di bawah ini.

Arahkan siswa untuk bekerja kelompok. Minta mereka mengamati kurva dab bayangannya pada perputaran 2700 pada Gambar 10.15 di samping. Minta siswa menunjukkan Sifat 10.5 dan 10.6 dipenuhi pada perputaran tersebut.

Pandu siswa melakukan percobaan berikut. Sebaiknya, penyediaan bahan dan alat sudah dikonfirmasikan di hari sebelumnya. Arahkan siswa mengerjakan percobaan dalam bentuk kerja kelompok. Pandu siswa memahami rotasi suatu objek bergantung pada pusat rotasinya berdasarkan hasil percobaan tersebut.

3.2 Menemukan Konsep Rotasi

Percobaan 10.1

Bahan.

Selembar kertas karton

Selembar bidang berbentuk persegi panjang (beri nama bidang *ABCD*)

Sebuah pensil (atau alat tulis lainnya)

Sebuah paku payung

Sebuah lidi

Lem secukupnya

Percobaan 1.

Letakkanlah bidang *ABCD* di atas kertas karton. Lukislah garis di atas kertas karton tersebut mengikuti keliling bidang *ABCD* dan berilah nama di kertas karton tersebut mengikuti nama bidang *ABCD* tersebut. Tusuklah dengan paku payung di pusat bidang *ABCD* menembus bidang di bawahnya. Putarlah bidang *ABCD* sesuai keinginanmu.

Percobaan 2.

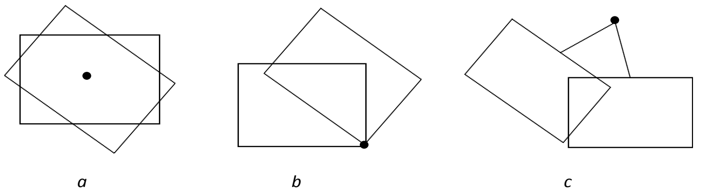
Tusuklah dengan paku payung di salah satu titik sudut bidang *ABCD* menembus bidang di bawahnya. Putarlah bidang *ABCD* sesuai keinginanmu.

Percobaan 3.

Rekatlah salah satu ujung sebuah lidi pada bidang *ABCD*, kemudian peganglah lidi di ujung yang lain. Putarlah lidi tersebut sesuai keinginanmu.

Dari percobaan 1, 2, dan 3, kesimpulan apa yang dapat kamu berikan. Mari kaji lebih lanjut percobaan ini. Misalkan percobaan 1, 2, dan 3 ditunjukkan dengan Gambar 10.16.

Perhatikan beberapa gambar berikut.



Gambar 10.16 Sebidang kertas dirotasi dengan pusat rotasi yang berbeda

Berikut adalah gambar hasil percobaan dengan tiga pusat pemutaran. Siswa boleh diarahkan untuk menentukan sendiri pusat pemutaran.

Berdasarkan gambar di atas, letak sebuah titik atau bidang setelah rotasi dipengaruhi oleh titik pusat rotasinya. Dengan demikian, mari kita temukan konsep rotasi sebuah titik dengan menampilkan percobaan tersebut ke dalam koordinat kartesius. Kamu diharapkan aktif dalam mengamati rotasi titik di pokok bahasan ini.

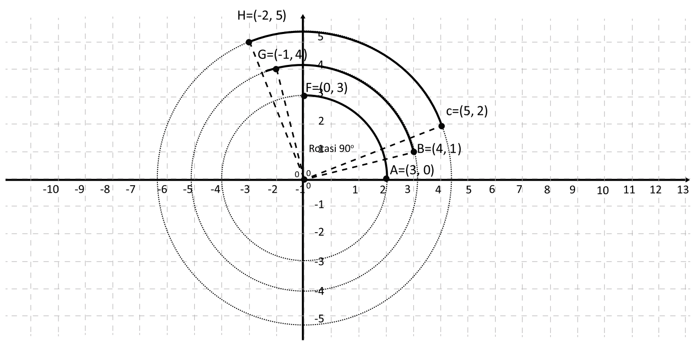
Pandu siswa untuk menarik kesimpulan dari percobaan tersebut. Pastikan siswa memahami bahwa rotasi bergantung pada pusat rotasi.

Rotasi pada Pusat O(0, 0)

Mari kita amati beberapa contoh rotasi titik dengan pusat O(0, 0) sebagai berikut.

Contoh 10.6

Rotasi titik sebesar 90^0 dengan pusat O(0, 0)



Gambar 10.17 Rotasi 90^0 beberapa titik pada bidang koordinat Kartesius dengan pusat O(0,0)

Setelah siswa memahami bahwa rotasi suatu objek bergantung pada pusat rotasi maka berikut adalah rotasi dengan pusat O(0,0) (lihat Gambar 10.16a). Arahkan siswa mengamati rotasi beberapa titik dengan pusat O(0,0) di samping. Siswa dapat diminta menentukan rotasi titik yang lain.

Pandu siswa menyajikan koordinat titik (objek) dan hasil rotasinya (bayangan) pada Gambar 10.17 ke dalam Tabel 10.6. Pandu siswa mengamati pola hubungan antara koordinat objek dan rotasinya.

Rotasi titik pada gambar di atas disajikan pada tabel berikut.

Tabel 10.6 Koordinat titik dan bayangannya oleh rotasi sejauh 90^0 dengan pusat O(0, 0)

Rotasi sejauh 90^0 dengan Pusat Rotasi O(0, 0)		
Titik Objek	**Titik Bayangan**	**Pola**
A(3, 0)	A'(0, 3)	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
B(4, 1)	B'(-1, 4)	$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
C(5, 2)	C'(-2, 5)	$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dengan demikian, rotasi 90^0 dengan pusat O(0, 0)

diwakili dengan matriks $R_{[0^o, O(0,\,0)]} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

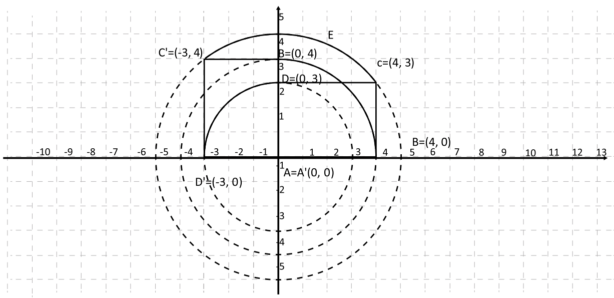
Untuk memperdalam pemahaman terhadap rotasi sebesar 90^o dengan pusat rotasi A(0,0) maka arahkan siswa menyelesaikan soal pada Contoh 10.7

Contoh 10.7

Bidang *ABCD* dengan A(0, 0), B(4, 0), C(4, 3) dan D(0, 3) dirotasikan sebesar 90^0 dengan pusat A(0, 0). Tunjukkan dan tentukan koordinat objek setelah dirotasikan.

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 10.18 Rotasi sebuah bidang ABCD dengan pusat O(0, 0)

Hasil rotasi setiap titik A, B, C, dan D menghasilkan bayangan titik A', B', C', dan D' yang dapat kita ketahui koordinatnya seperti pada tabel berikut.

Tabel 10.7 Koordinat titik dan bayangan bidang ABCD oleh rotasi sejauh 90^0 dengan pusat O(0, 0)

Rotasi sejauh 90^0 dengan Pusat Rotasi A(0, 0)	
Titik Objek	**Titik Bayangan**
A(0, 0)	A'(0, 0)
B(4, 0)	B'(0, 4)
C(4, 3)	C'(-3, 4)
D(0, 3)	D'(-3, 0)

Dengan mengamati Tabel 10.6 dan Tabel 10.7 maka pandu siswa menarik kesimpulan bahwa matriks rotasi 90^0 dengan pusat O(0,0) adalah

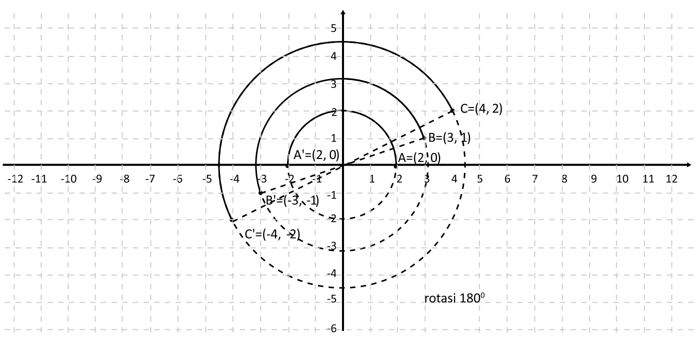
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Secara umum, kamu pasti sudah dapat melihat pola atau hubungan antara koordinat objek dengan koordinat bayangan, bukan? Jika sebuah titik A(a, b) dirotasikan dengan sudut 90^0 searah jarum jam dan pusat rotasi O(0, 0) maka koordinat bayangan adalah A'(-b, a). Ingat koordinat A'(-b, a) dapat dituliskan dengan $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Contoh 10.8

Rotasi titik sebesar 180^0 dengan pusat O(0, 0)

Setelah memahami rotasi pada sudut 90^0, arahkan siswa ke rotasi 180^0 dengan pusat rotasi O(0,0). Minta siswa mengamati rotasi pada Gambar 10.19



Gambar 10.19 Rotasi 180^0 titik pada koordinat kartesius dengan pusat O(0, 0)

Pandu siswa mengamati titik objek, titik bayangan dan hubungan kedua titik dan polanya pada Tabel 10.8

Arahkan siswa menemukan atau menarik kesimpulan bahwa matriks rotasi 180^0 dan pusat O(0,0) diwakili dengan matriks

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Pandu siswa membentuk kelompok. Minta siswa memahami kembali konsep rotasi pada contoh sebelumnya. Minta siswa menemukan konsep rotasi titik sebesar -90^0 dengan pusat O(0,0). Berikan kesempatan pada siswa mempresentasikan hasil kerja mereka.

Rotasi titik pada gambar 10.19 di atas disajikan pada tabel berikut.

Tabel 10.8 Koordinat titik dan bayangan titik oleh rotasi sejauh 180^0 dan pusat O(0, 0)

Rotasi sejauh 180^0 dengan Pusat Rotasi O(0, 0)		
Titik Objek	**Titik Bayangan**	**Pola**
A(2, 0)	A'(-2, 0)	$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
B(3, 1)	B'(-3, -1)	$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
C(4, 2)	C'(-4, -2)	$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dengan demikian, rotasi 180^0 dengan pusat O(0,0) diwakili

dengan matriks $R_{[180^o,\ O(0,\ 0)]} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Tugas Kelompok

Tunjukkan matriks yang mewakili rotasi titik sebesar -90^0 dengan pusat O(0, 0)

Dengan demikian, matriks rotasi dapat disajikan pada tabel berikut:

Matriks rotasi dengan sudut

1.	270^o	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	4.	-90^o	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
2.	180^o	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	5.	-180^o	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
3.	90^o	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	6.	-270^o	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rotasi pada Pusat P(a,b)

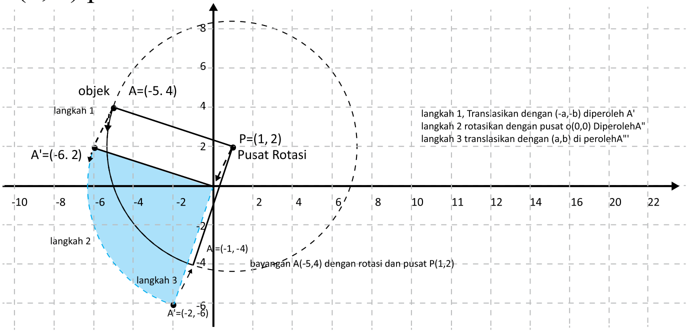
Mari kita amati beberapa contoh rotasi titik dengan pusat P(a, b) sebagai berikut.

Bimbing siswa ke konsep yang lebih dalam yaitu rotasi dengan pusat P(a,b). Minta siswa memahami Contoh 10.9

Contoh 10.9

Rotasi titik sebesar 90^0 dengan pusat $P(a, b)$

Tunjukkanlah rotasi titik A(-5, 4) sebesar 90^0 dengan pusat P(1, 2) pada sistem koordinat.



Gambar 10.20 Rotasi 90^0 titik A(-5,4) pada sistem koordinat Kartesius dengan pusat P(1, 2)

Arahkan siswa, jika rotasi dilakukan pada pusat P(a,b), mereka melakukan translasi T(-a,-b) terlebih dahulu sehingga diperoleh rotasi terhadap pusat O(0,0) dan hasilnya kemudian ditranslasi lagi dengan T(a,b). Pandu pemahaman siswa melalui pengamatan pada Gambar 10.20

Langkah-langkah rotasi sebagai berikut.

Langkah 1. Translasikan koordinat objek dengan (-a, -b) sehingga pusat rotasi berubah menjadi O(0, 0)
Titik A(-5, 4) ditranslasi dengan T(-1, -2) diperoleh A'(-6, -2)

Langkah 2. Rotasikan objek yang telah ditranslasikan sebesar sudut rotasi.
Titik A'(-6, -2) dirotasikan sebesar 90^0 dan pusat O(0, 0) diperoleh A''(-2, -6)

Langkah 3. Translasikan kembali koordinat hasil langkah 2 dengan pusat rotasi P(a, b). Titik A''(-2, -6) ditranslasikan kembali dengan (1, 2) diperoleh A'''(-1,-4)

Jadi, banyangan rotasi titik A(-5, 4) dengan rotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi P(1, 2) adalah A'''(-1, -4)

Berikan waktu kepada siswa mempelajari sendiri langkah-langkah rotasi berikut. Minta siswa menghubungkan langkah-langkah rotasi tersebut dengan Gambar 10.20. Guru harus memandu siswa memahami langkah-langkah tersebut, kemdian guru membuat sebuah masalah baru untuk dikerjakan oleh siswa.

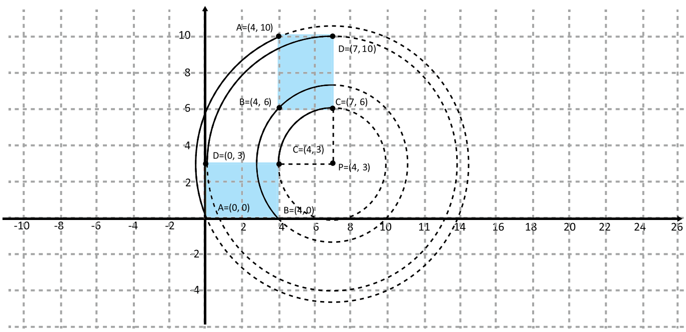
Untuk memperdalam pemahaman siswa, ajukan soal pada Contoh 10.10.

Contoh 10.10

Perhatikan bidang *ABCD* adalah A(0, 0), B(4, 0), C(4,3) dan D(0, 3) dirotasikan sebesar -90^0 dengan pusat rotasi P(7, 3).

Arahkan siswa mengamati gambar di samping.

Perhatikan gambar!



Gambar 10.21 Rotasi sebuah bidang ABCD dengan pusat P(7,3)

Minta siswa mengamati setiap koordinat pada tabel di bawah ini. Pandu siswa menemukan koordinat bayangan dari rotasi titik dengan pusat P(-7,-3) berdasarkan langkah – langkah rotasi di atas.

Tabel 10.9 Koordinat titik dan bayangan titik oleh rotasi sejauh -90^0 dan pusat P(7, 3)

Rotasi sejauh -90^0 dengan Pusat Rotasi P(7, 3)			
Titik Objek	Tranlasi T(-7, -3)	Rotasi -90^0 Pusat O(0, 0)	Translasi P(7, 3) = Titik Bayangan
A(0, 0)	A_1 (-7, -3)	A_2 (-3, 7)	(-3,7) + (7,3) = A'(4, 10)
B(4, 0)	B_1 (-3, -3)	B_2 (-3, 3)	(-3, 3) + (7,3) = B'(4,6)
C(4, 3)	C_1 (-3, 0)	C_2 (0, 3)	(0, 3) + (7,3) = C'(7, 6)
D(0, 3)	D_1(-7, 0)	D_2 (0, 7)	(0, 7) + (7, 3) = D'(7,10)

Arahkan siswa menemukan proses rotasi dengan pusat P(p,q).

Rotasi dengan matriks rotasi M_R dan pusat $P(p,q)$

Jika titik $A(a,b)$ dirotasi dengan matriks rotasi M_R dan pusat $P(p,q)$ adalah $A'(b,a)$.

Dituliskan, $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = M_R \begin{pmatrix} a-p \\ b-q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

Contoh 10.11

Sebuah garis $2x - 3y - 4 = 0$ dirotasikan sebesar 180^0 dengan titik pusat rotasi P(1, -1). Tentukanlah persamaan garis setelah dirotasikan.

Dengan memanfaatkan konsep di atas, pandu siswa memahami proses rotasi kurva (garis) pada Contoh 10.11 di samping. Pandu siswa langkah per langkah pada proses di samping.

Alternatif Penyelesaian.

Dengan menggunakan konsep yang telah ditemukan.

Misalkan titik A(x, y) adalah sembarang titik yang dilalaui oleh garis tersebut, sehingga:

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[P(1,-1)\ 180^0]}} A'(x', y')$$

Langkah 1. Translasi dengan T(-1,1)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

Langkah 2. Rotasi dengan sudut 180^0 dan pusat O(0,0)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+1 \\ -y-1 \end{pmatrix}$$

Langkah 3. Translasi dengan P(1,-1)

$$\begin{pmatrix} -x+1 \\ -y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2 \\ -y-2 \end{pmatrix}$$

Jadi, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2 \\ -y-2 \end{pmatrix}$ atau $x = -x'+2$ dan $y = -y'-2$ sehingga persamaan garis setelah dirotasikan adalah:

$$2(-x+2) - 3(-y-2) - 4 = 0$$

$$-2x + 4 + 3y + 6 - 4 = 0$$

$$-2x + 3y + 6 = 0$$

Arahkan siswa mengamati perkalian (dilatasi) objek pada sistem koordinat di bawah ini. Arahkan siswa mengamati perkalian (dilatasi) objek – objek tersebut. Arahkan siswa mengamati bentuk dan ukuran objek oleh perkalian tersebut. Berikan kesempatan kepada siswa menyampaikan pendapatnya.

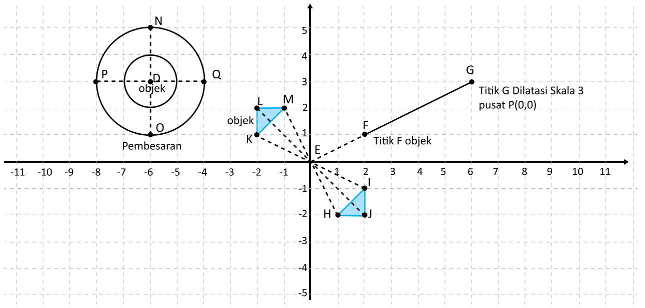
Minta siswa mengamati bentuk dan ukuran objek setelah didilatasi pada bidang koordinat pada Gambar 10.22 di samping. Minta komentar siswa akan bentuk, ukuran dan posisi objek setelah didilatasi.

Pandu siswa menarik kesimpulan sebagai sifat dilatasi melalui pengamatan dilatasi pada bidang koordinat tersebut. Lihat Sifat 10.7 -10.11

4. Memahami dan Menemukan Konsep Dilatasi (Perkalian)

4.1 Menemukan Sifat-Sifat Dilatasi

Kamu pernah mengamati sebuah balon yang dihembus atau diisi dengan udara, bukan? Makin banyak udara yang dipompa ke balon balon makin membesar. Pembesaran tersebut merupakan dilatasi sebuah benda. Perhatikan dilatasi beberapa objek pada gambar berikut.



Gambar 10.22 Dilatasi titik, bidang dan kurva pada koordinat kartesius.

Berdasarkan gambar di atas, bentuk suatu objek bila dilatasi tidak akan berubah, bukan? Tetapi bagaimana dengan ukurannya? Ukuran objek yang didilatasi akan berubah. Perhatikan sifat-sifat dilatasi berikut.

Perhatikan sifat-sifat dilatasi berikut.

Sifat 10.7

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk. Jika $k > 1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

Sifat 10.8

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran tetapi tidak mengubah bentuk. Jika $k = 1$ maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran dan letak.

Sifat 10.9

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran tetapi tidak mengubah bentuk. Jika $0 < k < 1$ maka bangun akan diperkecil dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

Sifat 10.10

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk. Jika $-1 < k < 0 - 1$ maka bangun akan diperkecil dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

Sifat 10.11

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk. Jika $k < -1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

4.2 Menemukan Konsep Dilatasi

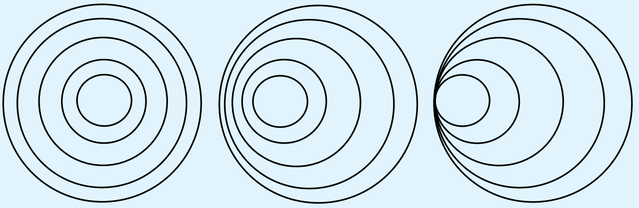
Masalah-10.4

Pernahkah kamu melihat gelombang di permukaan air yang tenang. Coba kamu isi air pada ember dengan permukaan berbentuk lingkaran kemudian biarkan sejenak agar permukaan air tidak beriak atau tenang. Kemudian, coba kamu jatuhkan setetes air ke permukaan air yang tenang tersebut. Pengamatan apa yang kamu peroleh?

Tentu kamu melihat ada gelombang di permukaan air. Misalkan gelombang air tersebut kita ilustrasikan sebagai berikut.

Arahkan siswa melakukan percobaan seperti pada masalah 10.4. Minta siswa mengamati setiap gelombang yang muncul di permukaan air. Minta siswa menggambar bentuk gelombang air yang diamatinya.

Minta siswa menjelaskan pengaruh pola gelombang dengan posisi jatuhnya tetesan air tersebut. Tentu saja, jelas nampak bahwa pola perbesaran gelombang dipengaruhi posisi air diteteskan.



Gambar 10.23 Bentuk gelombang pada permukaan air

Gambar 10.23 *a* terjadi jika kamu jatuhkan setetes air di tengah permukaan air tersebut. Coba kamu lakukan sebuah percobaan tersebut di sekolah atau di rumah. Gambar 10.23 *b* terjadi jika kamu menjatuhkan air di permukaan di luar titik pusatnya. Jika demikian, dapatkah kamu berikan komentar, di manakah dijatuhkan setetes air pada permukaan air agar terbentuk pola gelombang air pada gambar 10.23 *c*? Kamu dapat melakukan pengamatan pada beberapa percobaan sederhana di rumahmu.

Mari kita lakukan kembali pengamatan pada gambar 10.23 *a*, 10.23 *b*, 10.23 *c* di atas. Berdasarkan gambar tersebut, gelombang diperbesar atau diperkecil bergantung kepada sebuah faktor pengali. Perhatikan kembali sifat-sifat dilatasi. Perhatikan kembali gambar tersebut, bentuk dilatasi gelombang tersebut juga bergantung pada pusat dilatasi. Dengan demikian, kita akan mempelajari kasus ini kembali untuk membangun konsep dilatasi. Ingat kembali materi dilatasi pada pokok bahasan transformasi di saat kamu di kelas VII.

Mari kita angkat kembali permasalahan dilatasi bangun tersebut. Amatilah perkalian bangun pada koordinat kartesius berikut.

Contoh 10.12

Sketsalah dilatasi titik berikut:

Titik A(1, 3) dengan skala 2 dan pusat O(0, 0)

Titik B(3, 2) dengan skala 3 dan pusat O(0, 0)

Minta siswa mengamati perkalian (dilatasi) titik pada contoh 10.12. Arahkan siswa memahami langkah-langkah penyelesaian di bawah ini. Berikan kesempatan pada siswa untuk menyampaikan pemahamannya terkait contoh dilatasi tersebut.

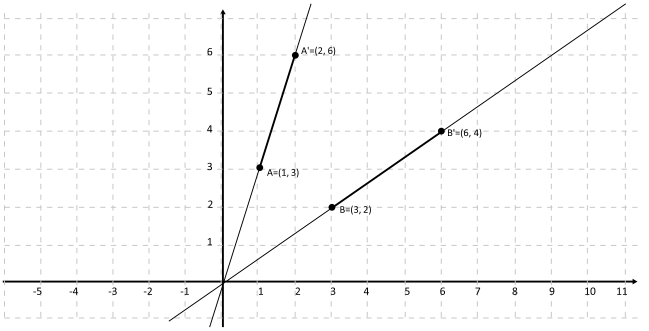
Alternatif Penyelesaian

Langkah 1 : Letakkanlah titik A atau titik B pada bidang koordinat Kartesius

Langkah 2 : Tariklah sebuah garis lurus yang menghubungkan titik A atau titik B ke titik pusat dilatasi.

Langkah 3 : Tentukanlah titik A' atau B' yang jaraknya 2 kali dari titik A atau titik B dengan pusat dilatasi.

Langkah 4 : Titik tersebut adalah dilatasi titik A dengan faktor skala 2 dan pusat dilatasi.



Gambar 10.24 Dilatasi dua buah titik dengan pusat O(0, 0)

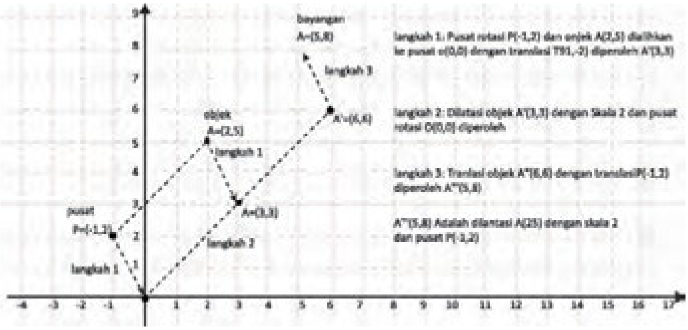
Dengan demikian bayangan titik A atau B oleh didilatasi dengan faktor skala 2 dengan pusat O(0, 0) adalah A'(2, 6) atau B'(6, 4).

Minta siswa memahami Contoh 10.13. Arahkan siswa mempelajari terlebih dahulu kemudian arahkan proses pembelajaran ke sesi tanya jawab.

Contoh 10.13

Sketsalah dilatasi titik A(2, 5) dengan pusat P(-1, 2) dan skala 2

Perhatikan sketsa dilatasi titik di atas.



Gambar 10.25 Dilatasi titik A(2, 5) dengan pusat P(-1, 2)

Pandu siswa untuk menemukan proses dilatasi pada sebuah titik secara umum. Pandu siswa memahami langkah per langkah.

Agar proses dilatasi titik dengan pusat P(p, q) dan skala k dapat dengan mudah diproses maka perlu dialihkan ke dilatasi dengan pusat O(0, 0), yaitu dengan melakukan translasi T(-p, -q), hasil dilatasi akan ditranslasikan kembali dengan translasi P(p, q). Dengan demikian, proses dilatasi adalah:

Langkah 1. Translasikan pusat P(p, q) dan objek A(a, b) dengan translasi T(-p, -q).

Diperoleh: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-p \\ b-q \end{pmatrix}$

Langkah 2. Dilatasikan A'(a – p, b – q) dengan skala k dan pusat O(0, 0)

Diperoleh: $\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a-p \\ b-q \end{pmatrix}$

Langkah 3. Translasikan A" dengan P(p, q)

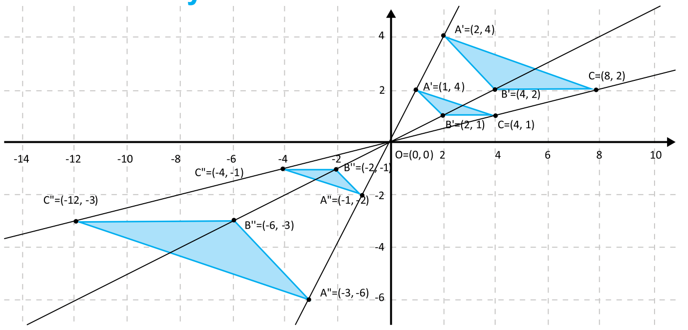
Diperoleh: $\begin{pmatrix} a''' \\ b''' \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a-p \\ b-q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

Contoh 10.14

Sebuah segitiga *ABC*, dengan A(1, 2), B(2, 1) dan C(4, 1) didilatasi dengan faktor skala k = 2, k = -1, dan k = -3 serta pusat O(0, 0) sehingga diperoleh berturut-turut segitiga A'B'C', A"B"C", dan A'"B'"C'"

Minta siswa mengamati gambar pada Contoh 10.14. Minta siswa mengkaitkan kembali gambar di samping dengan sifat – sifat dilatasi di atas.

Alternatif Penyelesaian



Gambar 10.26 Dilatasi bidang pada pusat O(0, 0) dan faktor berbeda

Perhatikan tabel berikut.

Arahkan siswa mengamati koordinat objek dan bayangannya pada Tabel 10.10. Arahkan siswa menemukan polanya.

Tabel 10.10 Dilatasi bidang ABC pada pusat O(0,0) dan faktor berbeda

Titik Obyek	$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$B\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$C\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	**Faktor skala**
Pusat	$O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
Titik Bayangan 1	$A'\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$B'\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$C'\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	k = 2

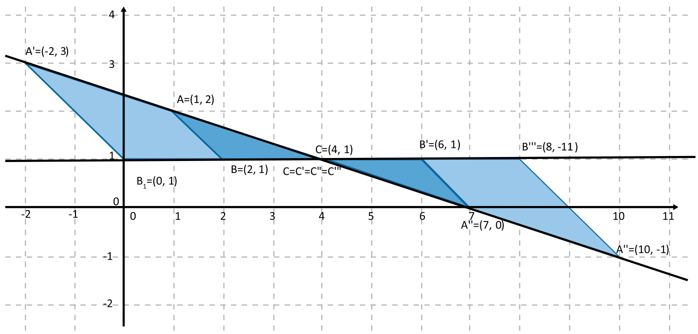
Titik Bayangan 2	$A''\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$B''\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$C''\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	k = -1
Titik Bayangan 3	$A'''\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$B'''\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$C'''\begin{pmatrix}-12\\-3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	k = -3

Bentuk kelompok siswa terdiri dua orang. Sebaiknya teman satu meja atau yang berdekatan. Minta mereka memahami contoh 10.15. Berikan kesempatan pada siswa menjelaskan pemahaman mereka tentang contoh dilatasi tersebut. Guru mengarahkan siswa berinteraksi tanya-jawab. Guru memperbaiki jawaban siswa dan konsep mereka yang menyimpang

Arahkan siswa mengamati koordinat objek dan bayangannya pada Tabel 10.11. Arahkan siswa menemukan polanya.

Contoh 10.15

Sebuah segitiga *ABC*, dengan A(1, 2), B(2, 1) dan C(4, 1) didilatasi dengan faktor skala $k = a$, $k = b$, dan $k = c$ serta pusat C(4, 1) sehingga diperoleh berturut-turut segitiga A'B'C', A"B"C", dan A'''B'''C'''



Gambar 10.27 Dilatasi sebuah bidang dengan pusat pada salah satu titik pojoknya

Perhatikan tabel berikut.

Tabel 10.11 Dilatasi bidang ABC pada pusat P(4, 1) dan faktor berbeda

Titik Obyek	$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$C\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	**Faktor skala**
Pusat	$C\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	$C\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	$C\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	
Titik Bayangan 1	$A'\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$B'\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$C'\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	k = 2

Titik Bayangan 2	$A''\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$B''\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$C''\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	k = -1
Titik Bayangan 3	$A'''\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$B'''\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$C'''\begin{pmatrix}-12\\-3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	k = -3

1. Dilatasi dengan pusat O(0, 0) dan faktor skala k

$$A(a,b)\xrightarrow{D_{[O,k]}}A'(a',b')$$

$$\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

2. Dilatasi dengan pusat $P(p, q)$ dan faktor skala k

$$A(a,b)\xrightarrow{D_{[P(p,q)\,k]}}A'(a',b')$$

$$\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a-p\\b-q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$$

Dengan melakukan pengamatan pada contoh – contoh dan tabel di atas, guru dan siswa menarik kesimpulan dalam bentuk definisi dilatasi di samping.

Contoh 10.16

Sebuah garis g: $2x-3y-6=0$ didilatasikan dengan faktor k = 3 dan pusat dilatasi pada titik $P(1,-2)$. Tentukanlah bayangannya.

Minta siswa mengerjakan Contoh 10.16. Pandu siswa tetap menggunakan definisi dilatasi di atas.

Alternatif Penyelesaian.

Misalkan titik $A(x,y)$ adalah sembarang titik pada garis yang akan didilatasikan, sehingga:

$$A(x,y)\xrightarrow{D[P(1,-2)\ 3]}A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x-1\\y+2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-2\\3y+4\end{pmatrix}$$

Minta siswa untuk menunjukkan proses dilatasi dengan menggunakan gambar pada koordinat kartesius.

sehingga $x' = 3x - 2$ atau $x = \dfrac{x'+2}{3}$ dan $y' = 3y + 4$ atau $y = \dfrac{y'-4}{3}$

sehingga bayangan garis $2x - 3y - 6 = 0$ adalah

$2(\dfrac{x+2}{3}) - 3(\dfrac{y-4}{3}) - 6 = 0$ atau $2x - 3y - 2 = 0$.

Berikan soal - soal uji kompetensi ini sebagai tugas di rumah bagi siswa. Tujuan pemberian uji kompetensi ini adalah untuk mengetahui apakah siswa sudah memahami tentang konsep rotasi dan dilatasi

Uji Kompetensi 10.2

1. Tunjukkanlah secara gambar perputaran dari beberapa titik berikut!
   a. Titik $A(2, -3)$ dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi O(0, 0).
   b. Titik $A(2, -3)$ dirotasi sebesar -90^0 dengan pusat rotasi O(0, 0).
   c. Titik $A(-3, 4)$ dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi P(-1, 1).
   d. Titik $A(-3, 4)$ dirotasi sebesar -180^0 dengan pusat rotasi P(-1, 1).
   e. Titik $A(1, 2)$ bila dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi O(0, 0) kemudian dilanjutkan dengan rotasi sebesar -270^0dengan pusat rotasi O(0, 0).
   f. Titik$A(-1, 3)$ bila dirotasi sebesar -90^0 dengan pusat rotasi P(1, 2) kemudian dilanjutkan dengan rotasi sebesar 180^0 dengan pusat rotasi Q(-1, 1).
   g. Segitiga PQR dengan koordinat $P(2, 0)$, $Q(-3, 3)$ dan $R(8, 0)$ bila dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi salah satu titik pojoknya.

2. Tentukanlah persamaan kurva oleh rotasi R berikut!
   a. Garis lurus $2x-3y+4=0$ dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi O(0, 0).
   b. Garis lurus $2x-3y+4=0$ dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi P(1, -1).
   c. Parabola $y-x^2-3x+4=0$ dirotasi sebesar 180^0 dengan pusat rotasi O(0, 0).
   d. Parabola $y-x^2-3x+4=0$ dirotasi sebesar 270^0 dengan pusat rotasi pada titik puncaknya.
   e. Lingkaran $x^2+y^2-2x-4x-20=0$ dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi pada titik O(0, 0).
   f. Lingkaran $x^2+y^2-2x-4x-20=0$ dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi pada titik P(6, 3).
   g. Lingkaran $x^2+y^2-2x-4x-20=0$ dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi pada titik P(8, 1).
3. Tunjukkanlah secara gambar dilatasi dari beberapa titik berikut!
   a. Titik $A(2, –3)$ bila didilatasikan dengan skala 2 dan pusat P(0, 0).
   b. Titik $A(–3, 4)$ bila didilatasikan dengan skala -2 dan pusat P(0, 0).
   c. Titik $A(1, 2)$ bila didilatasikan dengan skala 2 dan pusat P(0, 0) dilanjutkan dengan dilatasi dengan skala -3 dan pusat P(0, 0).
   d. Titik $A(–3, 4)$ bila didilatasikan dengan skala -2 dan pusat P(1, -1).
   e. Titik $A(2, –3)$ bila didilatasikan dengan skala 2 dan pusat P(-2, 0).

f. Titik $A(2, –3)$ bila didilatasikan dengan skala 2 dan pusat P(-1, 1) dilanjutkan dengan dilatasi dengan skala -1 dan pusat P(2, -1).

g. Segitiga PQR dengan koordinat $P(2, 0)$, $Q(–3, 3)$ dan $R(8, 0)$ bila didilatasikan dengan faktor skala 2 dengan pusat P(0, 0).

h. Segitiga PQR dengan koordinat $P(2, 0)$, $Q(–3, 3)$ dan $R(8, 0)$ bila didilatasikan dengan faktor skala -3 dengan pusat P(1, 1).

4. Tentukanlah persamaan kurva oleh Dilatasi D berikut!

   a. Parabola $y-x^2-3x+4=0$ didilatasi dengan faktor skala 2 dengan pusat rotasi O(0, 0).

   b. Parabola $y-x^2-3x+4=0$ didilatasi dengan faktor skala -2 dengan pusat rotasi pada titik puncaknya.

   c. Lingkaran $x^2+y^2-2x-4x-20=0$ didilatasi dengan faktor skala 1/2 dengan pusat rotasi pada titik O(0, 0).

   d. Lingkaran $x^2+y^2-2x-4x-20=0$ didilatasi dengan faktor skala -1 dengan pusat rotasi pada titik P(1,-5).

   e. Lingkaran $x^2+y^2-2x-4x-20=0$ didilatasi dengan faktor skala -1 dan pusat P(0,0) dilanjutkan dilatasi dengan faktor skala -1 dengan pusat rotasi pada titik P(1,5).

D. PENUTUP

Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep transoformasi di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. Translasi atau pergeseran adalah suatu transformasi yang memindahkan setiap titik pada sebuah bidang berdasarkan jarak dan arah tertentu. Misalkan x, y, a, dan b adalah bilangan real, translasi titik A (x, y) dengan T (a, b) adalah menggeser absis x sejauh a dan menggeser ordinat y sejauh b, sedemikian hingga diperoleh A'$(x + a, y + b)$, secara notasi dilambangkan dengan:
$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$
2. Refleksi atau pencerminan adalah satu jenis transformasi yang memindahkan setiap titik pada suatu bidang dengan mengggunakan sifat bayangan cermin dari titik-titik yang dipindahkan.

   a. Pencerminan titik A(a, b) terhadap titik asal $(0, 0)$ $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ dengan $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

   b. Pencerminan titik A (a, b) terhadap

   sumbu $x = h$ didefinisikan dengan:

   $$A(a, b) \xrightarrow{C_{x=h}} A'(2h - a, b)$$

   , sedangkan pencerminan titik A (a, b)

   terhadap sumbu $y = k$ didefinisikan dengan:

   $$A(a, b) \xrightarrow{C_{y=k}} A'(a, 2k - b)$$

c. $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{sumbu\ x}} A'\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ dengan $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

d. Pencerminan titik A (a, b) terhadap sumbu x

e. Pencerminan A(a, b) terhadap garis $y = x$ dengan

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

3. Rotasi atau perputaran adalah transformasi yang memindahkan suatu titik ke titik lain dengan perputaran terhadap titik pusat tertentu. Rotasi terhadap titik O(0, 0) sebesar 90^0 dirumuskan dengan: $A(a,b) \xrightarrow{R_{[O(0,0),90^0]}} A'(-b, a)$.

4. Dilatasi atau perubahan skala adalah suatu transformasi yang memperbesar atau memperkecil bangun tetapi tidak mengubah bentuk. Dilatasi dengan pusat O(0, 0) dan faktor skala k dirumuskan dengan $A(a,b) \xrightarrow{D_{[O,k]}} A'(ka, kb)$, : sedangkan dilatasi dengan pusat $P(p, q)$ dan faktor skala k dirumuskan dengan: $A(a,b) \xrightarrow{D_{[P(p,q),k]}} A'[p + k(a-p), q + k(b-q)]$.

Bab 11

TURUNAN

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

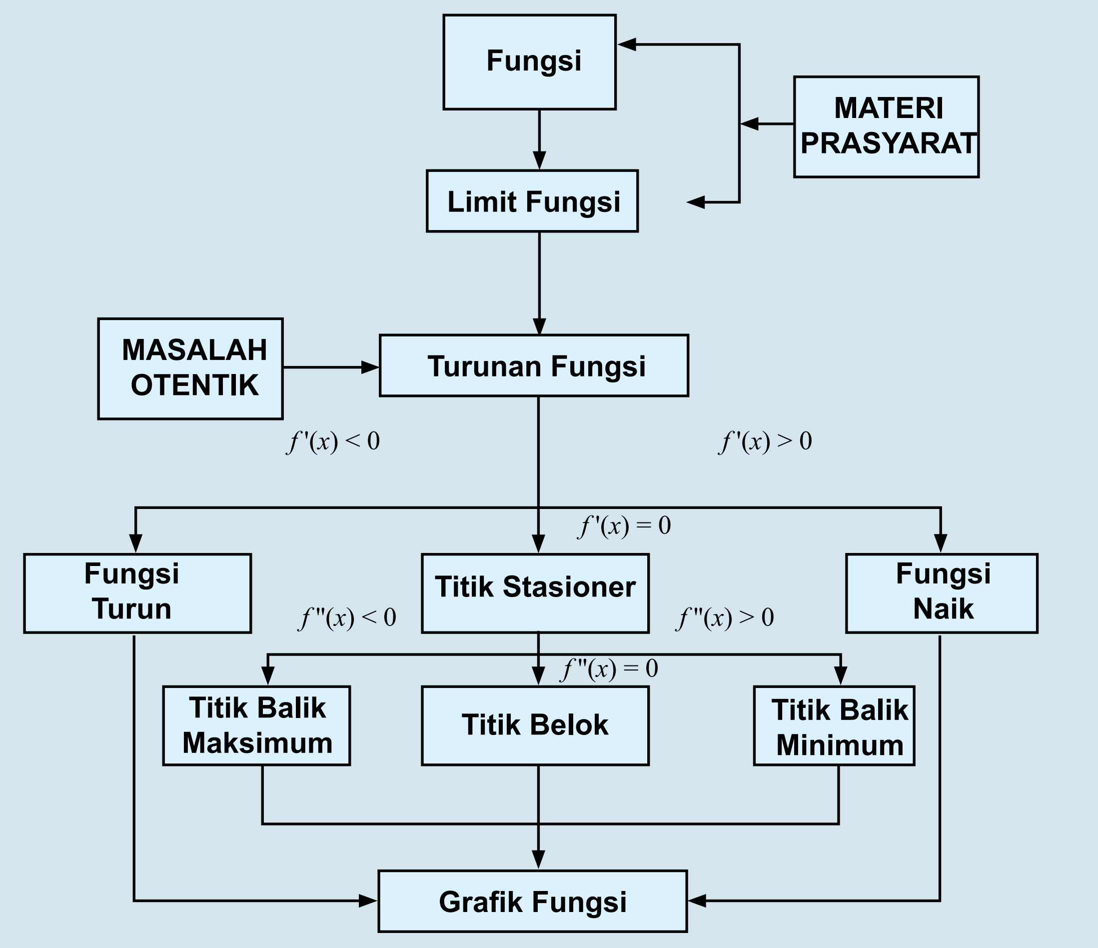
Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran turunan siswa mampu: 1. Mampu mentransformasi diri dalam berperilaku jujur, tangguh menghadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 2. Mendeskripsikan konsep turunan dengan menggunakan konteks matematik atau konteks lain dan menerapkannya. 3. Menurunkan aturan dan sifat turunan fungsi aljabar dari aturan dan sifat limit fungsi. 4. Mendeskripsikan konsep turunan dan menggunakannya untuk menganalisis grafik fungsi dan menguji sifat-sifat yang dimiliki untuk mengetahui fungsi naik dan fungsi turun. 5. Menerapkan konsep dan sifat turunan fungsi untuk menentukan gradien garis singgung kurva, garis tangen, dan garis normal. 6. Mendeskripsikan konsep dan sifat turunan fungsi terkait dan menerapkannya untuk menentukan titik stasioner (titik maksimum, titik minimum dan titik belok).	Melalui pembelajaran materi turunan, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Terlatih berpikir kritis, kreatif dalam menganalisis permasalahan. • Bekerjasama dalam tim dalam menemukan solusi permaslahan melalui pengamatan, diskusi, dan menghargai pendapat dalam saling memberikan argumen. • Terlatih melakukan penelitian dasar terhadap penemuan konsep. • Mengkomunikasikan karakteristik masalah otentik yang pemecahannya terkait turunan. • Merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang berkaitan dengan turunan.

Istilah Penting

- *Turunan*
- *Fungsi naik*
- *Fungsi turun*
- *Garis singgung fungsi*

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran turunan siswa mampu: 7. Menganalisis bentuk model matematika berupa persamaan fungsi, serta menerapkan konsep dan sifat turunan fungsi dalam memecahkan masalah maksimum dan minimum. 8. Memilih strategi yang efektif dan menyajikan model matematika dalam memecahkan masalah nyata tentang turunan fungsi aljabar. 9. Memilih strategi yang efektif dan menyajikan model matematika dalam memecahkan masalah nyata tentang fungsi naik dan fungsi turun. 10 Merancang dan mengajukan masalah nyata serta menggunakan konsep dan sifat turunan fungsi terkait dalam titik stasioner (titik maksimum, titik minimum dan titik belok). 11.Menyajikan data dari situasi nyata, memilih variabel dan mengkomunikasikannya dalam bentuk model matematika berupa persamaan fungsi, serta menerapkan konsep dan sifat turunan fungsi dalam memecahkan masalah maksimum dan minimum.	Melalui pembelajaran materi turunan, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Menyelesaikan model matematika untukmenganalisisdanmendapatkansolusiper-masalahan yang diberikan. • Menuliskan dengan kata-katanya sendiri konsep turunan berdasarkan ciri-ciri yang dituliskan sebelumnya. • Membuktikan sifat-sifat dan aturan matematika yang berkaitan dengan turunan berdasarkan konsep yang sudah dimiliki. • Menerapkan berbagai sifat turunan dalam pemecahan masalah.

B. PETA KONSEP



Perkenalkan kepada siswa materi yang akan disampaikan. Bangun motivasi siswa dengan memberikan informasi kebergunaan konsep ini di kehidupan sehari-hari, seperti aplikasi di berbagai bidang (geometri, fisika, teknik .(dan lain-lain

C. MATERI PEMBELAJARAN

1.Menemukan Konsep Turunan Suatu Fungsi

Turunan merupakan salah satu dasar atau fundasi dalam analisis sehingga penguasaan kamu terhadap berbagai konsep dan prinsip turunan fungsi membantu kamu memecahkan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Suatu fungsi dapat dianalisis berdasarkan ide naik/turun, keoptimalan dan titik beloknya dengan menggunakan konsep turunan. Pada bagian berikut, kita akan mencoba mengamati berbagai permasalahan nyata dan mempelajari beberapa kasus dan contoh untuk menemukan konsep turunan. Kita memulainya dengan menemukan konsep persamaan garis tangen/singgung.

Ingat kembali konsep gradien persamaan garis yang dipelajari di SMP dan di Bab IV kelas XI. Minta siswa menyebutkan kembali konsep gradien tersebut.

1.1 Menemukan Konsep Garis Sekan dan Garis Tangen

Coba kamu amati dan cermati berbagai masalah nyata yang diajukan, bermanfaat sebagai sumber abstraksi kita dalam menemukan konsep dan hubungan antara garis sekan atau tali busur dan garis singgung.

Ajukan Masalah 11.1 kepada siswa sebagai salah satu masalah nyata terkait garis sekan dan garis tangen. Beri kesempata kepada siswa untuk memahami kasus dan mempelajari sketas pada Gambar 11.2. Minta siswa untuk menuliskan apa yang diketahui, dan ditanyakan, menginterpretasi masalah dalam gambar, untuk menunjukkan pergerakan pemain ski dan menemukan konsep

Masalah-11.1

Seorang pemain ski meluncur kencang di permukaan es yang bergelombang. Dia meluncur turun kemudian naik mengikuti lekukan permukaan es sehingga di suatu saat, dia melayang ke udara dan turun kembali ke permukaan. Perhatikan gambar di bawah.

Gambar 11.1 Bermain ski

Permasalahan

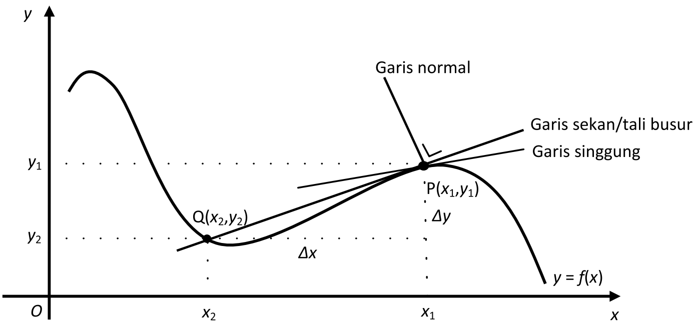
Secara analitik, misalkan bahwa bukit es disketsa pada bidang (dimensi dua) dengan sudut pandang tegak lurus ke depan dan papan ski adalah sebuah garis lurus sehingga terdapat dua garis lurus. Dapatkah kamu tunjukkan hubungan kedua garis tersebut?

terkait hubungannya dengan garis sekan dan garis tangen.

Alternatif Penyelesaian

Coba kamu amati gambar di bawah ini. Misalkan deskripsi permasalahan di atas ditampilkan dalam bentuk gambar berikut.

Minta siswa mengamati gambar. Jika kurva f(x) disamping adalah lintasan yang dilalui peluncur maka setiap titik pada kurva akan dilalui sehingga perpindahan peluncur dianggap perpindahan setiap Q ke arah titik P.



Gambar 11.2 Garis sekan, garis singgung dan garis normal

Posisi tegak pemain terhadap papan ski adalah sebuah garis yang disebut garis normal. Papan ski yang menyinggung permukaan bukit es di saat melayang ke udara adalah sebuah garis yang menyinggung kurva disebut garis singgung. Jadi, garis singgung tegak lurus dengan garis normal. Tujuan kita adalah mendapatkan persamaan garis singgung (PGS).

Misalkan pemain ski mulai bergerak dari titik $Q(x_2, y_2)$ dan melayang ke udara pada saat titik $P(x_1, y_1)$ sehingga ia akan bergerak dari titik Q mendekati titik P. Garis yang menghubungkan kedua titik disebut garis tali busur atau garis sekan. Sepanjang pergerakan tersebut, terdapat banyak garis sekan yang dapat dibentuk dari titik Q menuju titik P dengan gradien awal $m_{\sec} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

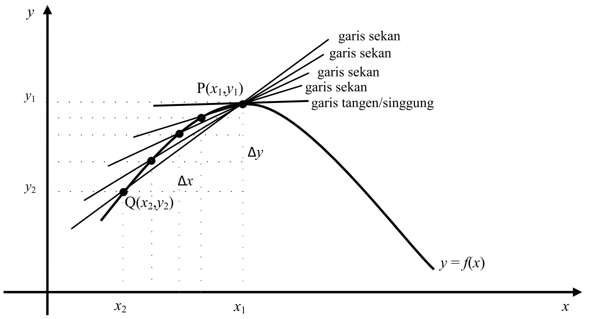
Minta siswa mengamati gambar di atas kembali dan meminta mengajukan berbagai pertanyaan terkait gambar serta menemukan pemaknaan istilah tali busur, garis normal, dan garis singgung pada kurva. Minta siswa mengamati setiap garis yang dibentuk titik Q dan P, kemudian mencari hubungan garis normal, garis sekan dan garis tangen.

Meminta siswa mencoba menggambarkan tali busur (garis sekan) PQ, dengan posisi titik Q berada pada kurva yang semakin mendekati posisi titik P. Arahkan siswa menganalisis perubahan gerakan tali busur PQ, untuk menemukan pengertian garis sekan. Tanya siswa, terdapat berapa banyakkah garis sekan yang dapat dibuat dari pergerakan titik Q ke titik P pada gambar di samping? Arahkan siswa secara kelompok menuliskan ciri-ciri garis sekan dan menuliskan pengertian garis sekan, garis tangen. Arahkan siswa mencari gradien garis sekan. Minta siswa menyebutkan kembali konsep gradien pada garis lurus. Hasil diskusi dijelaskan oleh masing – masing kelompok.

Pandu siswa untuk membentuk Definisi 11.1 berikut. Minta siswa memberikan penjelasan Definisi 11.1 dengan uraian kata-katanya sendiri. Guru memandu dan mengarahkan bila

Coba kamu amati proses matematis berikut. Misalkan $x_2 = x_1 + \Delta x$ dan $y_2 = y_1 + \Delta y$ sehingga: jika Δx makin kecil maka Q akan bergerak mendekati P atau jika $\Delta x \to 0$ maka $Q \to P$.

Perhatikan gambar!



Gambar 11.3 Gradien garis sekan mendekati gradien garis singgung

Karena $y = f(x)$ maka gradien garis sekan PQ adalah

$$m_{PQ} = m_{\sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{(x_1 + \Delta x) - x_1} \Leftrightarrow m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Definisi 11.1

Misalkan $f : R \to R$ adalah fungsi kontinu dan titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ pada kurva f. Garis sekan menghubungkan titik P dan Q dengan gradien

$$m_{\sec} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Amati kembali gambar di atas. Jika titik Q mendekati P maka $\Delta x \to 0$ sehingga diperoleh garis singgung di titik P dengan gradien:

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (\text{jika limitnya ada}).$$

Definisi 11.2

Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva f. Gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah limit gradien garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis:

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (\text{Jika limitnya ada})$$

Contoh 11.1

Tentukanlah persamaan garis singgung di titik dengan absis $x = -1$ pada kurva $f(x) = x^4$.

Alternatif Penyelesaian.

Misalkan $x_1 = -1$ dan $y_1 = (-1)^4 = 1$ sehingga titik singgung $P(-1,1)$. Jadi, gradien garis singgung adalah:

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-1 + \Delta x)^4 - (-1)^4}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(-1 + \Delta x)^2 + (-1)^2][(-1 + \Delta x)^2 - (-1)^2]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(-1 + \Delta x)^2 + (-1)^2][(-1 + \Delta x) + (-1)][(-1 + \Delta x) - (-1)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(-1 + \Delta x)^2 + 1][-2 + \Delta x]\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} [(-1 + \Delta x)^2 + 1][-2 + \Delta x] = -4$$

Jadi, persamaan garis singgung adalah $y - 1 = -4(x - (-1))$ atau $y + 4x + 3 = 0$. Perhatikan gambar berikut.

muncul jawaban yang menyimpang dari definisi. Ingatkan siswa bahwa materi Limit Fungsi pada Bab X di kelas X adalah materi prasyarat terhadap pelajaran ini.

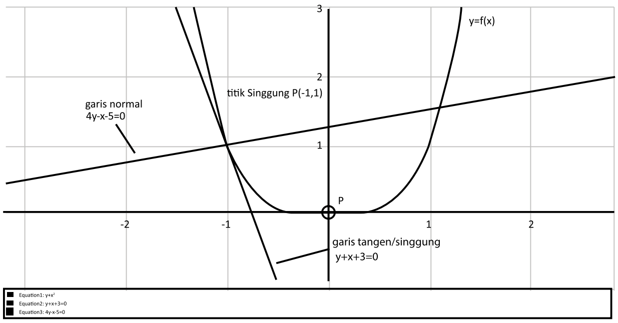
Arahkan siswa memahami Definisi 11.2.

Tanya siswa, apa arti dari $\lim_{\Delta x \to 0} m_{\sec}$? Arahkan kembali ke Gambar 11.3.

Guru mengajukan beberapa contoh dan mengajak siswa bersama-sama mencoba menyelesaikan soal yang diajukan.

Minta siswa menjabarkan $(-1 + \Delta x)^4$ tanpa menggunakan Binomial Newton.

Minta siswa mengamati grafik di samping. Minta siswa mengamati garis tangen, garis sekan dan kurva.



Gambar 11.4 Garis singgung dan garis normal kurva $f(x) = x^4$ di titik P(-1,1)

Arahkan siswa kembali mengamati Gambar 11.3. Tanya siswa, jika titik P dengan absis x berada disepanjang kurva maka apa arti $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$*?*

1.2 Turunan sebagai Limit Fungsi

Kita telah menemukan konsep garis singgung grafik suatu fungsi dan hubungannya dengan garis sekan dan garis normal. Berikutnya, kita akan mempelajari lebih dalam lagi konsep garis singgung grafik suatu fungsi tersebut untuk mendapatkan konsep turunan.

Coba kamu perhatikan dan amati kembali sketsa kurva pada Gambar 11.3. Dengan memisalkan $x_2 = x_1 + \Delta x$ dan $y_2 = y_1 + \Delta y$ maka titik Q akan bergerak mendekati P untuk Δx makin kecil. Gradien garis singgung di titik P disebut turunan fungsi pada titik P yang disimbolkan dengan:

$$m_{\tan} = f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \ (\text{Jika limitnya ada}).$$

Jika f kontinu maka titik P dapat berada di sepanjang kurva sehingga turunan suatu fungsi pada setiap x dalam daerah asal adalah:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \ (\text{Jika limitnya ada}).$$

Perlu diperkenalkan simbol-simbol turunan agar tidak terjadi kebingungan bila simbol

Perlu diinformasikan, penulisan simbol turunan dapat berbeda-beda. Beberapa simbol turunan yang sering dituliskan adalah:

Notasi Newton

- $f'(x)$ atau y' turunan pertama fungsi

Notasi Leibniz

- $\dfrac{df(x)}{dx}$ atau $\dfrac{dy}{dx}$ turunan pertama fungsi

tersebut berubah di buku ajar lainnya.

Definisi 11.3

Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x)$.

Fungsi f dapat diturunkan di titik c jika dan hanya jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.

Pandu siswa memahami Definisi 11.3 dan Definisi 11.4
Minta siswa menjelaskan kembali Definisi 11.3 dengan menggunakan gambar.

Definisi 11.4

Misalkan $f: S \to R$ dengan $S \subseteq R$. Fungsi f dapat diturunkan pada S jika dan hanya jika fungsi f dapat diturunkan di setiap titik c di S.

Masalah-11.2

Seekor burung camar terbang melayang di udara dan melihat seekor ikan di permukaan laut. Burung tersebut terbang menukik dan menyambar ikan kemudian langsung terbang ke udara. Lintasan burung mengikuti pola fungsi $f(x) = |x|$ pada batas x tentukan. Dapatkah kamu sketsa grafik tersebut. Coba amati dan teliti dengan cermat turunan fungsi tersebut pada titik O(0,0).

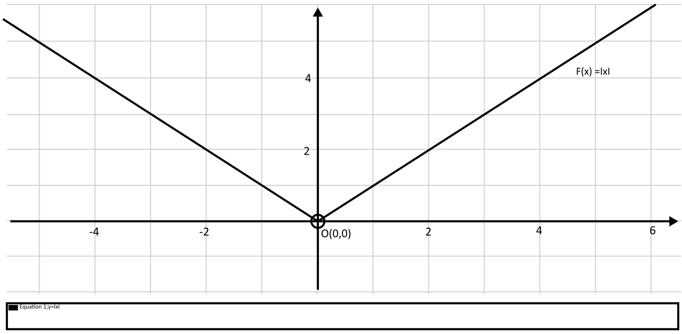
Ajukan Masalah 11.2 untuk dipahami siswa. Ingatkan kembali siswa materi nilai mutlak pada Bab 2 kelas X. Minta siswa mensketsa fungsi nilai mutlak tersebut

Alternatif Penyelesaian

Ingat kembali pelajaran nilai mutlak pada bab 2 kelas X

Misalkan posisi ikan di permukaan laut adalah titik O(0,0) sehingga sketsa permasalahan di atas adalah sebagai berikut (ingat cara menggambar kurva $f(x) = |x|$ di kelas X):

Minta siswa memperhatikan sketsa fungsi nilai mutlak di samping. Sekarang, arahkan siswa untuk mendapatkan turunan fungsi tersebut.



Gambar 11.5 Kurva fungsi $f(x) = |x|$

Berdasarkan definisi nilai mutlak pada Bab 2 kelas X (Definisi 2.1) dan konsep turunan, pandu siswa menemukan turunan fungsi f(x) = |x|.
Ingatkan siswa konsep limit kiri dan limit kanan pada Bab 10 kelas X.

Berdasarkan konsep turunan di atas maka

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ bila limitnya ada.

i. Jika $x \geq 0$ maka $f(x) = x$ sehingga:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = 1$$

(limit kanan ada).

ii. Jika $x < 0$ maka $f(x) = -x$ sehingga:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(x+\Delta x) - (-x)}{\Delta x} = -1$$

(limit kiri ada).

Coba kamu amati proses tersebut, jika Δx menuju 0 didekati dari kanan dan Δx menuju 0 didekati dari kiri, maka $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ tidak sama, bukan? Hal ini mengakibatkan turunan fungsi $f(x) = |x|$ di titik $x = 0$ tidak ada atau fungsi tidak dapat diturunkan di $x = 0$.

Definisi 11.5

Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$

- Fungsi f memiliki turunan kanan pada titik c jika dan hanya jika
  $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.
- Fungsi f memiliki turunan kiri pada titik c jika dan hanya jika
  $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.

Pandu siswa memahami Definisi 11.5. Minta siswa menemukan fungsi yang mempunyai nilai turunan kanan tidak sama dengan turunan kiri selain fungsi nilai mutlak di atas.

Berdasarkan pembahasan masalah 11-2 di atas, suatu fungsi akan dapat diturunkan pada suatu titik jika memenuhi sifat berikut.

Sifat 11.1

Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $x \subseteq S$ dan $L \subseteq R$. Fungsi f dapat diturunkan di titik x jika dan hanya jika turunan kiri sama dengan turunan kanan, ditulis:

$$f'(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = L$$

Pandu siswa memahami Sifat 11.1. Minta siswa membuat sebuah fungsi dan menunjukkan turunan kiri dan kanan fungsi tersebut.

Keterangan:

1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah turunan fungsi f di titik x yang didekati dari kanan pada domain S.
2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah turunan fungsi f di titik x yang didekati dari kiri pada domain S.

Contoh 11.2

Tentukan turunan fungsi $y = \sqrt{2x}$

Guru mengajukan Contoh 11.2 dan mengajak siswa bersama-sama mencoba menyelesaikan soal yang diajukan tersebut.

Guru membuat contoh lainnya untuk dikerjakan oleh siswa.

Alternatif Penyelesaian

Jika $f(x) = \sqrt{2x}$

Ingatkan siswa tentang perkalian sekawan pada Bab 1 di kelas X.

$$
\begin{aligned}
\text{maka } f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2x+2\Delta x} - \sqrt{2x}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2x+2\Delta x} - \sqrt{2x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{2x+2\Delta x} + \sqrt{2x}}{\sqrt{2x+2\Delta x} + \sqrt{2x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x(\sqrt{2x+2\Delta x} + \sqrt{2x})} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2x+2\Delta x} + \sqrt{2x}}
\end{aligned}
$$

Pandu siswa untuk menggunakan konsep turunan sebagai limit fungsi untuk menemukan turunan fungsi aljabar.

Berikan beberapa contoh menurunkan fungsi aljabar kepada siswa dengan menggunakan limit fungsi sehingga mereka menemukan kesedehanaan dan kesulitan proses dalam menggunakan konsep ini. Arahkan siswa mengerjakan Contoh 11.3 -11.6.

1.3 Turunan Fungsi Aljabar

Mari kita temukan aturan-aturan turunan suatu fungsi berdasarkan limit fungsi yang telah dijelaskan di atas. Coba pelajari permasalahan berikut.

Masalah-11.3

Pada subbab di atas, telah dijelaskan bahwa

turunan merupakan limit suatu fungsi, yaitu:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Coba kamu amati dan pelajari beberapa contoh penurunan beberapa fungsi berikut dengan konsep limit fungsi:

Contoh 11.3

Jika $f(x) = x^2$ maka $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x$$

$$= 2x$$

Pada Contoh 11.3 dan 11.4, siswa masih dengan mudah menjabarkan x^2 dan x^4.

Contoh 11.4

Jika $f(x) = x^4$

maka $f'(x)$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right)\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 4x^3$$

Minta siswa menjawab soal di samping dengan menjabarkan bentuk $(x + \Delta x)^4$ terlebih dulu.

Minta siswa memperhatikan soal pada contoh di samping. Tanya siswa, dimana letak kesulitan pada soal. Minta siswa menjawab soal di samping dengan menjabarkan bentuk $(x + \Delta x)^{100}$ terlebih dulu.

Contoh 11.5

Jika $f(x) = x^{100}$ maka $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{100} - x^{100}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{?}{\Delta x}$$

$$= ...?$$

(dengan menjabarkan; proses semakin sulit, bukan?)

Contoh 11.6

Jika $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$ maka $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{3}{5}}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{?}{\Delta x}$$

$$= ...?$$

(dengan menjabarkan; proses juga semakin sulit, bukan?)

Dari keempat contoh di atas, kesimpulan apa yang kamu peroleh? Jelas, kita kesulitan dan harus mempunyai banyak strategi aljabar untuk melanjutkan proses pada Contoh 11.5 dan 11.6. Bentuk suatu fungsi beragam sehingga penurunannya dengan menggunakan limit fungsi akan ada yang sederhana diturunkan dan ada yang sangat sulit diturunkan. Kita harus mempermudah proses penurunan suatu fungsi dengan menemukan aturan-aturan penurunan.

1.3.1 Menemukan turunan fungsi *f*(*x*) = ax^n, untuk n bilangan asli

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^n - ax^n}{\Delta x} \text{ (Gunakan Binomial Newton)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax^n + anx^{n-1}\Delta x + aC_2^n x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + a\Delta x^n - ax^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(anx^{n-1} + aC_2^n x^{n-2}\Delta x + \ldots + a\Delta x^{n-1})}{\Delta x}$$

$$= anx^{n-1}$$

- Coba kamu buktikan sendiri jika $f(x) = au(x)$ dan $u'(x)$ ada, maka $f'(x) = au'(x)$

1.3.2 Menemukan turunan jumlah fungsi *f*(*x*) = *u*(*x*) + *v*(*x*) dengan *u*'(*x*) dan *v*'(*x*) ada.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)] - [u(x) + v(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)] - [v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$= u'(x) + v'(x) \text{ (Ingat Sifat 10.6 pada Bab 10 di kelas X)}$$

Dengan cara yang sama, buktikan sendiri bahwa turunan fungsi $f(x) = u(x) - v(x)$ adalah $f'(x) = u'(x) - v'(x)$

Contoh 11.7

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut!

a. $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

Alternatif Penyelesaian

$f'(x) = 5.4x^{4-1} - 4.3x^{3-1} + 3.2x^{2-1} - 2.1x^{1-1} + 1.0x^{0-1}$

$f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$

Informasikan kepada siswa bahwa kesulitan mencari turunan fungsi pada contoh di atas dapat diatasi dengan menemukan bentuk turunan secara umum. Arahkan siswa memahami proses limit fungsi di samping.

Minta siswa menyelesaikan kembali soal pada Contoh 11.3-11.6 di atas.

Minta siswa membuktikan jika dan ada, maka dengan menggunakan konsep limit fungsi. (Jawaban ada di samping). Contoh 11.5 dan 11.6 dijawab di samping.

Dengan cara yang sama, minta siswa memahami proses penurunan fungsi f(x) = u(x) + v(x) di samping.

Dengan memanfaatkan konsep turunan jumlah dan selisih fungsi di atas, minta siswa memahami Contoh 11.7. Guru diharapkan mengajukan contoh soal lainnya.

b. $f(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{4}}-\frac{2}{5}x^{\frac{1}{3}}$

Alternatif Penyelesaian

$$f'(x)=\frac{1}{3}.\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}-\frac{2}{5}.\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$$

$$f'(x)=\frac{1}{12}x^{-\frac{3}{4}}-\frac{2}{15}x^{-\frac{2}{3}}$$

Bentuk kelompok untuk memahami proses disamping. Minta kelompok mempresentasikan proses penemuan turunan fungsi f(x) = [u(x)]n. Arahkan siswa untuk belajar dengan sesi tanya jawab. Ingatkan siswa menjabarkan dengan menggunakan Binomial Newton.

1.3.3 Menemukan turunan fungsi $f(x) = [u(x)]^n$ dengan $u'(x)$ ada, n bilangan asli.

Dengan konsep limit fungsi.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)]^n-[u(x)]^n}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)+u(x)]^n-[u(x)]^n}{\Delta x}$$

Misal $P=[u(x+\Delta x)-u(x)]$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[P+u(x)]^n-[u(x)]^n}{\Delta x}\quad\text{(Gunakan Binomial Newton)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P^n+C_1^nP^{n-1}[u(x)]+C_2^nP^{n-2}[u(x)]^2+\ldots+C_{n-1}^nP[u(x)]^{n-1}+[u(x)]^n-[u(x)]^n}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P^n+nP^{n-1}[u(x)]+C_2^nP^{n-2}[u(x)]^2+\ldots+C_{n-2}^nP^2[u(x)]^{n-2}+C_{n-1}^nP[u(x)]^{n-1}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(P^{n-1}+nP^{n-2}[u(x)]^2+\ldots+C_{n-2}^nP[u(x)]^{n-2}+C_{n-1}^n[u(x)]^{n-1})}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}(P^{n-1}+nP^{n-2}[u(x)]^2+\ldots+C_{n-2}^nP[u(x)]^{n-2}+C_{n-1}^n[u(x)]^{n-1})$$

(Ingat Sifat 10.5 pada Bab 10 di kelas X)

Karena $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}=u'(x)$

$\lim_{\Delta x\to 0}P=\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)-u(x)=0$

$$=u'(x)[0+n[u(x)]^{n-1}$$

$$=nu'(x)[u(x)]^{n-1}$$

Aturan Turunan:

Misalkan *f*, *u*, *v* adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan di interval I, *a* bilangan real dapat diturunkan maka:

$f(x) = a \to f'(x) = 0$

$f(x) = ax \to f'(x) = a$

$f(x) = ax^n \to f'(x) = nax^{n-1}$

$f(x) = au(x) \to f'(x) = au'(x)$

$f(x) = u(x) \to f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

$f(x) = u(x)v(x) \to f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \to f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Bersama – sama dengan siswa, guru mengumpulkan semua aturan turunan yang telah diperoleh.
Guru dapat mengajukan beberapa soal penurunan fungsi aljabar terkait dengan pemanfaatan aturan turunan di samping.

Dengan menggunakan aturan turunan tersebut, gradien garis singgung suatu kurva akan lebih mudah ditentukan, bukan? Perhatikan contoh berikut!

Mengingat pada sub-bab awal, gradien garis singgung ditentukan dengan menggunakan konsep limit, maka pada kesempatan ini, gradien ditentukan dengan konsep turunan.
Guru mengajukan beberapa contoh dan mengajak siswa bersama-sama mencoba menyelesaikan soal yang diajukan.

Contoh 11.11

Tentukan persamaan garis singgung kurva $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ di titik $P(2, 4)$.

Alternatif Penyelesaian.

Titik $P(2, 4)$ berada pada kurva $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ sebab jika kita subtitusikan nilai $x = 2$ maka $f(2) = \frac{2^2}{\sqrt{2-1}} = 4$.

Pertama, kita tentukan turunan pertama dari fungsi

$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ dengan memisalkan $u(x) = x^2$ sehingga

$u'(x) = 2x$ dan $v(x) = \sqrt{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$ sehingga

$v'(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}$. Dengan demikian, turunan pertama

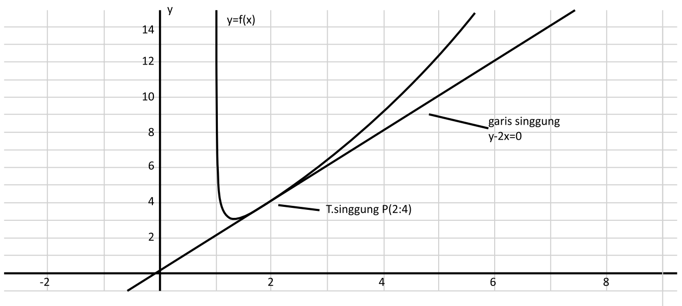
Pandu siswa menggunakan aturan turunan untuk menentukan gradien suatu garis singgung.

fungsi adalah $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$ atau

$$f'(x)=\frac{2x\sqrt{x-1}-\dfrac{x^2}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}}{x-1}.$$

Gradien garis singgung kurva di titik $P(2, 4)$ adalah $f'(2)=\dfrac{4-2}{1}=2$ sehingga persamaan garis singgung tersebut adalah $y - 4 = 2(x - 2)$ atau $y - 2x = 0$.

Setelah siswa memahami cara menemukan gradien dan garis singgung kurva tersebut, minta siswa memahami kasus tersebut dengan sketsa di samping.



Gambar 11.5 Garis singgung kurva $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ di titik P(2, 4).

Berikan soal - soal Uji Kompetensi ini sebagai tugas di rumah bagi siswa. Tujuan pemberian uji kompetensi ini adalah untuk mengetahui apakah siswa sudah memahami tentang konsep turunan fungsi aljabar dan garis singgung suatu fungsi.

Uji Kompetensi 11.1

1. Tentukanlah persamaan garis singgung di titik dengan absis $x = 1$ pada tiap-tiap fungsi berikut. Petunjuk: carilah gradien persamaan garis singgung dengan menggunakan limit fungsi.

   a. $f(x) = 2x$

   b. $f(x) = 2x^2$

   c. $f(x) = 2x^3 - 1$

   d. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

   e. $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

2. Misalkan $u(x)$, $v(\text{x})$, $w(x)$, $h(\text{x})$ dan $g(x)$ adalah fungsi yang dapat diturunkan. Dengan menggunakan konsep turunan sebagai limit fungsi, tentukanlah turunan dari fungsi-fungsi berikut:

   a. $f(x) = (2x + 1)^2$

   b. $f(x) = (x^2 - x + 1)^2$

   c. $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+4}$

   d. $f(x) = u(x)v(x)w(x)$

   e. $f(\text{x}) = (h \circ g)(x)$

3. Dengan menggunakan konsep turunan, tentukanlah turunan dari fungsi-fungsi berikut.

   a. $f(x) = x^3(2x + 1)^5$

   b. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} - \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{4}}$

   c. $f(x) = (\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x)^{\frac{1}{4}}$

   d. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$

   e. $f(x) = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$

5. Tentukanlah persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $P(-1,1)$ pada masing-masing fungsi berikut. Petunjuk: carilah gradien persamaan garis singgung dengan menggunakan konsep turunan.

   a. $f(x) = (x + 2)^{-9}$

   b. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 1}$

   c. $f(x) = -x^3(\text{x} + 2)^{-2}$

   d. $f(x) = -x\sqrt{2 - \sqrt{x+2}}$

   e. $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2 - 1}$

Informasikan kepada siswa bahwa pada sub-bab ini akan mereka pelajari konsep turunan dalam menentukan interval fungsi naik/turun, keoptimalan fungsi dan titik belok suatu kurva.

Pandu siswa memahami fungsi naik, tidak naik, turun dan tidak turun.

Minta siswa memahami grafik fungsi naik/ turun di samping.
Pandu siswa memahami bentuk grafik fungsi naik, tidak naik, turun dan tidak turun.
Minta siswa membuat atau menggambar grafik yang naik, tidak naik, turun dan tidak turun.
Minta siswa menentukan fungsi yang mempunyai grafik naik, tidak naik, turun dan tidak turun.

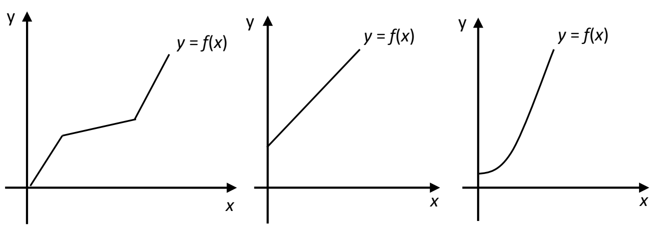
2. Aplikasi Turunan

Konsep turunan adalah subjek yang banyak berperan dalam aplikasi matematika di kehidupan sehari-hari di berbagai bidang. Konsep turunan digunakan untuk menentukan interval fungsi naik/turun, keoptimalan fungsi dan titik belok suatu kurva.

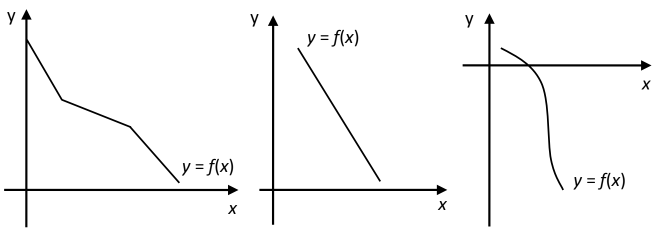
2.1 Fungsi Naik dan Turun

Coba bayangkan ketika kamu pergi ke plaza atau mall, di sana kita temukan ekskalator atau *lift*. Gerakan lift dan ekskalator saat naik dapat diilustrasikan sebagai fungsi naik. Demikian juga gerakan lift dan ekskalator saat turun dapat diilustrasikan sebagai fungsi turun. Amatilah beberapa grafik fungsi naik dan turun di bawah ini dan coba tuliskan cirri-ciri fungsi naik dan fungsi turun sebagai ide untuk mendefinisikan fungsi naik dan turun.

Beberapa grafik fungsi turun dari kiri ke kanan



Beberapa grafik fungsi naik dari kiri ke kanan



Dari beberapa contoh grafik fungsi naik dan turun di atas, mari kita definisikan fungsi naik dan turun sebagai berikut.

Definisi 11.5

Misalkan fungsi,
- Fungsi f dikatakan naik jika $\forall\, x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Fungsi f dikatakan turun jika $\forall\, x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Pandu siswa memahami Definisi 11.5. Berikan sebuah fungsi yang sederhana dan pandu siswa untuk menunjukkan kebenaran Definisi 11.5.

Contoh 11.12

Tunjukkan grafik fungsi $f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x > 0$ adalah fungsi naik.

Pandu siswa menujukkan kebenaran Definisi 11.5 pada Contoh 11.12
Berikan kesempatan kepada siswa untuk berkomentar dan saling tanya jawab.
Guru sebagai fasilitator.

Iternatif Penyelesaian

$f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x > 0$ Ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$ dengan $0 < x_1 < x_2$

$x = x_1 \Rightarrow f(x_1) = x_1^{\,3}$

$x = x_1 \Rightarrow f(x_2) = x_2^{\,3}$

Karena $0 < x_1 < x_2$ maka $x_1^{\,3} < x_2^{\,3}$

Karena $x_1^{\,3} < x_2^{\,3}$ maka $f(x_1) < f(x_2)$

Dengan demikian $\forall x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Dapat disimpulkan f adalah fungsi naik. Bagaimana jika $f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x < 0$, apakah grafik fungsi f adalah fungsi naik? Selidiki!

Minta siswa berkelompok menganalisis grafik fungsi $f(x) = x^3$ untuk $x < 0$. Minta siswa menunjukkan Definisi 11.5 dengan pembuktian dan grafik.

2.2 Aplikasi Turunan dalam Permasalahan Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Mari kita bahas aplikasi turunan dalam permasalahan fungsi naik dan fungsi turun dengan memperhatikan dan mengamati permasalahan berikut.

Pandu siswa untuk menemukan keterkaitan konsep turunan dengan fungsi naik/turun.

Ajak siswa untuk memikirkan aplikasi fungsi naik/turun dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu yang telah diinformasikan adalah eskalator atau lift berjalan. Arahkan siswa memahami Masalah 11.4.

Masalah-11.4

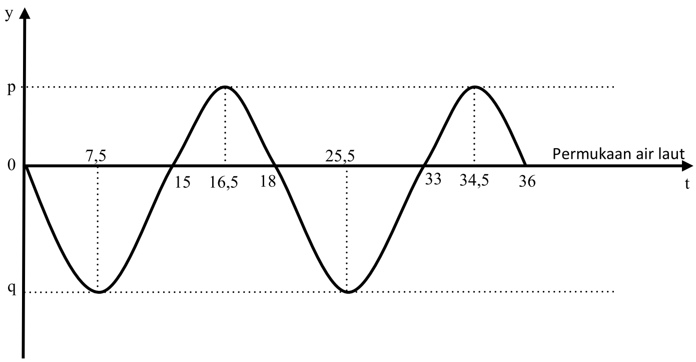
Seorang nelayan melihat seekor lumba-lumba sedang berenang mengikuti kecepatan perahu mereka. Lumba-lumba tersebut berenang cepat, terkadang menyelam dan tiba-tiba melayang ke permukakaan air laut. Pada saat nelayan tersebut melihat lumba-lumba menyelam maka ia akan melihatnya melayang ke permukaan 15 detik kemudian dan kembali ke permukaan air laut setelah 3 detik di udara. Demikan pergerakan lumba-lumba tersebut diamati berperiode dalam beberapa interval waktu pengamatan.

Permasalahan

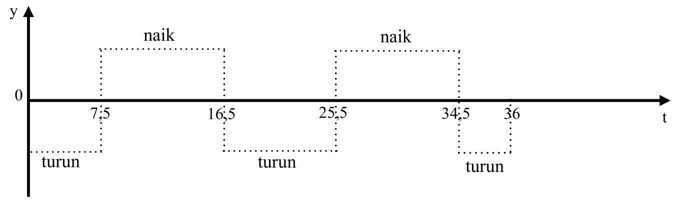
Dari ilustrasi ini, dapatkah kamu sketsa pergerakan lumba-lumba tersebut dalam 2 periode? Ingat pengertian periode pada pelajaran trigonometri di kelas X. Dapatkah kamu tentukan pada interval waktu berapakah lumba-lumba tersebut bergerak naik atau turun? Dapatkah kamu temukan konsep fungsi naik/turun?

Minta siswa mengamati sketsa sederhana pergerakan lumba – lumba tersebut. Minta siswa menunjukkan grafik naik/turun serta menunjukkan interval disaat fungsi naik/turun.

Alternatif Penyelesaian



Gambar 11.7 Sketsa pergerakan lumba-lumba dalam pengamatan tertentu



Gambar 11.8 Sketsa pergerakan naik/turun lumba-lumba dalam pengamatan tertentu

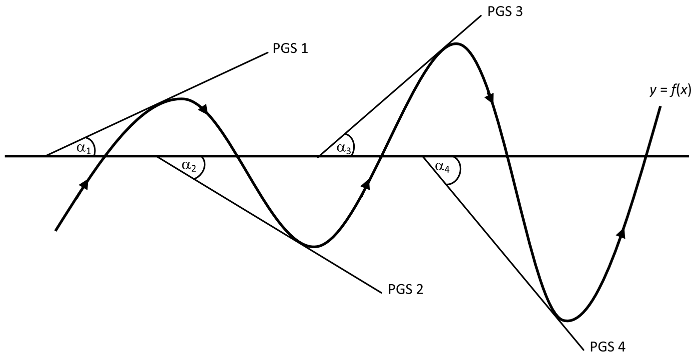
Arahkan siswa mengamati Gambar 11.8 untuk dapat melihat dengan jelas interval pembuat fungsi naik/turun pada Gambar 11.7.

Pandu siswa menentukan interval fungsi naik/turun dari pembacaan sketsa pada Gambar 11.8

Pandu siswa mengamati Gambar 11.9

Secara geometri pada sketsa di atas, lumba-lumba bergerak turun di interval $0 < t < 7{,}5$ atau $16{,}5 < t < 25{,}5$ atau $34{,}5 < t < 36$ dan disebut bergerak naik di interval $7{,}5 < t < 16{,}5$ atau $25{,}5 < t < 34{,}5$.

- Coba kamu amati beberapa garis singgung yang menyinggung kurva di saat fungsi naik atau turun di bawah ini. Garis singgung 1 dan 3 menyinggung kurva pada saat fungsi naik dan garis singgung 2 dan 4 menyinggung kurva pada saat fungsi turun.



Gambar 11.9 Garis singgung di interval fungsi naik/turun

Minta siswa menunjukkan grafik naik/turun.

Minta siswa membuat sebanyak mungkin PGS di sepanjang fungsi (kurva) naik kemudian lihat kuadran sudut yang dibentuk PGS dengan sumbu x positif.

Selanjutnya, mari kita bahas hubungan persamaan garis singgung dengan fungsi naik atau turun. Pada konsep persamaan garis lurus, gradien garis adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu x positif. Pada persamaan garis singgung, gradien adalah tangen sudut garis tersebut dengan sumbu positif sama dengan

Tanya siswa, dikuadran berapakah semua sudut yang dibentuk PGS disaat menyinggung kurva di fungsi naik? (Dari pengamatan, semua sudut berada dikuadran 1).

Tanya siswa, bertanda apakah nilai tangen sudut di kuadran1? (melalui konsep trigonometri, maka tangen sudut bernilai positif di kuadran 1). Ingatkan siswa koonsep trigonometri di kelas X.

Demikian juga, tanya siswa sifat PGS disaat menyinggung di fungsi turun? Tanya kuadran sudut yang dibentuk PGS dengan sumbu x positif dan nilai tangen sudut tersebut. Arahkan siswa mengamati dan memahami Tabel 11.1

Dengan pemahaman terhadap pengamatan pada Gambar 11.9 dan Tabel 11.1, siswa menemukan hubungan gradien, turunan dan fungsi naik/turun yaitu m = f'(x) > 0 untuk PGS di fungsi naik dan m = f'(x) < 0 untuk PGS di fungsi turun.

Arahkan siswa untuk menemukan konsep fungsi naik/turun.
Pandu siswa memahami Tabel 11.2
Guru dapat membuat sebuah contoh sederhana

nilai turunan pertama di titik singgungnya. Pada gambar di atas, misalkan besar masing-masing sudut adalah $0^0 < \alpha_1 < 90^0$, $0^0 < \alpha_2 < 90^0$, $0^0 < \alpha_3 < 90^0$, $0^0 < \alpha_4 < 90^0$ sehingga nilai gradien atau tangen sudut setiap garis singgung ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 11.1 Hubungan gradien garis singgung dengan fungsi naik/turun

PGS	Sudut	Nilai tangen	Menyinggung di
PGS 1	α_1	$m = \tan(\alpha_1) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 2	$360^0 - \alpha_2$	$m = \tan(360^0 - \alpha_2) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun
PGS 3	α_3	$m = \tan(\alpha_3) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 4	$360^0 - \alpha_4$	$m = \tan(360^0 - \alpha_4) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun

Coba kamu amati Gambar 11.9 dan Tabel 11.1! Apakah kamu melihat konsep fungsi naik/turun. Coba kamu perhatikan kesimpulan berikut:

- Jika garis singgung menyinggung di grafik fungsi naik maka garis singgung akan membentuk sudut terhadap sumbu x positif di kuadran I. Hal ini menyebabkan besar gradien adalah positif atau $m = f'(x) > 0$.
- Jika garis singgung menyinggung di grafik fungsi turun maka garis singgung akan membentuk sudut terhadap sumbu x positif di kuadran IV. Hal ini menyebabkan besar gradien adalah negatif atau $m = f'(x) < 0$.

Dengan demikian, dapat kita simpulkan bahwa fungsi $f(x)$ yang dapat diturunkan pada interval I, akan mempunyai kondisi sebagai berikut:

Tabel 11.2 Hubungan turunan pertama dengan fungsi naik/turun

No.	Nilai turunan pertama	Keterangan
1	$f'(x) > 0$	Fungsi selalu naik
2	$f'(x) < 0$	Fungsi selalu turun
3	$f'(x) \geq 0$	Fungsi tidak pernah turun
4	$f'(x) \leq 0$	Fungsi tidak pernah naik

Sifat 11.2

Misalkan f adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada setiap $x \in I$ maka

1. Jika $f'(x) > 0$ maka fungsi selalu naik pada interval I.
2. Jika $f'(x) < 0$ maka fungsi selalu turun pada interval I.
3. Jika $f'(x) \geq 0$ maka fungsi tidak pernah turun pada interval I.
4. Jika $f'(x) \leq 0$ maka fungsi tidak pernah naik pada interval I.

untuk menunjukkan kebenaran Tabel 11.2 Tanya siswa, apakah fungsi tidak pernah turun berarti fungsi naik? (jawabannya tentu tidak, lihat Tabel 11.2)

Dengan pemahaman pada teori di atas, siswa dan guru membentuk Sifat fungsi naik/tidak naik/turun dan tidak turun. Lihat Sifat 11.2.

Konsep di atas dapat digunakan jika kita sudah memiliki fungsi yang akan dianalisis. Tetapi banyak kasus sehari-hari harus dimodelkan terlebih dahulu sebelum dianalisis. Perhatikan kembali permasalahan berikut!

Masalah-11.5

Tiga orang anak sedang berlomba melempar buah mangga di ketinggian 10 meter. Mereka berbaris menghadap pohon mangga sejauh 5 meter. Anak pertama akan melempar buah mangga tersebut kemudian akan dilanjutkan dengan anak kedua bila tidak mengenai sasaran. Lintasan lemparan setiap anak membentuk kurva parabola. Lemparan anak pertama mencapai ketinggian 9 meter dan batu jatuh 12 meter dari mereka. Lemparan anak kedua melintas di atas sasaran setinggi 5 meter. Anak ketiga berhasil mengenai sasaran. Tentu saja pemenangnya anak ketiga, bukan?

Ajukan Masalah 11.5 kepada siswa untuk belajar membuat model matematika dan sebuah cerita dan kemudian menganalisis fungsi yang ditemukan dengan memanfaatkan konsep fungsi nain/turun yang telah ditemukan.
Minta siswa memahami masalah di samping.

Permasalahan.

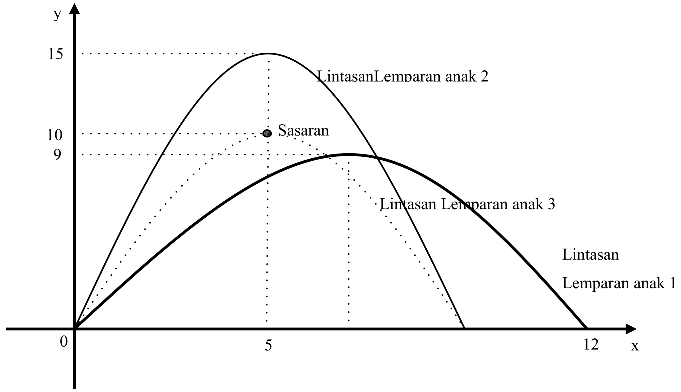
Dapatkah kamu mensketsa lintasan lemparan ketiga anak tersebut? Dapatkah kamu membuat model matematika lintasan lemparan? Dapatkah kamu menentukan interval jarak agar masing-masing lemparan naik atau turun berdasarkan konsep turunan?

Pandu siswa mendapatkan dan mengamati sketsa lemparan ketiga anak tersebut berdasarkan data yang diketahui pada cerita.

Alternatif Penyelesaian

a. Sketsa Lintasan Lemparan

Permasalahan di atas dapat kita analisis setelah kita modelkan fungsinya. Misalkan posisi awal mereka melempar adalah posisi titik asal O(0,0) pada koordinat kartesius, sehingga sketsa permasalahan di atas adalah sebagai berikut.



Gambar 11.11 Sketsa lemparan 1, 2 dan 3

Pandu siswa mendapatkan model fungsi lemparan ketiga anak berdasarkan data yang diketahui pada cerita.

b. Model Lintasan Lemparan

Kamu masih ingat konsep fungsi kuadrat, bukan? Ingat kembali konsep fungsi kuadrat yang melalui titik puncak $P(x_p, y_p)$ dan titik sembarang $P(x, y)$ adalah $y - y_p = a(x - x_p)^2$ sementara fungsi kuadrat yang melalui akar-akar x_1, x_2 dan titik sembarang $P(x, y)$ adalah $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, dengan $x_p = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ dan $a \neq 0$, a bilangan real. Jadi, model lintasan lemparan setiap anak tersebut adalah:

Pandu siswa mendapatkan model fungsi lemparan anak pertama, kedua dan ketiga.
Ingatkan kembali siswa materi persamaan dan fungsi kuadrat di kelas X

Lintasan lemparan anak pertama

Lintasan melalui titik O(0,0) dan puncak $P_1(6,9)$.

$$y = a(x - 0)(x - 12) \quad \Leftrightarrow 9 = a(6 - 0)(6 - 12)$$
$$\Leftrightarrow a = -0{,}25$$

Fungsi lintasan lemparan anak pertama adalah $y = -0{,}25x^2 + 3x$.

Lintasan lemparan anak kedua

Lintasan melalui titik O(0,0) dan puncak $P_2(5,15)$.

$y - 15 = a(x - 5)^2 \quad \Leftrightarrow 0 - 15 = a(0 - 5)^2$

$\Leftrightarrow a = -0,6$

Fungsi lintasan lemparan anak kedua adalah $y = -0,6x^2 + 6x$.

Lintasan lemparan anak ketiga

Lintasan melalui titik O(0,0) dan puncak $P_3(5,10)$.

$y - 0 = a(x - 5)^2 \quad \Leftrightarrow 0 - 10 = a(0 - 5)^2$

$\Leftrightarrow a = -0,4$

Fungsi lintasan lemparan anak ketiga adalah $y = -0,4x^2 + 4x$.

C. Interval Fungsi Naik/Turun Fungsi Lintasan

Coba kamu amati kembali Gambar 11.11! Secara geometri, jelas kita lihat interval fungsi naik/turun pada masing-masing lintasan, seperti pada tabel berikut:

Minta siswa mendapatkan interval fungsi naik/turun berdasarkan sketsa kurva lintasan lemparan masing-masing anak pada Gambar 11.11.

Tabel 11.3 Fungsi dan interval naik/turun fungsi lemparan anak 1, 2, dan 3

Lintasan ke	Fungsi	Secara Geometri	
		Interval Naik	Interval Turun
1	$y = -0,25x^2 + 3x$	$0 < x < 6$	$6 < x < 12$
2	$y = -0,6x^2 + 6x$	$0 < x < 5$	$5 < x < 10$
3	$y = -0,4x^2 + 4x$	$0 < x < 5$	$5 < x < 10$

Pengamatan sketsa kurva pada Gambar 11.11 yang diperoleh disesuai dengan Tabel 11.3 berikut. Minta siswa menunjukkan kembali interval fungsi naik/turun untuk masing-masing kurva pada gambar.

Mari kita tunjukkan kembali interval fungsi naik/turun dengan meng-gunakan konsep turunan yang telah kita pelajari sebelumnya.

Fungsi naik/turun pada lintasan lemparan anak 1

Fungsi yang telah diperoleh adalah $y = -0,25x^2 + 3x$ sehingga $y = -0,5x^2 + 3x$. Jadi,

fungsi akan naik: $y = -0,5x^2 + 3x \Leftrightarrow x < 6$

fungsi akan turun: $y = -0,5x + 3 < 0 \Leftrightarrow x > 6$

Minta siswa mendapatkan interval fungsi naik/turun berdasarkan model fungsi lemparan yang telah ditemukan dengan memanfaatkan konsep turunan. Minta siswa *membandingkan jawaban yang diperoleh dengan Tabel 11.3*

Minta siswa melanjutkan analisis dengan cara yang sama pada fungsi lintasan lemparan anak yang lain.

Untuk memperdalam pemahaman siswa, ajukan Contoh 11.13.

Pandu siswa memahami proses penyelesaian pada contoh tersebut.

Ingatkan siswa materi pertidaksamaan.

Menurut ilustrasi, batu dilempar dari posisi awal O(0,0) dan jatuh pada posisi akhir Q(12,0) sehingga lintasan lemparan akan naik pada $0 < x < 6$ dan turun pada $6 < x < 12$.

- Bagaimana menunjukkan interval fungsi naik/turun dengan konsep turunan pada fungsi lintasan lemparan anak 2 dan anak 3 diserahkan kepadamu.

Contoh 11.13

Tentukanlah interval fungsi naik/turun fungsi $f(x) = x^4 - 2x^2$

Alternatif Penyelesaian

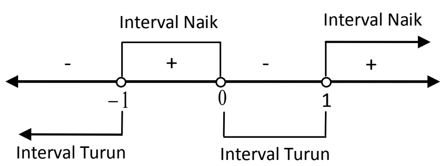
Berdasarkan konsep, sebuah fungsi akan naik jika $f'(x) > 0$ sehingga:

$f'(x) = 4x^3 - 4x > 0 \Leftrightarrow 4x(x - 1)(x + 1) > 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = 1$ atau $x = -1$

Pandu siswa menentukan interval fungsi naik/turun dari tanda pada interval penyelesaian pertidaksamaan tersebut.

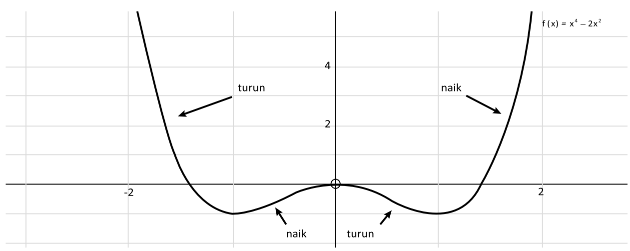
Dengan menggunakan interval.



Pandu siswa mensketsa fungsi f(x) = x4-2x2 dengan menggunakan beberapa titik bantu. Guru berperan aktif dalam mensketsa kurva berikut.

Minta siswa menganalisis kembali sketsa kurva yang diperoleh di samping. Minta siswa menunjukkan interval fungsi naik/turun.

Jadi, kurva fungsi tersebut akan naik pada interval 1 $-1 < x < 0$ atau $x > 1$ tetapi turun pada interval $x < -1$ atau $0 < x < 1$. Perhatikan sketsa kurva $f(x) = x^4 - 2x^2$ tersebut.



Gambar 11.12 Fungsi naik/turun kurva $f(x) = x^4 - 2x^2$

Contoh 11.14

Tentukanlah interval fungsi naik $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

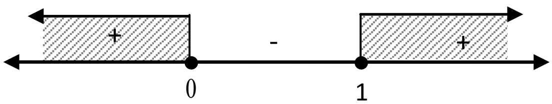
Alternatif Penyelesaian

Masih ingatkah kamu syarat numerus $\sqrt{P(x)}$ adalah $P(x) \geq 0$. Jadi, syarat numerus $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ adalah $x^2 - x \geq 0$.

Ingatlah kembali cara-cara menyelesaikan pertidaksamaan.

$$x^2 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 1$$

Dengan menggunakan interval.



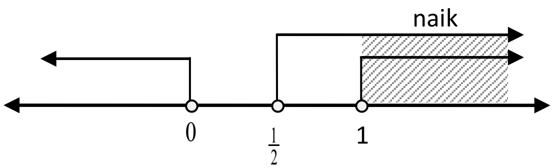
Jadi, syarat numerus bentuk akar di atas adalah $x \leq 0$ atau $x \leq 1$ Berdasar-kan konsep, sebuah fungsi akan naik jika $f'(x) > 0$ sehingga:

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \text{ karena } \sqrt{x^2 - x} > 0 \text{ dan}$$

$x \neq 0, x \neq 1$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Dengan menggunakan interval.



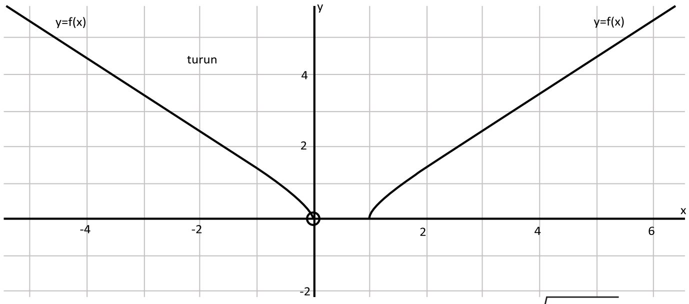
Guru mengajukan contoh dan mengajak siswa bersama-sama mencoba menyelesaikan soal pada Contoh 11.14.

Ingatkan siswa syarat numerus bentuk akar. Ingatkan siswa materi pertidaksamaan.

Jadi, kurva fungsi tersebut akan naik pada interval $x > 1$.

Perhatikanlah grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ berikut!

Minta siswa mengamati fungsi naik/turun dan intervalnya pada sketsa grafik berikut.



Gambar 11.13 Fungsi naik/turun fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Minta siswa menentukan interval untuk fungsi turun pada Contoh 11.14 dengan cara yang sama pada saat menentukan fungsi naik.

- Coba kamu lakukan dengan cara yang sama untuk mencari interval fungsi turun! Jika kamu benar mengerjakannya maka fungsi turun pada interval x < 0.

Setelah memandu, mengarahkan siswa memahami aplikasi turunan dalam menentukan fungsi naik/turun maka pada bagian ini, siswa dipandu untuk menemukan titik balik dan nilai maksimum/minimum pada suatu fungsi yang terdiferensialkan.

2.3 Aplikasi Konsep Turunan dalam Permasalahan Maksimum dan Minimum

Setelah menemukan konsep fungsi naik dan turun, kita akan melanjutkan pembelajaran ke permasalahan maksimum dan minimum serta titik belok suatu fungsi. Tentu saja, kita masih melakukan pengamatan terhadap garis singgung kurva. Aplikasi yang akan dibahas adalah permasalahan titik optimal fungsi dalam interval terbuka dan tertutup, titik belok, dan permasalahan kecepatan maupun percepatan.

2.2.1 Menemukan konsep maksimum dan minimum di interval terbuka

Masalah-11.6

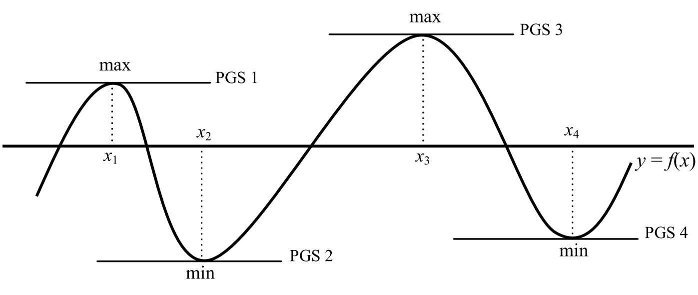
Seorang anak menarik sebuah tali yang cukup panjang. Kemudian dia membuat gelombang dari tali dengan menghentakkan tali tersebut ke atas dan ke bawah sehingga terbentuk sebuah gelombang berjalan. Dia terus mengamati gelombang tali yang dia buat. Dia melihat bahwa gelombang tali memiliki puncak maksimum maupun minimum. Dapatkah kamu menemukan konsep nilai maksimum ataupun minimum dari sebuah fungsi?

Pandu siswa untuk menemukan konsep titik balik (maksimum atau minimum) pada suatu fungsi. Arahkan siswa kembali ke konsep persamaan garis singgung. Pada kesempatan ini, PGS diarahkan ke titik balik suatu kurva.

Alternatif Penyelesaian

Gradien garis singgung adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu x positif atau turunan pertama dari titik singgungnya.

Minta siswa menunjukkan titik balik (maksimum) dan titik balik (minimum) pada Gambar 11.15. Minta siswa membuat garis singgung pada setiap titik balik tersebut. Tentu yang diperoleh adalah garis yang horizontal atau sejajar sumbu x. Ingatkan siswa kembali ke konsep gradien persamaan garis lurus.



Gambar 11.15 Sketsa gelombang tali

Coba kamu amati gambar di atas. Garis singgung (PGS 1, PGS 2, PGS 3 dan PGS 4) adalah garis horizontal atau $y = c$, c konstan, sehingga gradiennya adalah m = 0. Keempat garis singgung tersebut menyinggung kurva di titik puncak/optimal, di absis x

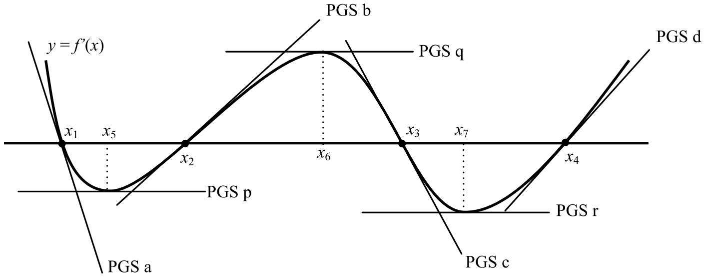
Minta siswa mengamati PGS1, PGS2,PGS3 dan PGS4 pada kurva. Minta siswa menemukan gradien keempat garis singgung tersebut.

Dengan pengamatan dan pemahaman pada teori, arahkan siswa menemukan konsep titik stasioner dengan f'(x)=0.

$= x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, dan $x = x_4$. Dari pengamatan, dapat disimpulkan bahwa sebuah fungsi akan mencapai optimal (maksimum/minimum) pada suatu daerah jika $m = f'(x) = 0$. Titik yang memenuhi $f'(x) = 0$ disebut titik stasioner. Berikutnya, kita akan mencoba menemukan hubungan antara titik stasioner dengan turunan kedua fungsi. Pada Gambar 11.15, $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = 0$, $f'(x_3) = 0$ dan $f'(x_4) = 0$. Artinya kurva turunan pertama fungsi melalui sumbu x di titik $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, $C(x_3, 0)$ dan $D(x_4, 0)$.

Berikut adalah sketsa turunan pertama suatu fungsi y = m(x)=f'(x) dan terdapat beberapa garis singgung pada kurva turunan pertama. Arahkan siswa mengamati Gambar 11.16. Pandu siswa mengamati ketujuh garis singgung.

- Coba kamu amati kurva turunan pertama fungsi dan garis singgungnya sebagai berikut. Kesimpulan apa yang kamu dapat berikan?



Gambar 11.16 Hubungan garis singgung kurva m = f '(x) dengan titik stasioner

Misalkan gradien garis singgung adalah M sehingga dengan konsep diawal bab, M=m'(x)=f''(x). Arahkan siswa menganalisis gradien masing – masing garis singgung. Arahkan siswa menyimpulkan ke konsep titik balik maksimum/minimum suatu fungsi.

Titik $A(x_1, y_1)$ adalah titik maksimum pada Gambar 11.15 sehingga titik dengan absis $x = x_1$ adalah titik stasioner karena $f'(x_1) = 0$. Per-samaan garis singgung kurva dengan gradien M pada fungsi $m = f'(x)$ menyinggung di titik $x = x_1$ membentuk sudut di kuadran IV sehingga nilai tangen sudut bernilai negatif. Hal ini mengakibatkan $M = m' = f''(x_1) < 0$. Dengan kata lain, titik $A(x_1, y_1)$ adalah titik maksimum jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) < 0$.

Kesimpulan: Lihat Gambar 11.16, misalkan gradien persamaan garis singgung kurva $m = f'(x)$ adalah M sehingga $M = m' = f''(x)$ maka hubungan turunan kedua dengan titik stasioner adalah:

Tabel 11.4 Hubungan turunan kedua fungsi dengan titik optimal (stasioner)

PGS	Gradien $M = m' = f''(x)$	Jenis Titik	Pergerakan kurva
a	$M_a = f''(x_1) < 0$	Max	Naik-Max-Turun
b	$M_b = f''(x_2) > 0$	Min	Turun-Min-Naik
c	$M_c = f''(x_3) < 0$	Max	Naik-Max-Turun
d	$M_d = f''(x_4) > 0$	Min	Turun-Min-Naik
p	$M_p = f''(x_5) = 0$	T. Belok	Turun-Belok-Turun
q	$M_q = f''(x_6) = 0$	T. Belok	Naik-Belok-Naik
r	$M_r = f''(x_7) = 0$	T. Belok	Turun-Belok-Turun

Arahkan siswa memahami Tabel 11.4. Guru mengajukan suatu fungsi yang baru untuk dianalisis oleh siswa berdasarkan Tabel 11.4.

Sifat 11.3

Misalkan f adalah fungsi bernilai real yang kontinu dan memiliki turunan pertama dan kedua pada $x_1 \in I$ sehingga:

1. Jika $f'(x_1) = 0$ maka titik $(x_1, f(x_1))$disebut stasioner/kritis
2. Jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) > 0$ maka titk $(x1, f(x_1))$ disebut titik balik minimum fungsi
3. Jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) < 0$ maka titik $(x_1, f(x_1))$ disebut titik balik maksimum fungsi
4. Jika $f''(x_1) = 0$ maka titik $(x_1, f(x_1))$ disebut titik belok

Dengan pemahaman pada teori, guru dan siswa bersama – sama membentuk sebuah kesimpulan dalam bentuk sifat turunan. Arahkan siswa memahami Sifat 11.3.

Contoh 11.15

Tentukanlah titik balik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Pandu siswa menyelesaikan Contoh 11.15.

Ingatkan siswa menentukan titik balik dengan menggunakan konsep fungsi kuadrat.

Alternatif Penyelesaian 1 (Berdasarkan Konsep Fungsi Kuadrat)

Dengan mengingat kembali pelajaran fungsi kuadrat. Sebuah fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ mempunyai titik balik $B(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ di mana fungsi mencapai maksimum untuk

$a < 0$ dan mencapai minimum untuk $a > 0$ sehingga fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ mempunyai titik balik minimum pada

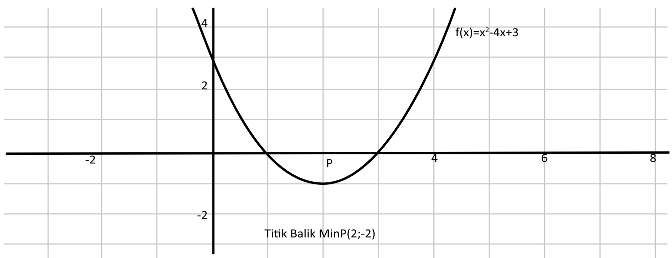
$$B\left(-\frac{-4}{2(1)}, -\frac{(-4)^2 - 4(1)(3)}{4(1)}\right) = B(2, -1).$$

Pandu siswa menyelesaikan Contoh 11.15 kembali dalamv menentukan titik balik dengan menggunakan konsep turunan.

Alternatif Penyelesaian 2 (Berdasarkan Konsep Turunan)

Dengan menggunakan konsep turunan di atas maka fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ mempunyai stasioner: $f'(x) = 2x - 4 = 0$ atau $x = 2$ dan dengan mensubstitusi nilai $x = 2$ ke fungsi $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ diperoleh $y = -1$ sehingga titik stasioner adalah $B(2, -1)$. Mari kita periksa jenis keoptimalan fungsi tersebut dengan melihat nilai turunan keduanya pada titik tersebut. $f''(x) = 2$ atau $f''(2) = 2 > 0$. Berdasarkan konsep, titik tersebut adalah titik minimum. Jadi, titik balik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + 3$ adalah minimum di $B(2, -1)$.

Minta siswa menggambar kurva f(x)=x2-4x+3 dan mengamati fungsi naik/turun dan titik balik maksimum/minimum. Minta siswa menghubungkannya kembali dengan Tabel 11.4 dan Sifat 11.2.

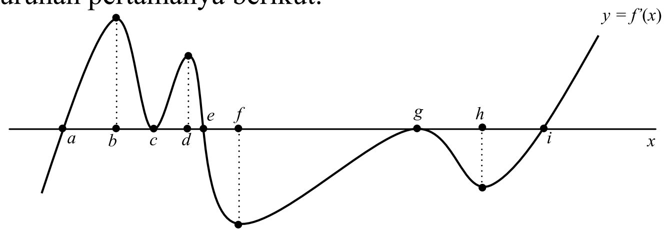


Gambar 11.17 Titik balik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Kurva fungsi y = f(x) dapat dianalisis berdasarkan kurva turunan pertamanya. Berikut adalah contoh soal analisis fungsi berdasarkan kurva turunan pertamanya pada Contoh 11.16.

Contoh 11.16

Analisislah kurva fungsi $y = f(x)$ berdasarkan sketsa kurva turunan pertamanya berikut.

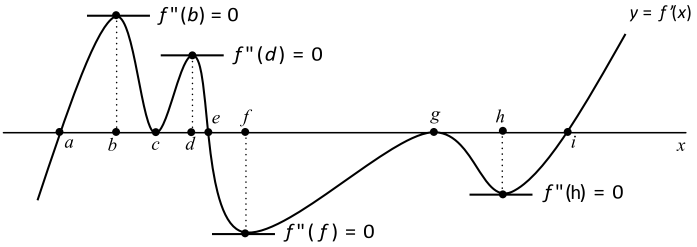


Gambar 11.18 Sketsa turunan pertama suatu fungsi $y = f(x)$

Alternatif Penyelesaian

Secara geometri sketsa turunan pertama fungsi di atas, nilai setiap fungsi di bawah sumbu x adalah negatif dan bernilai positif untuk setiap fungsi di atas sumbu x.

Arahkan siswa mengamati Gambar 11.19 dan mengkaitkannya dengan Tabel 11.4 serta Sifat 11.2



Gambar 11.19 Analisis fungsi berdasarkan konsep turunan fungsi $y = f(x)$

Dengan demikian, melalui pengamatan dan terhadap grafik turunan pertama dan konsep turunan maka fungsi $y = f(x)$ akan:

- Naik ($f'(x) > 0$) pada $a < x < c$, $c < x < e$ dan $x > i$
- Turun ($f'(x) < 0$) pada $x < a$, $e < x < g$ dan $g < x < i$
- Stasioner ($f'(x) = 0$) pada absis $x = a$, $x = c$, $x = e$, $x = g$ dan $x = i$
- Optimal maksimum ($f'(x) = 0$ dan $f''(x) < 0$) pada absis $x = e$
- Optimal minimum ($f'(x) = 0$ dan $f''(x) > 0$) pada absis $x = a$ dan $x = i$.
- Titik belok ($f''(x) = 0$) pada absis $x = b$, $x = c$, $x = d$, $x = f$, $x = g$ dan $x = h$

Arahkan siswa ke hasil pengamatan Contoh 11.16. Minta siswa kembali mengkaitkan hasil disamping dengan gambar dan Sifat 11.2 Minta siswa menunjukkan/ menjelaskan atau mempresentasikan di depan kelas.

Setelah siswa memahami konsep nilai balik maksimum atau minimum pada suatu fungsi maka arahkan siswa menentukan nilai maksimum/minimum suatu fungsi bila ditentukan domainnya.

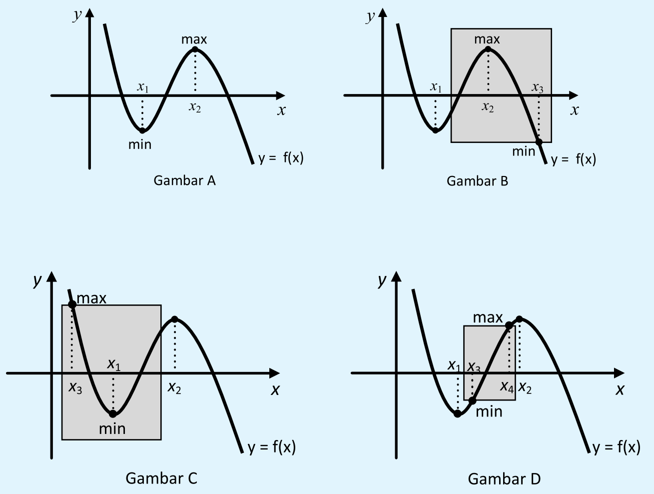
Minta siswa mengamati empat gambar di samping. Gambar A adalah kurva pada interval terbuka sementara tiga gambar lainnya adalah kurva dengan interval tertutup.

Minta siswa menunjukkan titik balik maksimum/ minimum pada Gambar B, C dan D kemudian minta siswa menunjukkan nilai maksimum/minimum pada kurva berdasarkan interval yang telah ditentukan (di kotak).

2.2.2 Menemukan konsep maksimum dan minimum di interval terbuka

Masalah-11.7

Coba kamu amati posisi titik maksimum dan minimum dari beberapa gambar berikut.



Gambar 11.20 Titik maksimum dan minimum suatu fungsi

Kesimpulan apa yang kamu peroleh?

Alternatif Penyelesaian

Gambar A di atas telah kita bahas pada permasalahan 11.6. Jika kamu amati dengan teliti, perbedaan antara gambar A dengan ketiga gambar lainnya (B, C dan D) adalah terdapat sebuah daerah yang membatasi kurva. Dengan demikian, gambar A adalah posisi titik maksimum/ minimum sebuah fungsi pada daerah terbuka dan ketiga gambar lainnya adalah posisi titik maksimum/minimum sebuah fungsi pada daerah tertutup. Nilai maksimum dan minimum fungsi tidak hanya bergantung pada titik stasioner fungsi tersebut tetapi bergantung juga pada daerah asal fungsi.

Contoh 11.17

Sebuah pertikel diamati pada interval waktu (dalam menit) tertentu berbentuk kurva $f(t) = t^3 – 9t^2 + 24t – 16$ pada $0 \leq t \leq 6$. Tentukanlah nilai optimal pergerakan partikel tersebut.

Untuk membantu pemahaman siswa akan konsep tersebut, ajukan Contoh 11.17 dan pandu siswa untuk menyelesaikannya.

Alternatif Penyelesaian.

Daerah asal fungsi adalah $\{t \mid 0 \leq t \leq 6\}$ Titik stasioner $f'(t) = 0$

$f(t) = t3 – 9t2 + 24t – 16$ sehingga $f'(t) = 3(t2 – 6t + 8)$ dan $f''(t) = 6t – 18$

$f'(t) = 3(t – 2)(t – 4) = 0$

$t = 2 \rightarrow f(2) = 4$ dan $t = 4 \rightarrow f(4) = 0$

Minta siswa menentukan titik stasioner dan memeriksa apakah titik stasioner ada di dalam daerah asal atau tidak.

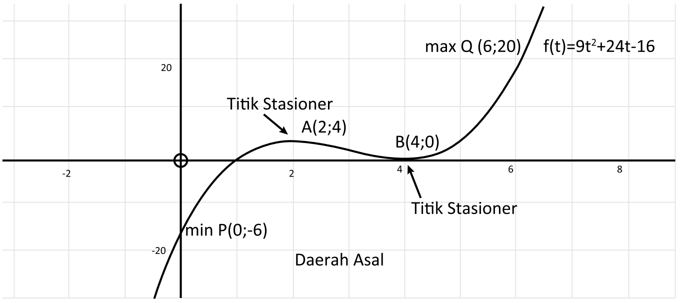
Karena daerah asal $\{t \mid 0 \leq t \leq 6\}$ dan absis $t = 2$, $t = 4$ ada dalam daerah asal sehingga:

$t = 0 \rightarrow f(0) = –16$ dan $t = 6 \rightarrow f(6) = 20$

Nilai minimum keempat titik adalah -16 sehingga titik minimum kurva pada daerah asal adalah A(0,-16) dan nilai maksimum keempat titik adalah 20 sehingga titik maksimum kurva pada daerah asal adalah B(6,20).

Perhatikan gambar.

Arahkan siswa membandingkan jawaban yang diperoleh dengan pengamatan pada gambar di samping.



Gambar 11.21 Titik optimal kurva $f(t) = t3 – 9t2 + 24t – 16$ untuk $0 \leq t \leq 6$.

Ajukan Masalah 11.8 kepada siswa. Minta siswa memahami masalah tersebut.
Pandu siswa untuk membuat model matematika masalah tersebut sehingga diperoleh fungsi biaya.

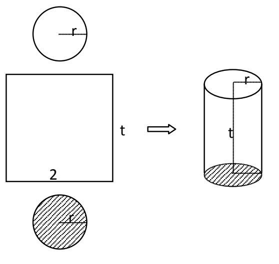
Masalah-11.8

Seorang anak berencana membuat sebuah tabung dengan alas berbentuk lingkaran tetapi terbuat dari bahan yang berbeda. Tabung yang akan dibuat harus mempunyai volume 43.120 cm3. Biaya pembuatan alas adalah Rp150,- per cm2, biaya pembuatan selimut tabung adalah Rp80,- per cm2 sementara biaya pembuatan atap adalah Rp50,- per cm2. Berapakah biaya minimal yang harus disediakan anak tersebut?

Pandu siswa memahami proses penyelesaian di samping.

Alternatif Penyelesaian.

Mari kita sketsa tabung yang akan dibuat. Misal-kan r adalah radius alas dan atap tabung, t adalah tinggi tabung $\pi = \dfrac{22}{7}$.



Gambar 11.22 Tabung

$$V = \frac{22}{7}r^2t = 43120 \Leftrightarrow t = \frac{7}{22} \text{ x } \frac{43120}{r^2}$$

Pandu siswa membentuk fungsi biaya berikut. Arahkan siswa ke Gambar 11.22.

Biaya = (Luas alas × biaya alas) + (Luas selimut × biaya selimut) + (Luas atap × biaya atap)

Biaya =

$$\frac{22}{7}r^2 \times 50 + \frac{22}{7}rt \times 80 + \frac{22}{7}r^2 \times 50$$

Biaya =

$$\frac{22}{7}r^2 \times 150 + \frac{22}{7}r \times \frac{7}{22} \times \frac{43120}{r^2} \times 80 + \frac{22}{7}r^2 \times 50$$

$$\text{Biaya} = \frac{22}{7}r^2 \times 200 + \frac{43120}{r} \times 80$$

Biaya B(r) adalah fungsi atas radius r (dalam Rupiah).

$$B(r) = \frac{4400}{7}r^2 + \frac{3449600}{r}$$

$$B'(r) = \frac{8800}{7}r - \frac{3449600}{r^2} = 0$$

$$\frac{88}{7}r^3 = \frac{34496}{r^2}$$

$r^3 = 2744 = 143 \Leftrightarrow r = 14$

Minta siswa memanfaatkan konsep turunan dalam menentukan titik stasioner.

Jadi biaya minimum

$$= \frac{22}{7} \times 14^2 \times 200 + \frac{43120}{14} \times 80$$

$= 616 \times 200 + 3080 \times 80$

$= 123200 + 246400$

$= 369.600$

Biaya minimum adalah Rp369.600,-

Minta siswa menentukan turunan kedua fungsi biaya tersebut dan mensubstitusi r = 14 yang telah diperoleh.

Contoh 11.18

Kamu masih ingat soal pada Bab Limit Fungsi di kelas X, bukan? Sebuah bidang logam dipanaskan di bagian tengah dan memuai sehingga mengalami pertambahan luas sebagai fungsi waktu $f(t) = 0,25t^2 + 0,5t(\text{cm}^2)$. Tentukanlah kecepatan perubahan pertambahan luas bidang tersebut pada saat $t = 5$ menit.

Contoh 11.18 adalah contoh yang telah diajukan dan diselesaikan pada Bab X kelas X. Namun pada saat ini, kita kaji ulang kembali penyelesaiannya dengan menggunakan konsep turunan. Ingatkan kembali siswa tentang proses *penyelesaian dengan menggunakan konsep limit fungsi berikut.*

Arahkan siswa memperhatikan Tabel 11.5. Arahkan siswa untuk mengingat kembali penyelesaian limit fungsi dengan numerik. (pandu mengamati nilai limit kiri dan kanan).

Alternatif penyelesaian pertama (dengan Numerik)

Kecepatan perubahan pertambahan luas adalah besar pertambahan luas dibandingkan dengan besar selisih waktu.

Perhatikan tabel!

Tabel 11.5: Nilai pendekatan $f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$ pada saat t mendekati 5

12	$\Delta t = t-5$	$\Delta f = f(t)-f(5)$	$\Delta f/\Delta t$
1	-4	-8	2
2	-3	-6,75	2,25
3	-2	-5	2,5
4	-1	-2,75	2,75
4,5	-0,5	-1,4375	2,875
4,9	-0,1	-0,2975	2,975
4,99	-0,01	-0,029975	2,9975
4,999	-0,001	-0,00299975	2,99975
4,9999	-0,0001	-0,000299997	2,999975
5	0,0000	0	?
5,0001	0,0001	0,000300002	3,000025
5,001	0,001	0,00300025	3,00025
5,01	0,01	0,030025	3,0025
5,1	0,1	0,3025	3,025
5,5	0,5	1,5625	3,125
6	1	3,25	3,25

Dengan melihat tabel di atas, pada saat t mendekati 5 maka Δt mendekati 0 dan $f(t)$ akan mendekati 3 (cm^2/menit).

Alternatif Penyelesaian kedua (dengan konsep Limit)

$f(t) = 0,25t^2 + 0,5t$
$f(5) = 0,25(5)^2 + 0,5(5) = 8,75$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 5}\frac{f(t)-f(5)}{t-5} &= \lim_{t\to 5}\frac{(0,25t^2+0,5t)-f(5)}{t-5}\\ &= \lim_{t\to 5}\frac{0,25t^2+0,5t-8,75}{t-5}\\ &= \lim_{t\to 5}\frac{0,5(0,5t^2+t-17,5)}{t-5}\\ &= \lim_{t\to 5}\frac{0,5(0,5t+3,5)(t-5)}{t-5}\\ &= \lim_{t\to 5}0,5(0,5t+3,5)\\ &= 0,5(0,5 \text{ x } 5+3,5)\\ &= 3\end{aligned}$$

Setelah memahami proses penyelesaian contoh soal dengan numerik maka Guru meminta siswa memperhatikan proses penyelesaian dengan konsep limit fungsi berikut.

Alternatif Penyelesaian ketiga (dengan konsep Turunan)

$f(t) = 0,25t^2 + ,5t$

$f'(t) = 0,5t + 0,5 = 0$

$f(5) = 2,5 + 0,5 = 3$

Kecepatan perubahan pertambahan luas bidang tersebut pada saat $t = 5$ menit adalah 3 (cm^2/menit).

Arahkan siswa untuk memahami proses penyelesaian contoh tersebut dengan konsep turunan serta membandingkannya dengan proses di atas.

Contoh 11.19 adalah contoh soal pemakaian konsep nilai balik suatu fungsi. Minta siswa memahami konsep nilai balik suatu fungsi di atas. Arahkan siswa terlebih dulu untuk membuat model matematika untuk mendapatkan fungsi biaya, kemudian menggunakan konsep untuk menentukan biaya minimum. Pandu siswa langkah per langkah dengan memberikan kesempatan kepada siswa untuk mengerjakan terlebih dulu.

Contoh 11.19

Seorang karyawan berencana akan tinggal di rumah kontarakan setelah dia diterima bekerja di sebuah pabrik. Untuk menghemat biaya pengeluaran, ia berharap dapat tinggal di kontrakan yang tidak jauh dari tempat dia bekerja dan uang sewa kontrakan yang juga mendukung. Jika dia tinggal x km dari tempat bekerja maka biaya transportasi adalah c rupiah per km per tahun. Biaya kontrakan adalah $\frac{b}{x+1}$ per tahun (dalam rupiah), dengan b dan c adalah konstanta bernilai real positif dan $b > c$. Dapatkah kamu tentukan biaya minimum pengeluaran karyawan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Langkah 1. Modelkan permasalahan

Biaya = Biaya transportasi + Biaya sewa (per tahun)

$$B(x) = cx + \frac{b}{x+1} \text{ dengan daerah asal } x \geq 0$$

Langkah 2. Tentukan titik stasioner

$B(x) = cx + b(x+1)^{-1}$ sehingga $B'(x) = c - b(x+1)^{-2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{c(x+1)^2 - b}{(x+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{\frac{b}{c}} \text{ atau } x = -1 + \sqrt{\frac{b}{c}}$$

Karena $b > c$ dan $x \geq 0$ maka nilai x yang digunakan adalah

$$x = -1 + \sqrt{\frac{b}{c}}$$

Langkah 3. Uji titik stasioner ke turunan kedua fungsi

$B'(x) = c - b(x+1)^{-2} = 0$ sehingga $B''(x) = 2b(x+1)^{-3} = \frac{2b}{(x+1)^3}$

$$B''(-1+\sqrt{\frac{b}{c}}) = \frac{2b}{(\sqrt{\frac{b}{c}})^3} = \frac{2c\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$$

Karena b dan c adalah konstanta bernilai real positif maka $B''(-1+\sqrt{\frac{b}{c}}) > 0$ atau merupakan ekstrim minimum.

Langkah 4. Tentukan biaya minimum

Mensubstitusikan nilai $x = -1 + \sqrt{\frac{b}{c}}$ ke fungsi $B(x)$ sehingga

$$B(-1+\sqrt{\frac{b}{c}}) = -c + 2\sqrt{bc}$$

Jadi, biaya minimum karyawan tersebut adalah: $-c+2\sqrt{bc}$ (dalam rupiah) per tahun.

2.4 Aplikasi Konsep Turunan dalam Permasalahan Kecepatan dan Percepatan

Secara arti fisis, konsep turunan yang berkaitan dengan fungsi naik atau turun, nilai optimal maksimum atau minimum serta titik belok berhubungan dengan kecepatan dan percepatan suatu fungsi. Amati dan pelajarilah permasalahan berikut!

Masalah-11.9

Seorang pembalap melakukan latihan di sebuah arena balap dengan lintasan yang berkelok-kelok. Dia melaju kencang meninggalkan garis start dengan kecepatan yang diatur dengan baik. Di setiap

Guru menyampaikan bahwa aplikasi turunan ada pada berbagai bidang. Salah satu adalah di bidang fisika yaitu masalah kecepatan dan percepatan.

Untuk memperkenalkan salah satu penerapan turunan dalam fisika, guru meminta siswa memahami Masalah 11.9. Tanya siswa, apa yang dirasakan pada saat berada disebuah kendaraan yang sedang *melaju cepat atau lambat, atau pada saat melaju di jalan yang berkelok – kelok. Arahkan siswa ke pemahaman kecepatan yang dipercepat dengan diperlambat.*

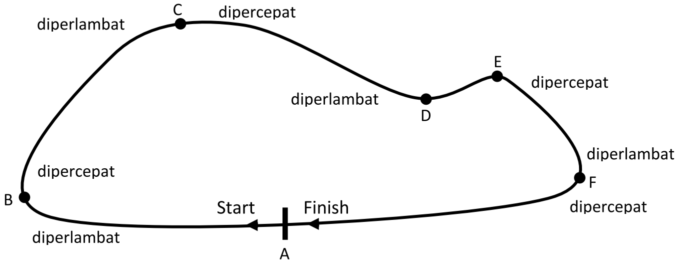
belokan lintasan, dia menurunkan kecepatannya tetapi berharap dengan secepat mungkin menaikkan kecepatan setelah meninggalkan titik belokan tersebut. Demikian dia berlatih membalap dan akhirnya dia berhenti mendekati titik finish. Apakah kamu dapat menemukan hubungan jarak lintasan dan kecepatan? Dapatkah kamu jelaskan ilustrasi di atas berdasarkan konsep turunan?

Alternatif Penyelesaian.

Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan menemukan konsep turunan dan mengaplikasikannya kembali. Misalkan lintasan arena balap tersebut adalah sebuah lintasan yang berupa siklis yaitu garis start dan garis finish adalah sama, tetapi dipandang berlawanan arah. Garis start berarti garis tersebut ditinggalkan atau bergerak menjauhi sementara garis finish berarti garis tersebut didekati.

Pandu siswa memahami bentuk lintasan berikut. Tanya siswa, kenapa kenderaan harus diperlambat atau harus percepat?

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 11.24 Lintasan balap

Minta siswa memahami penjelasan di samping. Kaitkan penjelasan tersebut dengan gambar di atas. Dengan pemahaman yang diperoleh, arahkan siswa memahami Tabel 11.6.

Jika pada arena balap yang menjadi variabel adalah waktu maka lin-tasan yang ditempuh merupakan fungsi waktu $s = f(t)$. Dengan demikian, daerah asal fungsi adalah waktu $t \geq 0$ karena dihitung sejak diam. Setiap titik pada lintasan akan didekati dan dijauhi, bukan? Hal ini berarti ada peranan kecepatan $v(t)$. Untuk titik yang dijauhi berarti kecepatan positif, dan titik yang akan didekati berarti kecepatan negatif.

Tabel 11.6 Kecepatan suatu fungsi dan posisinya

Posisi	Nilai
Diam	$v(t)= 0$
Bergerak menjauhi titik tetap (Start)	$v(t) > 0$
Bergerak mendekati titik tetap (Finish)	$v(t) < 0$

Jadi, bergerak semakin menjauhi ataupun semakin mendekati berarti ada terjadi perubahan pergerakan pada lintasan, sehingga kecepatan adalah laju perubahan dari lintasan, yaitu:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t) \text{ atau } v(t) = s'(t)$$

Arahkan siswa mengkaitkan kecepatan dengan percepatan dengan menghubungkannya dengan konsep limit fungsi. Minta siswa memahami penjelasan di samping dan memperhatikan Tabel 11.7

Pergerakan pembalap pada lintasan di titik belok diperlambat atau dipercepat, sehingga posisi percepatan adalah sebagai berikut:

Tabel 11.7 Percepatan suatu fungsi dan posisinya

Posisi	Nilai
Konstan	$a(t) = 0$
Bergerak diperlambat	$a(t) < 0$
Bergerak dipercepat	$a(t) > 0$

Jadi, bergerak dipercepat atau diperlambat berhubungan dengan kecepatan kenderaan tersebut, yaitu terjadi perubahan kecepatan kenderaan. Percepatan $a(t)$ adalah laju perubahan dari kecepatan, yaitu:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) \text{ atau } a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Ajukan Contoh 11.20 dan pandu siswa menyelesaikan berdasarkan konsep yang telah ditemukan.

Contoh 11.20

Pada pengamatan tertentu, sebuah partikel bergerak mengikuti sebuah pola yang merupakan fungsi jarak s atas waktu t yaitu $s(t) = t^4 - 6t^2 + 12$.Tentukanlah panjang lintasan dan kecepatan pada saat percepatannya konstan.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui: $s(t) = t^4 - 6t^2 + 12$

Ditanya: $s(t)$ dan $v(t)$ pada saat $a(t) = 0$

Proses penyelesaian

Kecepatan adalah turunan pertama dari fungsi

$v(t) = s'(t) = 4t^2 - 12t$

Percepatan adalah turunan pertama dari kecepatan

$a(t) = v'(t) = 12t^2 - 12 = 0$

$12(t + 1)(t - 1) = 0$

Jadi, percepatan akan konstan pada saat $t = 1$ sehingga:

$v(1) = s'(1) = 4(1)^3 - 12(1) = -8$

$s(1) = (1)^4 - 6(1)^2 + 12 = 7$

Minta siswa mendapatkan titik stasioner, interval fungsi naik atau turun, titik optimal (maksimum atau minimum) dan titik belok, kemudian menggambarkannya pada koordinat kartesius. Pandu siswa memahami langkah perlangkah pada proses penyelesaian berikut.

3. Sketsa Kurva Suatu Fungsi dengan Konsep Turunan

Berdasarkan konsep turunan yang diperoleh di atas, maka kita dapat menggambar kurva suatu fungsi dengan menganalisis titik stasioner, fungsi naik atau turun, titik optimalnya (maksimum atau minimum) dan titik belok. Perhatikan dan pelajarilah contoh berikut.

Contoh 11.21

Analisis dan sketsalah kurva fungsi $f(x) = x^4 + 2x^3$.

Alternatif Penyelesaian.

Langkah 1. Menentukan nilai pembuat nol fungsi.

$$f(x) = x^4 + 2x^3 \Leftrightarrow x^3(x+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^3 = 0 \text{ atau } x + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -2$$

Jadi, kurva melalui sumbu x di titik A(0,0) atau B(-2,0)

Langkah 2. Menentukan titik stasioner.

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2x+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = 0 \text{ atau } 2x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -\frac{3}{2}$$

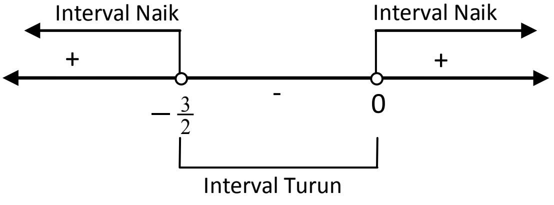
Nilai $f(0) = 0$ atau $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{27}{16}$

Jadi, titik stasioner fungsi adalah A(0,0) atau $C(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$.

Langkah 3. Menentukan interval fungsi naik/turun
Interval pembuat fungsi naik adalah:

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^3 > 0 \Leftrightarrow 2x^2(2x+3) > 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -\frac{3}{2}$$

Ingat pelajaran pertidaksamaan pada kelas X.



Jadi, fungsi akan naik pada $x < -\frac{3}{2}$ atau $x > 0$ dan turun pada $-\frac{3}{2} < x < 0$.

Langkah 4. Menentukan titik balik fungsi Untuk menentukan titik balik maksimum atau minimum fungsi, kita akan menguji titik stasioner ke turunan kedua fungsi.

$f''(x) = 12x^2 + 12x$ sehingga $f''(0) = 0$

Titik A(0,0) bukanlah sebuah titik balik.

$f''(x) = 12x^2 + 12x$ sehingga $f''(-\frac{3}{2}) = 9 > 0$

Titik $C(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$ adalah titik balik minimum.

Langkah 5. Menentukan titik belok

$f''(x) = 12x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow 12x(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 12x = 0$ atau $x + 1 = 0$

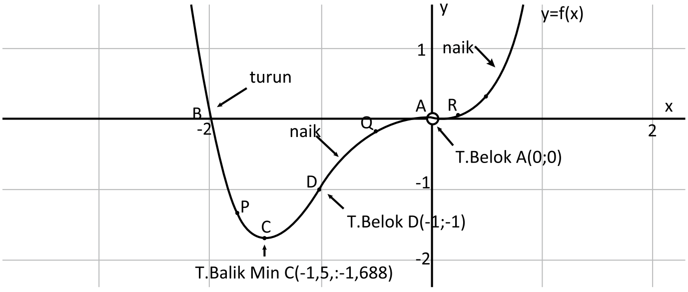
$\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = -1$

Nilai $f(0) = 0$ atau $f(-1) = -1$

Jadi, titik belok fungsi adalah A(0,0) atau D(–1, –1).

Langkah 6. Menentukan beberapa titik bantu

x	**-7/4**	**-1/2**	**1/4**	**1/2**
y = x4 + 2x3	-343/256	-3/16	9/256	5/16
(*x*,*y*)	P(-7/4,-343/256)	Q(-1/2,-3/16)	R(1/4,9/256)	S(1/2,5/16)



Gambar 11.25 Sketsa kurva fungsi $f(x) = x^4 + 2x^3$.

Contoh 11.22

Analisis dan sketsalah kurva fungsi $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Setelah siswa mempelajari konsep- konsep turunan di atas maka guru mengajak siswa bersama-sama mencoba menyelesaikan contoh soal berikut. Minta siswa memperhatikan langkah – langkah berikut. Guru dapat menguji kemampuan pemahaman siswa dengan memberikan contoh lainnya.

Alternatif Penyelesaian.

Langkah 1. Menentukan nilai pembuat nol fungsi.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = 0$$

$\Leftrightarrow x^2 = 0$ dan $x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ dan $x \neq 1$

Jadi, kurva melalui sumbu x pada titik A(0,0)

Langkah 2. Menentukan titik stasioner.

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2(1)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x(x-1) - x^2(1) \text{ dan}$$

$(x - 1)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$ dan $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x(x - 2)$ dan $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = 2$

Nilai $f(0) = 0$ atau $f(2) = 4$ Jadi, titik stasioner fungsi adalah A(0,0) atau B(2,4).

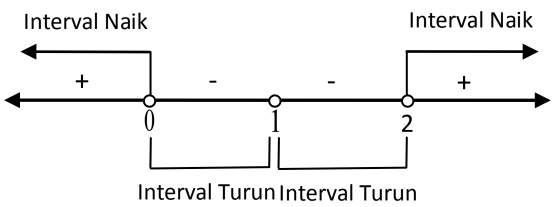
Langkah 3. Menentukan interval fungsi naik/turun Interval pembuat fungsi naik adalah:

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}>0 \Leftrightarrow (x^2-2x)(x-1)^2>0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)(x-1)^2>0$$

$$\Leftrightarrow x=0,\ x=2 \text{ atau } x=1$$

Ingat pelajaran pertidaksamaan pada kelas X.



Jadi, fungsi akan naik pada $x < 0$ atau $x > 2$ dan fungsi akan turun pada $0 < x < 1$ atau $1 < x < 2$.

Langkah 4. Menentukan titik balik fungsi Untuk menentukan titik balik maksimum atau minimum fungsi, kita akan menguji titik stasionernya ke turunan kedua fungsi.

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \text{ sehingga}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)2(x-1)(1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f''(0) = -2 < 0 \text{ dan } f''(2) = 2 > 0$$

Titik A(0, 0) adalah titik balik maksimum dan titik A(2, 4)adalah titik balik minimum.

Langkah 5. Menentukan titik belok

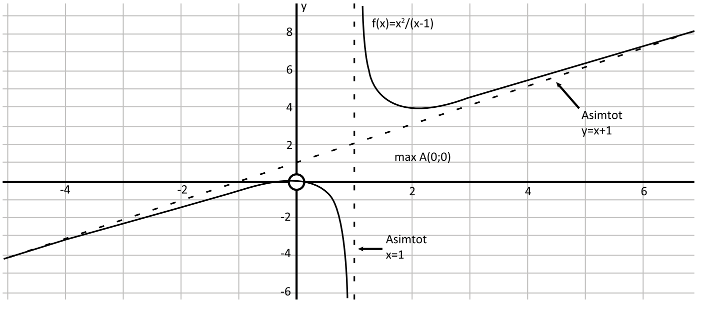
$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow \text{tidak ada nilai } x$$

Jadi, tidak ada titik belok pada fungsi tersebut.

Langkah 6. Menentukan beberapa titik bantu

X	-1	1/2	4	5
$y = \frac{x^2}{x-1}$	-1/2	-1/2	16/3	25/4
(x,y)	P(-1,-1/2)	Q(1/2,-1/2)	R(4,16/3)	S(5,25/4)

Minta siswa untuk memperhatikan gambar di samping. Minta siswa menunjukkan kembali titik balik fungsi, interval fungsi naik/turun. Berdasarkan gambar, minta siswa memberikan pengertian garis asimtot. Guru berperan sebagai fasilitator.



Gambar 11.26 Sketsa kurva fungsi $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Berikan soal - soal Uji Kompetensi ini sebagai tugas di rumah bagi siswa. Tujuan pemberian uji kompetensi ini adalah untuk mengetahui apakah siswa sudah memahami tentang konsep turunan fungsi aljabar untuk menentukan tafsiran geometris (stasioner, fungsi naik/turun, titik balik dan titik belok) dan aplikasi turunan.

Uji Kompetensi 11.2

1. Tentukanlah titik balik fungsi-fungsi berikut!

   a. $f(x) = x^2 - 2x$

   b. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$

   c. $f(x) = x^3 - x$

   d. $f(x) = x^3 - 6x - 9x + 1$

   e. $f(x) = x^4 - x^2$

2. Analisis dan sketsalah bentuk kurva dari fungsi-fungsi berikut dengan menunjukkan interval fungsi naik/turun, titik maksimum/minimum dan titik belok!

   a. $f(x) = x^2 - 2x$

   b. $f(x) = x^3 - x$

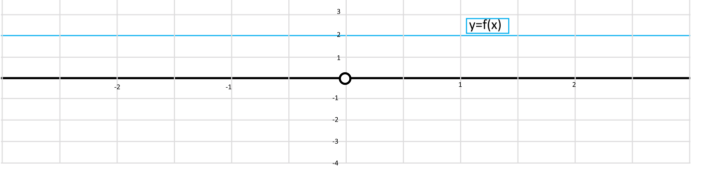
   c. $f(x) = x^4 - x^2$

   d. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

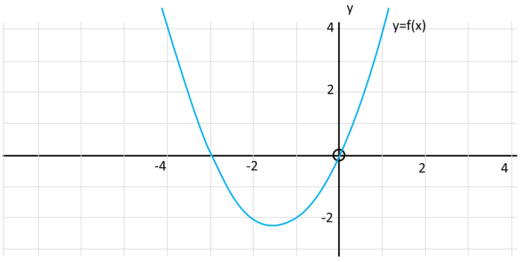
   e. $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$

3. Analisis (fungsi naik/turun, maksimum/minimum, titik belok) kurva dari suatu fungsi berdasarkan sketsa turunan pertamanya.

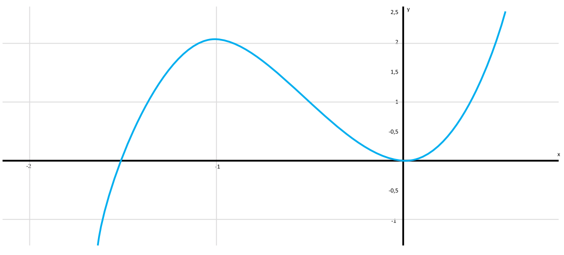
a.



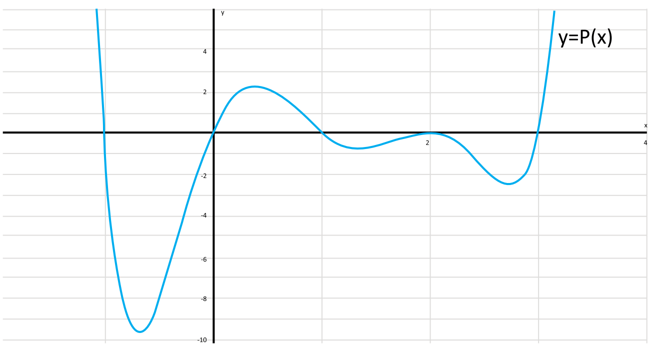
b.



c.



d.



4. Seorang anak menggambar sebuah kurva tertutup setengah lingkaran dengan diameter 28 cm. Kemudian, dia berencana membuat sebuah bangun segiempat di dalam kurva tersebut dengan masing-masing titik sudut segiempat menyinggung keliling kurva.

a. Sketsalah kurva tertutup setengah lingkaran tersebut.
b. Buatlah segiempat yang mungkin dapat dibuat dalam kurva. Sebutkanlah jenis-jenis segiempat yang dapat dibuat.
c. Hitunglah masing-masing segiempat yang diperoleh.
d. Segiempat yang manakah yang mempunyai luas terbsar? Carilah luas segiempat terbesar yang dapat dibuat dalam kurva tersebut dengan menggunakan konsep difeensial.

5. Sebuah segiempat OABC dibuat pada daerah yang dibatasi oleh sumbu x, sumbu y dan kurva fungsi y = (x – 1)2. Jika O adalah titik asal koordinat, A pada sumbu x, B pada kurva dan C pada sumbu y maka tentukanlah persamaan garis singgung dan persamaan garis normal di titik B agar luas OABC maksimum. Sketsalah permasalahan di atas.

Minta siswa untuk mengerjakan soal proyek berikut dan membuat laporan. Arahkan siswa untuk mempresentasikan hasil kerja.

Projek

Jika f adalah fungsi bernilai real pada $-\infty < x < \infty$. Berdasarkan konsep, turunan adalah sebuah limit fungsi, yaitu $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Nyatakanlah turunan kedua fungsi $f''(x)$ sebagai limit fungsi. Kemudian tentukanlah turunan kedua dari $f(x) = \sqrt{2x}$ pada $x > 0$.

Buatlah laporan projekmu dan presentasikanlah di depan teman-temanmu dan gurumu!

D. PENUTUP

Berikut adalah kesimpulan dari pembelajaran turunan. Arahkan siswa kembali memhami konsep berdasarkan kesimpulan berikut.

Kita telah menemukan konsep turunan fungsi dan sifat-sifatnya dari berbagai pemecahan dunia nyata. Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep dan sifat turunan fungsi di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut:

1. Misalkan $f: R \to R$ adalah fungsi kontinu dan titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ pada kurva f. Garis sekan adalah yang menghubungkan titik P dan Q dengan gradien $m_{\sec} = \dfrac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$
2. Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva. Gradien garis tangen/singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah nilai limit garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis $m_{\tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$
3. Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq P$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x)$. Fungsi f dapat diturunkan pada titik c jika dan hanya jika nilai $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.
4. Misalkan $f: S \to R$ dengan $S \subseteq R$. Fungsi f dapat diturunkan pada S jika dan hanya jika fungsi f dapat diturunkan pada setiap titik c di S.
5. Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $c \in S$ dan $L \in R$. Fungsi f dapat diturunkan di titik c jika dan hanya jika nilai turunan kiri sama dengan nilai turunan kanan, ditulis:

   $$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = L .$$

6. Aturan Turunan:
   Misalkan f, u, v adalah fungsi bernilai real pada interval I, a bilangan real dapat diturunkan maka:

   $f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$

   $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$

   $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = ax^{n-1}$

   $f(x) = au(x) \rightarrow f'(x) = au'(x)$

   $f(x) = a[u(x)]^n \rightarrow f'(x) = au'(x)[u(x)]^{n-1}$

   $f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

   $f(x) = u(x)v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

   $$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

7. Misalkan f adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada $x \in I$ maka

   Jika $f'(x) > 0$ maka kurva selalu naik pada interval I

   Jika $f'(x) < 0$ maka kurva selalu turun pada interval I

   Jika $f'(x) \geq 0$ maka kurva tidak pernah turun pada interval I

   Jika $f'(x) \geq 0$ maka kurva tidak pernah naik pada interval I

8. Misalkan f adalah fungsi bernilai real yang kontinu dan ada turunan pertama dan kedua pada $x_1 \in I$ sehingga:

   Jika $f'(x_1) = 0$ maka titik $P(x_1, f(x))$ disebut dengan stasioner/kritis.

   Jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) > 0$ maka titik $P(x_1, f(x))$ disebut titik balik minimum fungsi.

   Jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) < 0$ maka titik $P(x_1, f(x))$ disebut titik balik maksimum fungsi.

   Jika $f''(x_1) = 0$ maka titik $P(x_1, f(x_1))$ disebut titik belok.

9. Kecepatan adalah laju perubahan dari fungsi $s = f(t)$ terhadap perubahan waktu t, yaitu:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t) \text{ atau } v(t) = s'(t)$$

Percepatan adalah laju perubahan dari fungsi kecepatan

$v(t)$ terhadap perubahan waktu t, yaitu:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) \text{ atau } a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Catatan:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bab 12

INTEGRAL

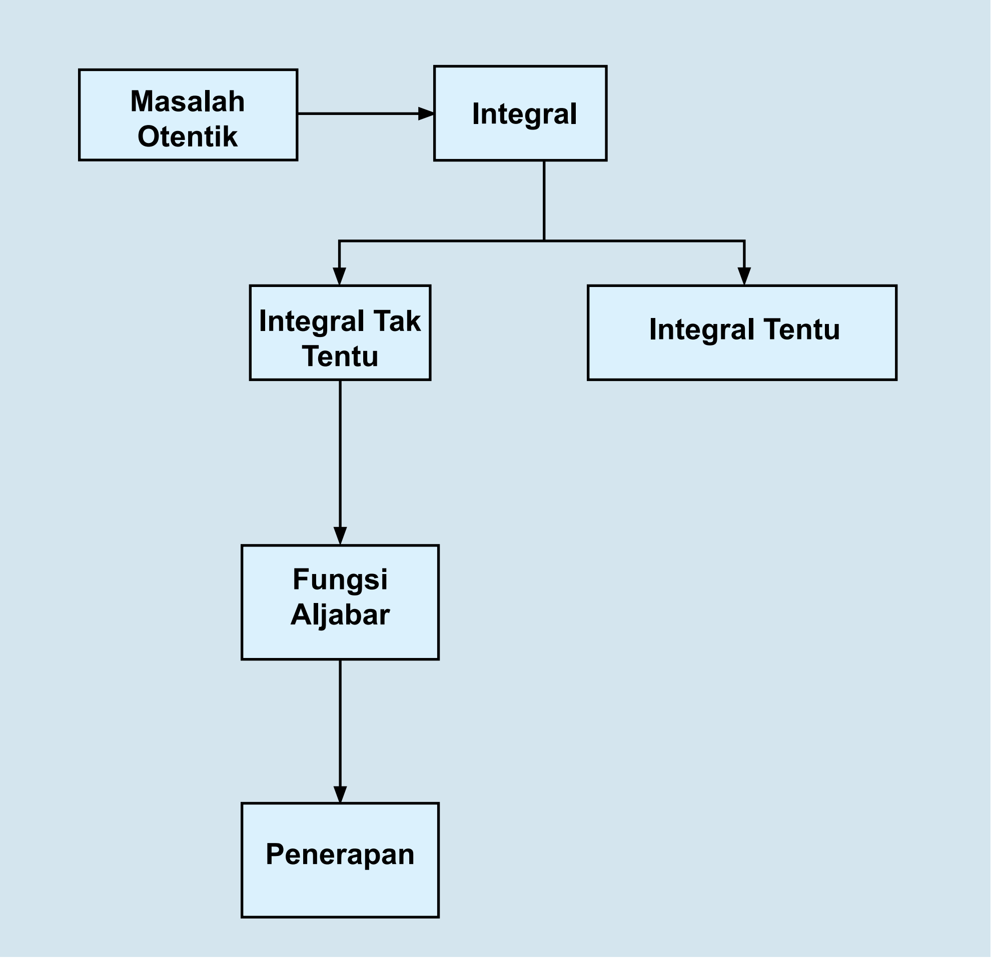
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran integral siswa mampu: 1. Mampu mentransformasi diri dalam berperilaku jujur, tangguh menghadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 2. Mendeskripsikan konsep integral tak tentu suatu fungsi sebagai kebalikan dari turunan fungsi. 3. Memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah dunia nyata dan matematika yang melibatkan turunan dan integral tak tentu dan memeriksa kebenaran langkah-langkahnya. 4. Menurunkan aturan dan sifat integral tak tentu dari aturan dan sifat turunan fungsi. 5. Memilih strategi yang efektif dan menyajikan model matematika Dalam memecahkan masalah nyata tentang integral tak tentu dari fungsi aljabar.	Melalui proses pembelajaran integral, siswa memiliki pengalaman belajar sebagai berikut. • menemukan konsep integral melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur; • berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis, kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep integral dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Integral tak tentu*
- *Fungsi aljabar*
- *Derivatif*
- *Antiderivatif*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Integral Tak Tentu sebagai Kebalikan dari Turunan Fungsi

Mari kita ingat kembali konsep aplikasi turunan pada bidang fisika. Kecepatan adalah turunan pertama dari fungsi jarak dan percepatan adalah turunan pertama dari fungsi kecepatan. Bila kita berpikir kembali tentang aplikasi ini, bagaimana hubungan kecepatan jika percepatan yang diketahui. Hal ini mempunyai pemikiran terbalik dengan turunan, bukan? Nah, konsep inilah yang akan kita pelajari, yang disebut dengan integral.

Integral adalah konsep yang juga banyak berperan dalam perkembangan ilmu matematika dan penerapan diberbagai bidang. Ini berarti integral banyak diterapkan di kehidupan sehari-hari. Keterlibatan integral dalam terapan ilmu lain seperti geometri, teknologi, biologi, ekonomi sangat membantu untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Menurut sejarah, orang yang pertama kali mengemukakan tentang ide integral adalah Archimedes yang merupakan seorang ilmuwan bangsa Yunani yang berasal dari Syracusa (287 – 212 SM). Archimedes menggunakan ide integral tersebut untuk mencari luas daerah suatu lingkaran, luas daerah yang dibatasi oleh parabola dan tali busur, dan sebagainya. Prinsip-prinsip dan teknik integrasi dikembangkan terpisah oleh Isaac Newton dan Gottfried Leibniz pada akhir abad ke-17. Menurut sejarah pengembangan kalkulus juga sangat besar jasa dan peranan dari George Friederick Benhard Riemann (1826 – 1866).

Pada bab ini akan dibahas tentang arti "***antiturunan***" (anti derivatif), "***integral tak tentu***", dan beberapa hal dasar yang pada akhirnya membantu kita untuk menemukan teknik yang sistematik dalam menentukan suatu fungsi jika turunannya diketahui.

Perkenalkan kepada siswa istilah antiturunan. Minta siswa mempelajari kembali aturan turunan pada bab sebelumnya. Minta siswa menentukan sebuah fungsi dan turunannya. Perkenalkan kepada siswa antiturunan dari turunan fungsi yang disebutkannya. Informasikan kepada siswa tujuan pembelajaran.

Berikan kepada siswa beberapa contoh aplikasi turunan diberbagai bidang, berikan kesempatan kepada siswa untuk memberikan contoh aplikasi lainnya. Informasikan konsep antiturunan yang dipakai dalam aplikasi yang telah dibicarakan.

Perkenalkan sejarah turunan dan antiturunan kepada siswa. Minta siswa mencari dan menggali lebih dalam sejarah konsep turunan dan integral dari berbagai sumber.

Ajukan Masalah 12.1 kepada siswa. Ingatkan siswa proses pergerakan objek (barang) mengikuti konsep transformasi (translasi). Minta siswa membuat sketsa sederhana sesuai dengan cerita pada masalah tersebut.

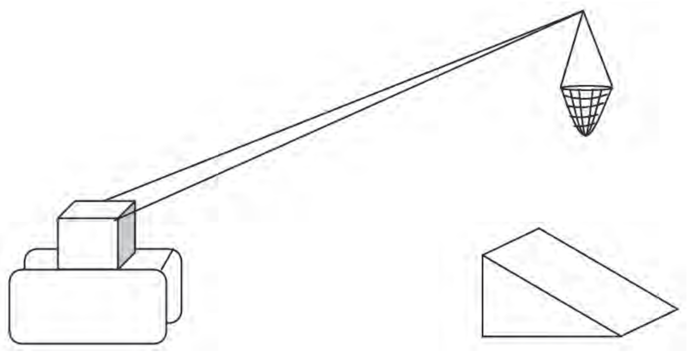
Masalah-12.1

Di pelabuhan selalu terjadi bongkar muat barang dari kapal ke dermaga dengan menggunakan mesin pengangkat/pemindah barang. Barang dalam jaring diangkat dan diturunkan ke dermaga. Terkadang barang diturunkan ke sebuah bidang miring agar mudah dipindahkan ke tempat yang diharapkan. Dari permasalahan ini, dapatkah kamu sketsa perpindahan barang tersebut? Dapatkah kamu temukan hubungan masalah ini dengan konsep turunan (Ingat pelajaran Turunan pada Bab XI)

Berikut adalah sketsa sederhana berdasarkan Masalah 12.1. Minta siswa menghubungkan Gambar 12.1 dengan cerita pada Masalah 12.1.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan masalah di atas kita sketsa dengan sederhana pada gambar berikut:

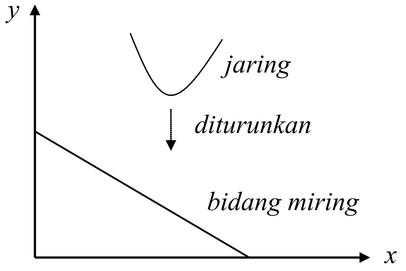


Gambar 12.1 Barang yang diturunkan ke bidang miring

Pandu siswa mengubah masalah nyata menjadi masalah abstrak dengan menggunakan pendekatan koordinat.

Sekarang, kita misalkan jaring (barang) yang diturunkan adalah sebuah fungsi, bidang miring sebuah garis, ketinggian adalah sumbu y, dan permukaan dermaga adalah sumbu x maka gambar tersebut dapat disketsa ulang dengan sederhana pada bidang koordinat kartesius.

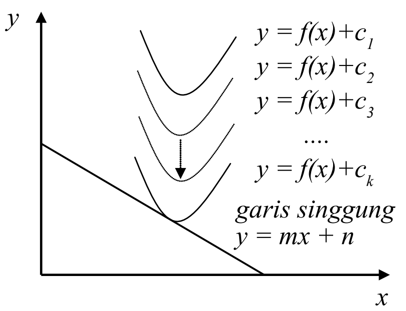
Pandu siswa untuk membentuk sketsa sederhana masalah di atas dengan menggunakan



Gambar 12.2 Jaring dan bidang miring sebagai kurva dan garis pada bidang koordinat kartesius

bidang koordinat kartesius.
Minta siswa mempelajari sketsa berikut dan kembali menghubungkan dengan cerita pada Masalah 12.1

Jika jaring tersebut sebuah kurva dan diturunkan pada Gambar 12.2 maka berdasarkan konsep Transfromasi (translasi) pada Bab X, terjadi perubahan nilai konstanta pada fungsi tersebut sampai akhirnya kurva tersebut akan menyingung bidang miring atau garis. Perhatikan gambar kembali.



Gambar 12.3 Perubahan konstanta fungsi pada translasi kurva

Ingatkan siswa konsep translasi yang telah dipelajari pada bab sebelumnya.
Minta siswa memberi komentar, apa maksud dari nilai c_1, c_2, c_3 dan c_k pada gambar di samping.
Minta siswa mengingat kembali konsep turunan terkait persamaan garis singgung.
Tanya siswa, apa hubungan gradien garis singgung dengan fungsi yang disinggung?

Berdasarkan Gambar 12.3, kurva yang bergerak turun akan menyinggung garis tersebut. Ingat kembali konsep gradien sebuah garis singgung pada Bab XI bahwa gradien garis singgung adalah turunan pertama fungsi yang disinggung garis tersebut. Berdasarkan konsep tersebut maka Gambar 12.3 memberikan informasi bahwa: m adalah turunan pertama y' atau $m = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ (ingat notasi turunan di Bab XI) sehingga y adalah anti turunan dari m. Dengan demikian anti turunan dari m adalah $y = f(x) + c_k$. Hal ini berarti bahwa nilai konstanta c_k dapat berubah-ubah.

Jadi, kita telah memahami bahwa integral adalah antiturunan dari sebuah fungsi. Dan anti turunan dari sebuah fungsi akan mempunyai konstanta yang belum dapat ditentukan nilainya. Untuk lebih memahaminya, kita ingat kembali proses turunan sebuah fungsi pada masalah berikut.

Ajukan Masalah 12.2 kepada siswa. Beri kesempatan kepada siswa untuk mempelajari masalah tersebut terlebih dahulu.

Masalah-12.2

Berdasarkan konsep turunan, beberapa fungsi tersebut bila diturunkan menghasilkan fungsi yang sama. Jika digunakan konsep antiturunan pada fungsi tersebut, bagaimanakah fungsinya? Apakah dapat kembali ke fungsi asal? Berikut adalah fungsi-fungsi yang akan diamati. a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4$, b) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4$, c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8$, d) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}$, e) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{207}$. Turunkan fungsi-fungsi tersebut kemudian amatilah turunan nilai konstantanya! Hubungkan kembali fungsi awal dengan turunannya serta anti turunannya! Buatlah kesimpulan dari hasil pengamatan dari penyelesaian yang kamu peroleh! (petunjuk: turunan fungsi $F(x)$ adalah $F'(x) = f(x) = y'$

Minta siswa menurunkan semua fungsi tersebut dan mengamati, apa yang terjadi?

Alternatif Penyelesaian:

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4$

adalah $F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4\right] = x^3$

b) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4$

adalah $F'(x) = f(x) = y'\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 + 4\right] = x^3$

c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8$

adalah $F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 - 8\right] = x^3$

d) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}$

adalah $F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\right] = x^3$

e) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{207}$

adalah $F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{207}\right] = x^3$

Jika dilakukan pengamatan kepada ketiga fungsi, maka seluruh fungsi $F(x)$ tersebut di atas adalah antiturunan dari fungsi $f(x) = x^3$, sementara fungsi $F(x)$ mempunyai konstanta yang berbeda-beda. Jadi, dapat ditunjukkan bahwa sebuah fungsi dapat memiliki banyak antiturunan. Jika F(x) adalah fungsi yang dapat diturunkan, yaitu $f(x)$ maka antiturunan dari $f(x)$ adalah $F(x) + c$ dengan c adalah sembarang konstanta.

Pandu siswa mengamati hubungan turunan dan antiturunan masing – masing fungsi.

$$\boxed{F(x)} \xrightarrow{\text{turunan}} \boxed{f(x)} \xrightarrow{\text{anti turunan}} \boxed{F(x) + c}$$

Perhatikan dan pahami definisi dan sifat berikut.

Definisi 12.1

$f : R \rightarrow R$ dan $F : R \rightarrow R$ disebut antiturunan atau integral tak tentu f jika

$F'(x) = f(x)\ \forall x \in R$

Arahkan siswa memahami Definisi 12.1, Sifat 12.1 dan Sifat 12.2.
Minta siswa membuat contoh berdasarkan definisi dan kedua sifat tersebut.

Sifat 12.1

Proses menemukan y dari $\frac{dy}{dx}$ merupakan kebalikan dari sebuah proses turunan dan dinamakan antiturunan.

Sifat 12.2

Jika $F(x)$ adalah sebuah fungsi dengan $F'(x) = f(x)$ dapat dikatakan bahwa

a. turunan $F(x)$ adalah $f(x)$ dan

b. antiturunan dari $f(x)$ adalah $F(x)$

Ajukan Contoh 12.1 pada siswa. Minta salah satu siswa memberikan penjelasan terkait hubungan gradien garis singgung dengan turunan serta mengaitkan kembali dengan antiturunan. Penjelasan yang diberikan merupakan penyegaran teori atau konsep turunan kepada siswa.

Contoh 12.1

Jika $m = 2x - 4$ adalah gradien garis singgung dari sembarang kurva $f(x)$. Tunjukkan bahwa terdapat banyak fungsi $f(x)$ yang memenuhi.

Alternatif Penyelesaian:

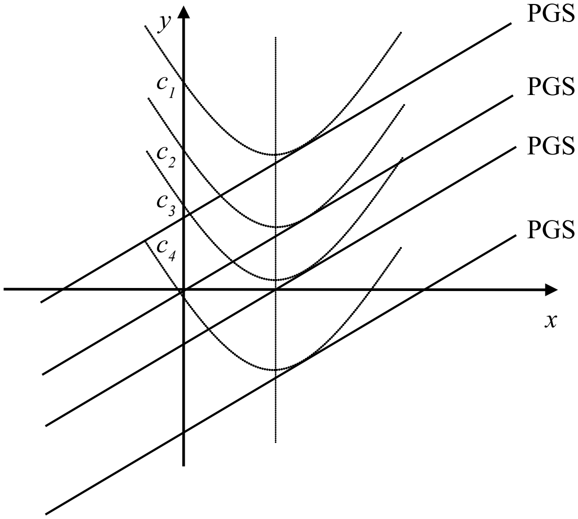
Dengan mengingat konsep gradien suatu garis singung dengan turunan bahwa

gradien adalah turunan pertama fungsi tersebut maka $m = \frac{dy}{dx} = 2x - 4$.

Berdasarkan Definisi 12.1 maka y adalah antiturunan dari gradien $\frac{dy}{dx} = 2x - 4$ sehingga dengan konsep turunan maka $y = x^2 - 4x + c$ dengan c adalah konstanta bernilai real.

Dengan c adalah konstanta bernilai real maka terdapat banyak fungsi $y = f(x)$ yang memenuhi gradien garis singgung tersebut.

Perhatikan gambar berikut!



Gambar 12.4 Persamaan garis singgung dan fungsi f(x)

Pada Gambar 12.4 terdapat banyak persamaan garis singgung yang sejajar. Ingat kembali definisi persamaan garis yang sejajar. Dengan demikian, terdapat juga banyak fungsi (kurva) yang disinggung oleh garis singgung tersebut.

Minta siswa mengamati gambar berikut. Minta siswa mengaitkan gambar tersebut dengan permasalahan pada soal tersebut. Minta salah satu siswa untuk memberikan komentar dan pendapatnya tentang gambar di samping. Arahkan siswa mengaitkan gambar di samping dengan konsep persamaan garis lurus, konsep persamaan garis singgung dalam turunan, serta konsep translasi pada transformasi. Arahkan proses belajar ke sesi tanya jawab antara siswa dengan siswa, guru sebagai fasilitator dan penengah bila ada pendapat yang berlawanan atau keluar dari kebenaran konsep

Uji Kompetensi 12.1

1. Tentukan antiturunan dari

a. $f(x) = 2x$	e. $f(x) = 6x$
b. $f(x) = 3x$	f. $f(x) = 7x$
c. $f(x) = 4x$	g. $f(x) = 8x$
d. $f(x) = 4x$	h. $f(x) = 9x$

Untuk melihat tingkat pemahamanan siswa akan hubungan antara turunan dan antiturunan, ajukan Uji Kompetensi 12.1 sebagai tugas pribadi. Soal ini, dapat diberikan sebagai tugas rumah. Guru sebaiknya memberikan soal tambahan.

2. Tentukan antiturunan dari fungsi f(x) berikut!

a. $f(x) = 2x^2$
b. $f(x) = 2x^3$
c. $f(x) = 3x^2$
d. $f(x) = 3x^3$
e. $f(x) = 4x^2$
f. $f(x) = 4x^3$
g. $f(x) = ax^n$

3. Tentukan antiturunan dari

a. $f(x) = x^{-2}$
b. $f(x) = 2x^{-3}$
c. $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$
d. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$
e. $f(x) = 5x^{-\frac{1}{3}}$
f. $f(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}$
g. $f(x) = 100x^{-\frac{1}{4}}$
h. $f(x) = \frac{a}{b}x^{n-1}$ dengan a, b bilangan real, $b \neq 0$, n rasional.

4. Tentukan antiturunan $f(x)$ dengan memanfaatkan turunan fungsi $g(x)$ dibawah ini!

a. Jika $f(x) = 8x^3 + 4x$ dan $g(x) = x^4 + x^2$
b. Jika $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x\sqrt{x}$
c. Jika $f(x) = (x + 2)^3$ dan $g(x) = (x + 2)^4$

5. Jika gradien m suatu persamaan garis singgung terhadap fungsi $f(x)$ memenuhi $m = x^2 - 1$. Tunjukkan dengan gambar bahwa terdapat banyak fungsi $f(x)$ yang memenuhi gradien tersebut.

2. Notasi Integral dan Rumus Dasar Integral Tak Tentu

2.1 Notasi Integral

Kita telah banyak membahas tentang turunan dan antiturunan serta hubungannya pada beberapa fungsi yang sederhana pada sub-bab di atas. Pada kesempatan ini, kita akan menggunakan sebuah notasi operator antiturunan tersebut. Antiturunan dari sebuah fungsi $f(x)$ ditulis dengan menggunakan notasi "∫" (baca: integral).

Perhatikan kembali Masalah 12.2. Alternatif penyelesaian di atas, dapat kita tuliskan kembali dengan menggunakan notasi integral tersebut.

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ Adalah $F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4\right] = x^3$

sehingga diperoleh

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$$

b) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4$ adalah $F'(x)=f(x)=y'=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 + 4\right]=x^3$

sehingga diperoleh

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$$

c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8$ adalah $F'(x)=f(x)=y'=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 - 8\right]=x^3$

sehingga diperoleh

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$$

Setelah siswa memahami bahwa antiturunan adalah balikan dari turunan.

Perkenalkan kepada siswa notasi integral sebagai pengganti antiturunan yang lazim dipakai.

Pandu siswa menggunakan notasi integral pada contoh soal pada Masalah 12.2.
Ingatkan siswa tentang notasi differensial dy/dx
Minta siswa untuk mengamati setiap fungsi yang dihasilkan oleh masing-masing integrasi di atas. Tanya siswa, kenapa hasil integral menjadi F(x) + c

Berikan soal pada Contoh 12.2 untuk dikerjakan siswa terlebih dahulu. Berikan soal yang lain kepada siswa untuk dikerjakan. Minta siswa membuat fungsi yang lain dan mengintegralkan fungsi yang mereka buat masing-masing.

Contoh 12.2

Jika $y = 3x^4 + 2x^3$, carilah nilai $\frac{dy}{dx}$, kemudian tentukan $\int 4x^3 + 2x^2 dx$.

Alternatif Penyelesaian:

Jika $y = 3x^4 + 2x^3$ maka $\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 6x^2$ sehingga diperoleh

$$\int 12x^3 + 6x^2 dx = 3x^4 + 2x^3 + c$$

$$\int 3(4x^3 + 2x^2) dx = 3x^4 + 2x^3 + c$$

$$3\int 4x^3 + 2x^2 dx = 3x^4 + 2x^3 + c$$

$$\int 4x^3 + 2x^2 dx = x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$$

Pandu siswa untuk menemukan aturan dari integral tak tentu. Tanya siswa, kenapa integral disebut tak tentu? Berikan kesempatan kepada siswa untuk memberikan komentar atau pendapatnya.

2.2 Rumus Dasar Integral Tak Tentu

Berdasarkan pengamatan pada beberapa contoh di atas, jika semua fungsi yang hanya dibedakan oleh nilai konstantanya diturunkan maka akan menghasilkan fungsi turunan yang sama sehingga bila diintegralkan akan mengembalikan fungsi turunan tersebut ke fungsi semula tetapi dengan konstanta c. Nilai konstanta c disebut tak tentu karena dapat digantikan oleh semua bilangan. Nilai konstanta c akan dapat ditentukan bila diketahui titik yang dilalui oleh fungsi asal tersebut. Titik asal (*initial value*) dapat disubstitusi ke fungsi hasil antiturunan sehingga nilai c dapat ditentukan.

Arahkan siswa memahami Sifat 12.3 dan minta siswa membuat contoh sesuai dengan Sifat 12.3 tersebut.

Sifat 12.3

Jika $F(x)$ adalah fungsi dengan $F'(x)$ maka $\int f(x)dx = F(x) + c$

Dengan c sembarang konstanta

Masalah-12.3

Pada konsep turunan, kita dapat memperoleh aturan turunan dengan menggunakan konsep limit fungsi sehingga proses penurunan sebuah fungsi dapat dilakukan dengan lebih sederhana dan cepat. Bagaimana dengan konsep integral suatu fungsi? Adakah aturan yang dapat dimiliki agar proses integrasi suatu fungsi atau mengembalikan fungsi turunan ke fungsi semula dapat dilakukan dengan cepat?

Ajukan Masalah 12.3 kepada siswa. Ingatkan siswa bagaimana proses menemukan aturan turunan dengan pengamatan pada soal-soal dan menemukan pola. Minta siswa melakukan hal yang sama pada konsep integral. Dengan mengingat proses penemuan pola turunan fungsi, pandu siswa untuk menemukan penemuan proses integrasi.

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menjawab permasalahan ini, kita akan melakukan beberapa pengamatan pada beberapa contoh turunan dan antiturunan suatu fungsi yang sederhana. Kamu diminta mengamati dan menemukan pola dari proses antiturunan fungsi tersebut. Perhatikan Tabel 12.1

Tabel 12.1 Pola hubungan turunan dan antiturunan fungsi $y = ax^n$

Turunan Fungsi ($f(x)$)	Antiturunan Fungsi ($F(x)$)	Pola
1	x	$1x^0 = \frac{1}{1}x^1 = \frac{1}{0+1}x^{0+1}$
$2x$	x^2	$2x^1 = \frac{2}{2}x^2 = \frac{2}{1+1}x^{1+1}$
$3x^2$	x^3	$3x^1 = \frac{3}{3}x^3 = \frac{3}{2+1}x^{2+1}$
$8x^3$	$2x^4$	$8x^3 = \frac{8}{4}x^3 = \frac{8}{3+1}x^{3+1}$
$25x^4$	$5x^5$	$25x^4 = \frac{25}{5}x^5 = \frac{25}{4+1}x^{4+1}$

Minta siswa mengamati turunan dan antiturunan setiap fungsi pada kolom 1 dan kolom 2. Pandu siswa mengamati pola menemukan antiturunan fungsi jika turunan (kolom 1) diketahui. Pandu siswa membentuk pola dan menarik kesimpulan secara umum. Bila pola telah ditemukan, pandu siswa membentuk aturan antiturunan fungsi pada baris terakhir pada Tabel 12.1 sehingga tanda "?" dapat dijawab.

Turunan Fungsi ($f(x)$)	Antiturunan Fungsi ($F(x)$)	Pola
...	...	...
anx^{n-1}	ax^n	$anx^{n-1} = \frac{a}{1}x^n = \frac{an}{(n-1)+1}x^{(n-1)+1}$
ax^n	?	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$

Dari pengamatan pada tabel tersebut, kita melihat sebuah aturan integrasi atau pola anti turunan dari turunannya yaitu $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$.

Jika siswa telah menemukan aturan antiturunan pada tabel 12.1, minta siswa memperdalam pemahaman dengan melihat pembuktian contoh yang lebih banyak.

Arahkan siswa melakukan Kegiatan 12.1 secara pribadi atau berkelompok dengan 2 orang. Minta siswa mempelajari kembali Tabel 12.1 dan melakukan hal yang sama pada Tabel 12.2.

Agar kamu dapat melihat kebenaran pola ini, kamu harus memperlihatkan lebih banyak contoh yang melahirkan aturan tersebut seperti pada Tabel 12.1. Kamu lakukan kembali proses yang dilakukan pada Tabel 12.1 pada kegiatan berikut.

Kegiatan 12.1

Tentukanlah turunan dan antiturunan fungsi-fungsi yang diberikan pada tabel berikut seperti yang dilakukan pada Tabel 12.1

Tabel 12.2 Pola hubungan turunan dan antiturunan beberapa fungsi F(x)

Turunan Fungsi ($f(x)$)	Antiturunan Fungsi ($F(x)$)	Pola
...	x^{10}	...
...	x^{-2}	...

Turunan Fungsi ($f(x)$)	Antiturunan Fungsi ($F(x)$)	Pola
...	$-3x^{-12}$	...
...	$-3x^5 + 4x^{-5}$	...
...	$0{,}5x^{0{,}5} - 1{,}25x^{1{,}5} + 2{,}5x^{-1{,}5}$	...
...	$2x^{\frac{1}{3}}$	...
	$\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}$	
	$\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{2}}$	
...	$2x^{-1}$	...
...	$0{,}55x^{-1}$	...
...	$\frac{3}{2}x^{-1}$	...

Dari hasil pengamatanmu pada Tabel 12.2, dapatkah kamu tentukan syarat n pada $y = ax^n$ agar pola integrasi tersebut berlaku secara umum? Apa yang kamu peroleh pada tiga baris terakhir pada Tabel 12.2? Tariklah sebuah kesimpulan dari hasil pengamatanmu.

Dengan adanya aturan tersebut, proses penyelesaian soal pada Contoh 12.2 dapat lebih sederhana. Kamu amati kembali proses penyelesaian contoh tersebut pada Contoh 12.3 berikut tanpa melihat fungsi asalnya.

Minta siswa mengamati pola yang ditemukan pada Tabel 12.2 dan menghubungkannya dengan pola pada Tabel 12.1. Tanya siswa, apakah ada masalah yang ditemukan pada Tabel 12.2 dan bagaimana mengatasi masalah tersebut?

Ajukan Contoh 12.3 untuk dikerjakan siswa dengan memanfaatkan aturan integrasi yang telah diperoleh. Minta siswa membandingkan jawaban dan proses penyelesaian dengan hasil integasi pada Contoh 12.2

Contoh 12.3

Tentukan nilai $\int 4x^3 + 2x^2 dx$.

Alternatif Penyelesaian:

$$\int 4x^3 + 2x^2 dx = \frac{4}{3+1}x^{3+1} + \frac{2}{2+1}x^{2+1} + c$$

$$= \frac{4}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$$

$$= x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$$

Jadi, dengan menggunakan aturan tersebut, kita tidak perlu mengetahui terlebih dahulu fungsi awalnya, tetapi cukup diketahui fungsi turunannya. Dengan demikian jika

$F'(x) = 4x^3 + 2x^2$, maka $F(x) = x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \mathrm{c}$

$F(x) = x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \mathrm{c}$

Tanya siswa, apa yang dimaksud dengan titik awal?
Minta siswa menjelaskan pendapatnya. Guru membantu memberikan penjelasan.
Untuk memperdalam pemahaman tentang nilai awal (initial value), ajukan soal pada Contoh 12.4 kepada siswa. Pandu siswa dalam proses penyelesaian contoh di samping.

Berdasarkan konsep yang telah kita peroleh pada subbab di atas, setiap hasil integrasi suatu fungsi menghasilkan fungsi dengan konstanta c, bukan? Konstanta c dapat ditentukan nilainya jika diketahui titik awal (*initial value*) yang dilalui fungsi asal tersebut. Perhatikan contoh berikut!

Contoh 12.4

Jika fungsi $F(x) = \int 3x^3 + 2x^2 - x + 1dx$ melalui titik $A(1, -\frac{1}{12})$ maka tentukanlah nilai $F(x)$

Alternatif Penyelesaian:

$$F(x) = \int 3x^3 + 2x^2 - x + 1dx$$

$$F(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

Jika fungsi melalui titik $A(1, -\frac{1}{12})$ artinya $F(1) = -\frac{1}{12}$ sehingga diperoleh:

$$F(1) = \frac{3}{4}1^4 + \frac{2}{3}1^3 - \frac{1}{2}1^2 + 1 + c = -\frac{1}{12}$$

$\frac{23}{12} + c = -\frac{1}{12}$ atau $c = -2$.

Jadi, Fungsi tersebut adalah

$$F(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2$$

Dengan demikian, berdasarkan pengamatan pada tabel di atas, kita menarik sebuah kesimpulan akan aturan sebuah integrasi, sebagai berikut:

Arahkan siswa memahami Sifat 12.4.
Tanya siswa, kenapa n harus bilangan rasional? Tanya siswa, kenapa n ≠ – 1? Seandainya n = 1, apa yang terjadi pada hasil integral dan apa solusi atas masalah ini?

Sifat 12.4

Untuk n bilangan rasional dengan $n \neq -1$, dan a, c adalah bilangan real maka berlaku aturan:

a. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

b. $\int ax^n \, dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$

Ajukan soal pada Contoh 12.5 kepada siswa untuk dikerjakan secara pribadi kembali. Guru merancang soal yang lain untuk dikerjakan oleh siswa.

Contoh 12.5

Hitunglah integral berikut!

a. $\int 4x^3\, dx$

b. $\int \frac{1}{x^2}\, dx$

c. $\int \sqrt{x^3}\, dx$

d. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx$

Alternatif Penyelesaian:

a. $\int 4x^3\, dx = \frac{4}{3+1} x^{3+1} + c$

$= x^4 + c$

b. $\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx$

$= \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + c$

$= -x^{-1} + c$

$= -\frac{1}{x} + c$

c. $\int \sqrt{x^3}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}}\, dx$

$= \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1}$

$= \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}}$

$= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + c$

d. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx$

$$= \frac{1}{-\frac{3}{2}+1} x^{-\frac{3}{2}+1}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$$

Sifat 12.5

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan dua fungsi yang dapat diintegralkan dan c, k bilangan real, maka:

1. $\int dx = x + c$
2. $\int k\,dx = kx + c$
3. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
4. $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$
5. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
6. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Arahkan siswa memahami Sifat 12.5. Minta siswa membuat contoh terkait dengan aturan-aturan pada sifat di samping.

Ajukan soal pada Contoh 12.6 kepada siswa. Minta siswa meunjukkan sifat – sifat yang dipakai pada setiap proses penyelesaian pada masing – masing soal.

Contoh 12.6

Tentukanlah hasil dari

a. $\int 2x^4\sqrt{x^3}\,dx$

b. $\int (x+1)^2\,dx$

c. $\int \left(\dfrac{x^3-2x}{\sqrt{x}}\right)dx$

Alternatif Penyelesaian:

a. $$\begin{aligned}\int 2x^4\sqrt{x^3}\,dx &= \int 2x^4.x^{\frac{3}{2}}\,dx\\ &= 2\int x^4.x^{\frac{3}{2}}\,dx\\ &= 2\int x^{4+\frac{3}{2}}\,dx\\ &= 2\int x^{\frac{11}{2}}\,dx\\ &= 2\left[\frac{1}{\frac{11}{2}+1}x^{\frac{11}{2}+1}+c\right]\\ &= 2\left[\frac{1}{\frac{13}{2}}x^{\frac{13}{2}}+c\right]\\ &= \frac{4}{13}x^{\frac{13}{2}}+c\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}\int (x+1)^2\,dx &= \int x^2+2x+1\,dx\\ &= \frac{1}{2+1}x^{2+1}+\frac{2}{1+1}x^{1+1}+x+c\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + c$$

c. $$\int \left(\frac{x^3 - 2x}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(\frac{x^3}{\sqrt{x}} - \frac{2x}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \int \left(x^3.x^{-\frac{1}{2}} - 2x.x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{2}+1} x^{\frac{5}{2}+1} - \frac{2}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{1}{\frac{7}{2}} x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{7} x^3\sqrt{x} - \frac{4}{3} x\sqrt{x} + c$$

Contoh 12.7

Diketahui biaya marginal (M_C) dalam memproduksi suatu barang (Q) setiap bulan adalah merupakan fungsi biaya terhadap banyak produksi barang dengan $M_C = \frac{dC}{dQ} = \frac{2Q+6}{3}$. Tentukan fungsi biaya total C dalam satu bulan!

Pandu siswa memahami Contoh 12.7.
Tanya siswa, contoh soal di samping aplikatif ke bidang apa?
Beri tugas kepada siswa untuk mencari informasi atau penjelasan tentang biaya marginal!

dimana:

Q = banyak produksi (*Quantity*)

C = Biaya produksi total (*Total Cost*)

MC = Biaya marginal (*Marginal Cost*)

Pandu siswa untuk memahami proses integrasi.

Alternatif Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
C(Q) &= \int \left(\frac{2Q+6}{3}\right) dQ \\
&= \int \frac{2}{3}(Q+3) dQ \\
&= \frac{2}{3}\int Q + 3\, dQ \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}Q^2 + 3Q + c\right) \\
&= \frac{1}{3}Q^2 + 2Q + c
\end{aligned}
$$

Ajukan Contoh 12.8 kepada siswa sebagai bentuk variasi soal. Tanya siswa, kenapa soal di samping disebut dengan persamaan differensial.

Contoh 12.8

Tentukan fungsi $y = F(x)$ dari persamaan diferensial $\frac{x^2 dy}{dx} = -y^2\sqrt{x}$ dengan $y = 1$ di $x = 1$

Pandu siswa menyelesaikan langkah perlangkah.
Pada Langkah 1, ingatkan siswa konsep eksponen.

Alternatif Penyelesaian:

Langkah 1. Ubah bentuk persamaan diferensial tersebut menjadi:

$$\frac{x^2 dy}{dx} = -y^2\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = -\frac{\sqrt{x}}{x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow y^{-2}dy = x^{-\frac{3}{2}}dx \text{ (ingat sifat eksponen)}$$

Lankah 2. Dengan mengintegralkan kedua ruas diperoleh:

$$\Leftrightarrow \int y^{-2}dy = \int x^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{-2+1}y^{-2+1} = \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1} + c$$

$$\Leftrightarrow -y^{-1} = -2x^{-\frac{1}{2}} + c$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$$

Langkah 3. Dengan mensubstitusi titik awal ke $-\frac{1}{y} = \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$

Karena $y = 1$ di $x = 1$ maka $-\frac{1}{1} = \frac{-2}{\sqrt{1}} + c$ atau $c = 1$. Jadi, fungsi tersebut adalah $-\frac{1}{y} = \frac{-2}{\sqrt{x}} + 1$ atau $y = \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$.

Pandu siswa menggunakan konsep integral di kedua ruas. Tanya siswa, bagaimana jika penambahan konstanta berbeda terjadi di masing-masing integral (ruas kiri dan kanan), apakah hasil masih sama dengan hasil di samping?

Pandu siswa mensubstitusi titik awal ke fungsi yang telah ditemukan pada Langkah 2. Ingatkan siswa konsep relasi dan fungsi.

Sifat 12.6

Misalkan $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ adalah fungsi yang dapat diintegralkan. Integral tak tentu hasil penjumlahan dua fungsi atau lebih sama dengan integral tak tentu dari masing-masing fungsi, yaitu:

$$\int (f_1(x) + \ldots + f_n(x))dx = \int f_1(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

Minta siswa untuk memahami Sifat 12.6. Minta siswa mengaitkan sifat ini dengan Sifat 12.5(5) dan Sifat12.5(6).

Contoh 12.9

Tentukan nilai dari $\int (3x^6 - 2x^2 + 1)dx$

Pandu siswa menyelesaikan Contoh 12.9. Minta siswa menunjukkan Sifat 12.6 pada contoh. Tanya siswa, bagaimana jika setiap proses integral pada *masing – masing suku ditambahkan konstanta c yang berbeda, apakah masih sama dengan jawaban di samping? Pandu siswa menyelesaikan Contoh 12.10. Minta siswa menentukan nilai tak tentu c dengan mensubstitusikan titik awal yang diketahui.*

Alternatif Penyelesaian:

$$\int\left(3x^6 - 2x^2 + 1\right)dx = 3\int 3x^6 dx - 2\int x^2 dx + \int 1 dx$$
$$= \frac{3}{7}x^7 - \frac{2}{3}x^3 + x + C$$

Contoh 12.10

Carilah nilai $f(x)$ jika $f'(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ dan $f(0) = 1$

Alternatif Penyelesaian:

$f'(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ maka $f(x) = \int x^3 - 4x^2 + 3\,dx$

$f(x) = \int x^3 - 4x^2 + 3\,dx$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x + c$, karena $f(0) = 1$

$\Rightarrow f(0) = 0 - 0 + 0 + c = 1$, berarti $c = 1$ sehingga

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x + 1$$

Untuk melihat pemahaman siswa terkait proses integrasi pada Contoh 12.10, ajukan contoh berikut untuk dikerjakan!

Soal

Fungsi $f(x)$, $f'(x)$, dan $f''(x)$ adalah turunan pertama, kedua dan ketiga suatu fungsi $f(x)$ serta memenuhi $f'''(x) = \int f''(x)dx$, $f''(x) = \int f'(x)dx$.

Jika $f'''(x) = 60x^2 - 18$ dan $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$.

Tentukan fungsi $f(x)$?

Pandu siswa memahami proses bertahap pada alternatif penyelesaian. Tanya siswa, mengapa proses penyelesaian dilakukan secara bertahap?

Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan aturan tersebut di atas maka:

$$f''(x) = \int 60x^2 - 18dx$$

$$f''(x) = 20x^3 - 18x + c$$

Dengan nilai awal $f''(1)=0$ maka $f''(1)=20-18+c=0$

sehingga $c = -2$. Jadi, $f''(x)=20x^3-18x-2$.

Berdasarkan aturan tersebut di atas kembali maka:

$$f'(x)=\int 20x^3-18x-2dx$$

$$f'(x)=5x^4-9x^2-2x+d$$

Dengan nilai awal $f'(1)=0$ maka $f'(1)=5-9-2+d=0$

sehingga $d = 6$. Jadi, $f'(x)=5x^4-9x^2-2x+6$.

Berdasarkan aturan integral, diperoleh:

$$f(x)=\int 5x^4-9x^2-2x+6dx$$

$$f(x)=x^5-3x^3-x^2+6x+e$$

Dengan nilai awal $f(1)=0$ maka $f(1)=1-3-1+6+e=0$

sehingga $e = -3$. Jadi, $f(x)=x^5-3x^3-x^2+6x-3$.

Contoh 12.11

Tentukanlah integral dari fungsi-fungsi berikut!

a. $F(x) = (x + 2)^4$
b. $F(x) = (2x - 3)^5$
c. $F(x) = (3x - 2)^6$
d. $F(x)=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+...+\frac{1}{n!}x^n$
e. $F(x) = (ax + b)^n$

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menyelesaian contoh soal berikut, kita harus menjabarkan atau dengan menggunakan Binomial Newton. Untuk itu, ingat kembali prinsip Binomial Newton pada Bab 8.

Minta siswa mengerjakan soal pada Contoh 12.11. Arahkan siswa untuk mengintegralkan fungsi dengan menjabarkan fungsi tersebut terlebih dahulu.
Ingatkan siswa kembali definisi perpangkatan dan Binomial Newton untuk menjabarkan masing – masing fungsi.

Soal – soal yang diberikan untuk dikerjakan siswa telah diselesaikan di samping. Arahkan *siswa untuk menemukan penyelesaian soal – soal tersebut.*

a. $F(x) = (x + 2)^4 = (x + 2)(x + 2)(x + 2)(x + 2)$ sehingga diperoleh

$F(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

$$\int F(x)dx = \int x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16dx$$

(dengan menggunakan Sifat 12.6)

$$\int F(x)dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 + \frac{32}{2}x^2 + 16x + c$$

$$\int F(x)dx = \frac{1}{5}x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 16x + c$$

(Dengan Binomial Newton)

$F(x) = (s + 2)^4$

$$F(x) = C_0^4(x)^4(2)^0 + C_1^4(x)^3(2)^1 + C_2^4(x)^2(2)^2 + C_3^4(x)^1(2)^3 + C_4^4(x)^0(2)^4$$

$F(x) = (1)(1)x^4 + (4)(2)x^3 + (6)(4)x^2 + (4)(8)x + (1)(16)$

$F(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

$$\int F(x)dx = \int x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16dx \text{ (Sifat 12.6)}$$

$$\int F(x)dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 + \frac{32}{2}x^2 + 16x + c$$

$$\int F(x)dx = \frac{1}{5}x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 16x + c$$

b. Coba kerjakan dengan menjabarkan berdasarkan definisi perpangkatan dan dengan menggunakan Bonomial Newton (diserahkan kepada siswa)

Silahkan didiskusikan penyelesaian pada bagian b.

c. Dengan menggunakan Binomial Newton maka diperoleh:

$F(x) = (3x – 2)^6$

$$F(x) = C_0^6(3x)^6(-2)^0 + C_1^6(3x)^5(-2)^1 + C_2^6(3x)^4(-2)^2 + C_3^6(3x)^3(-2)^3 + C_4^6(3x)^2(-2)^4 + C_5^6(3x)^1(-2)^5 + C_6^6(3x)^0(-2)^6$$

$$F(x) = (1)(729)(1)x^6 + (6)(243)(-2)x^5 + (15)(81)(4)x^4 + (20)(27)(-8)x^3 + (15)(9)(16)x^2 + (6)(3)(-32)x + (1)(1)(64)$$

$$F(x) = 729x^6 - 2916x^5 + 4860x^4 - 4320x^3 + 2160x^2 - 576x + 64$$

sehingga dengan menggunakan Sifat 12.6

$$\int F(x)dx = \int 729x^6 - 2916x^5 + 4860x^4 - 4320x^3 + 2160x^2 - 576x + 64dx$$

$$\int F(x)dx = \frac{729}{7}x^7 - \frac{2916}{6}x^6 + \frac{4860}{5}x^5 - \frac{4320}{4}x^4 + \frac{2160}{3}x^3 - \frac{576}{2}x^2 + 64x + c$$

$$\int F(x)dx = \frac{729}{7}x^7 - 486x^6 + 972x^5 - 1080x^4 + 720x^3 - 288x^2 + 64x + c$$

d. Dengan menggunakan Sifat 12.6.

$$\int F(x)dx = \int \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n dx$$

$$\int F(x)dx = \frac{1}{1.0!}x + \frac{1}{2.1!}x^2 + \frac{1}{3.2!}x^3 + \frac{1}{4.3!}x^4 + \frac{1}{5.4!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(n+1)n!}x^{n+1}$$

$$\int F(x)dx = \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots +$$

$$\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$$

e. Dengan menggunakan Binomial Newton.

$(ax+b)^n$

$$= C_0^n(ax)^n(b)^0 + C_1^n(ax)^{n-1}(b)^1 + \ldots + C_{n-1}^n(ax)^1(b)^{n-1} + C_n^n(ax)^0(b)^n$$

sehingga

$\int (ax+b)^n dx$

$$= \int C_0^n(ax)^n(b)^0 + C_1^n(ax)^{n-1}(b)^1 + \ldots + C_{n-1}^n(ax)^1(b)^{n-1} + C_n^n(ax)^0(b)^n dx$$

$$= \int C_0^n(ax)^n(b)^0 dx + \int C_1^n(ax)^{n-1}(b)^1 dx + \ldots + \int C_{n-1}^n(ax)^1(b)^{n-1} dx + \int C_n^n(ax)^0(b)^n dx$$

$$= \frac{a^n C_0^n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a^{n-1}bC_1^n}{n}x^n + \ldots + \frac{ab^{n-1}C_{n-1}^n}{2}x^2 + \frac{b^n C_n^n}{1}x + c$$

Ajukan Masalah 12.4 kepada siswa. Ingatkan siswa tentang aplikasi konsep turunan terkait kecepatan dan percepatan. Pandu siswa menunjukkan pemanfaatan antiturunan pada permasalahan kecepatan dan percepatan.

Masalah-12.4

Konsep antiturunan atau integral banyak berperan dalam menyelesaikan permasalahan di bidang Fisika. Pada bidang ini juga banyak diperankan oleh konsep Turunan, contohnya adalah permasalahan kecepatan dan percepatan. Dengan mengingat integral adalah balikan dari turunan, maka dapatkah kamu temukan hubungan konsep turunan dan integral dalam permasalahan kecepatan dan percepatan? Coba kamu tunjukkan peran integrasi pada hubungan besaran tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

Kita ingat kembali konsep yang telah diuraikan pada pelajaran Turunan pada bab sebelumnya.

Pergerakan sebuah objek yang semakin menjauhi ataupun semakin mendekati berarti ada terjadi perubahan pergerakan pada lintasan, sehingga kecepatan adalah laju perubahan dari lintasan terhadap perubahan waktu, yaitu:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \text{ atau } v(t) = s'(t) \text{ sehingga } s(t) = \int v(t)dt$$

Pergerakan dipercepat atau diperlambat berhubungan dengan kecepatan objek tersebut, yaitu terjadi perubahan kecepatan kendaraan. Percepatan adalah laju perubahan kecepatan terhadap perubahan waktu, yaitu:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \text{ atau } a(t) = v'(t) = s''(t) \text{ sehingga } v(t) = \int a(t)dt$$

dimana:

t = waktu

s(t) = fungsi lintasan

v(t) = fungsi kecepatan

a(t) = fungsi percepatan

Minta siswa mengingat kembali konsep turunan terkait jarak linasan, kecepatan dan percepatan pada bab sebelumnya. Pandu siswa menentukan konsep antiturunan dalam fungsi jarak, kecepatan dan percepatan. Pandu siswa memahami aturan yang diperoleh dengan pemahaman pada operasi antiturunan pada turunan masing – masing besaran.

Contoh 12.12

Sebuah partikel diamati pada interval waktu tertentu dan diperoleh data bahwa fungsi percepatan memenuhi pola dengan fungsi $a(t) = -2t^2 + 3t + 1$. Tentukan fungsi lintasan partikel tersebut?

Untuk memahami konsep antiturunan pada masalah terkait fungsi jarak, kecepatan dan percepatan, ajukan Contoh 12.12 untuk dikerjakan siswa terlebih dahulu.

Minta siswa memberi komentar terkait setiap fungsi yang diperoleh setelah diintegralkan. Minta siswa mensketsa masing – masing fungsi dengan bantuan beberapa titik.

Alternatif Penyelesaian:

Dengan menggunakan konsep di atas maka:

$$v(t) = \int a(t)dt \text{ atau } v(t) = \int -2t^2 + 3t + 1dt$$

$$v(t) = -\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t + c$$

kemudian

$$s(t) = \int v(t)dt \text{ atau } s(t) = \int -\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t + cdt$$

$$s(t) = \frac{-\frac{2}{3}}{4}t^4 + \frac{\frac{3}{2}}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + ct + d$$

$$s(t) = -\frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + ct + d$$

Untuk melihat tingkat pemahamanan siswa akan hubungan konsep integral dan aplikasinya, ajukan Uji Kompetensi 12.2 sebagai tugas pribadi. Soal ini, dapat diberikan sebagai tugas rumah. Guru baiknya memberikan soal tambahan.

Uji Kompetensi 12.2

1. Selesaikanlah!

   a. Jika $y = x^8$, carilah $\frac{dy}{dx}$ kemudian tentukan $\int x^7\, dx$ dan tentukan $\int 2x^7 dx$

   b. Jika $y = x^{\frac{1}{2}}$, carilah $\frac{dy}{dx}$ kemudian tentukan nilai $\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$ dan tentukan $\int 2x^{\frac{1}{2}}\, dx$

   c. Jika $y = 4x^4 - 2x^2$, carilah nilai $\frac{dy}{dx}$ kemudian tentukan $\int \left(16x^3 - 4x\right)dx$

   d. Jika $y = (3x+1)^4$, carilah nilai $\frac{dy}{dx}$ kemudian tentukan $\int (3x+1)^3 dx$

e. Jika $y=\sqrt{1-4x}$, carilah nilai $\frac{dy}{dx}$ kemudian tentukan $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x}}\,dx$

2. Selesaikan integral berikut!

a. $\int 3x\,dx$

b. $\int 3x^3\,dx$

c. $\int 5x^4\,dx$

d. $\int -x^5\,dx$

e. $\int x^{10}\,dx$

f. $\int 28x^{27}\,dx$

g. $\int 20x^{59}\,dx$

h. $\int \frac{2}{x^{-4}}\,dx$

3. Tentukan nilai dari

a. $\int\left(x^2+\frac{3}{x}\right)dx$

b. $\int\left(\frac{1}{2x}+x^2-x\right)dx$

c. $\int\left(5x+\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{x}\right)dx$

4. Buktikan!

a. $\int[f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$

b. $\int[f(x)-g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx-\int g(x)\,dx$

Petunjuk: anggap $F(x)$ merupakan antiturunan dari $f(x)$ dan $G(x)$ merupakan antiturunan dari $g(x)$. selanjutnya carilah $\frac{d}{dx}\left(F(x)+G(x)\right)$ atau $\frac{d}{dx}\left(F(x)-G(x)\right)$

5. Tentukan nilai dari

a. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x}}\,dx$

b. $\int \frac{x^2-4x+10}{x^2\sqrt{x}}\,dx$

c. $\int (x+1)^3\,dx$

6. Selesaikanlah integral berikut!

a. $\int x\left(\sqrt{x}-1\right)dx$

b. $\int 2\left(\frac{1}{x}-x\right)dx$

c. $\int 3x\left(\frac{3}{x^2}-1\right)dx$

d. $\int \frac{x^9-3}{x^3}dx$

e. $\int \frac{x^2-3}{x^2}dx$

f. $\int \left(2x-\frac{3}{x}\right)^2 dx$

7. Tentukan nilai y jika

a. $\frac{dy}{dx}=10$

b. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{10}$

c. $\frac{dy}{dx}=2x^2-4$

d. $\frac{dy}{dx}=4x^3+3x^2$

e. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+2x-5}{x^2}$

f. $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}$

8. Carilah nilai $f(x)$ dan $f(1) = 1$ jika

a. $f'(x)=2x-1$

b. $f'(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$

9. Selesaikanlah persamaan-persamaan diferensial berikut:

a. $\frac{dy}{dx}=3x^2+4x-1$, $y = 5$ di $x = 2$

b. $\frac{dy}{dx}=\left(2x+1\right)^4$, $y = 6$ di $x = 0$

c. $\frac{dy}{dx}=-y^2\left(x^2+2\right)^2$, $y = 1$ di $x = 0$

10. Tentukan persamaan fungsi implisit $F(x, y) = 0$ yang melalui titik (2, – 1) dan gradien garis singgung di setiap titik (x, y), pada grafiknya ditentukan persamaan $y = \frac{x}{4y}, y \neq 0 \cdot$

11. Tentukan persamaan fungsi f, jika fungsi $y = f(x)$ terdefinisi untuk $x > 0$ yang melalui titik (4, 0) dan gradien garis singgungnya di setiap titik ditentukan oleh persamaan $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$.

12. Tentukan persamaan fungsi f jika grafik fungsi $y = f(x)$ melalui titik (1, 2) dan gradien garis singgung di setiap titiknya ditentukan oleh persamaan $y' = 1 - 16x^{-4}, x \neq 0$
.

13. Sebuah objek berjalan sepanjang suatu garis koordinat menurut percepatan a (dalam centimeter per detik) dengan kecepatan awal v_0 (dalam centimeter per detik) dan jarak s_0 (dalam centimeter). Tentukanlah kecepatan v beserta jarak berarah s setelah 2 detik.

    a. $a = t,\ v_0 = 2,\ s_0 = 0$

    b. $a = (1+t)^{-3},\ v_0 = 4,\ s_0 = 6$

    c. $a = \sqrt[3]{2t+1},\ v_0 = 0,\ s_0 = 10$

    d. $a = (1+t)^{-3},\ v_0 = 4,\ s_0 = 0$

Projek

Kumpulkanlah masalah tentang penerapan integral tak tentu dari fungsi aljabar dalam berbagai bidang maupun masalah nyata yang ada di sekitarmu. Ujilah sifat-sifat dan rumus dasar tentang integral tak tentu di dalam pemecahan masalah tersebut, kemudian buatlah laporan hasil karyamu untuk disajikan di depan kelas.

Minta siswa bekerja secara individu atau berkelompok untuk mengerjakan soal projek berikut dalam interval waktu kerja yang ditentukan guru. Minta siswa membuat laporan dan mempresentasikan *hasil kerja di depan kelas. Arahkan proses belajar dalam sesi tanya jawab. Guru menjadi fasilitator. Berikut adalah kesimpulan dari materi ini. Minta siswa memahami kesimpulan berikut.*

D. PENUTUP

Beberapa hal penting sebagai kesimpulan dari hasil pembahasan materi Integral, disajikan sebagai berikut:

1. Integral merupakan antiturunan, sehingga integral saling invers dengan turunan.
2. Jika $F(x)$ adalah sebuah fungsi dengan $F'(x) = f(x)$ dapat dikatakan bahwa
   a. Turunan dari $F(x)$ adalah $f(x)$ dan
   b. Antiturunan dari $f(x)$ adalah $F(x)$
3. Jika $F(x)$ adalah sebarang antiturunan dari $f(x)$ dan C adalah sebarang konstanta, maka $F(x) + C$ juga antiturunan dari $f(x)$.
4. Jika $F'(x) = f(x)$ maka $\int f(x)\,dx = F(x) + C$
5. Jika $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan dua fungsi yang dapat diintegralkan dan c, k bilangan real, serta n bilangan rasional dengan $n \neq -1$, maka:
   a. $\int dx = x + c$
   b. $\int k\,dx = kx + c$
   c. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
   d. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
   e. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
   f. $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

A. Petunjuk Pelaksanaan Penilaian

Setiap sub bab terdapat uji kompetensi yang berisi soal-soal atau penugasan projek, produk, unjuk kerja. Unsur-unsur penilaian dalam buku petunjuk guru adalah

1) Penilaian kompetensi pengetahuan

   Untuk menilai kompetensi pengetahuan yang dimiliki siswa, maka setiap akhir sub bab atau bab buku ini, guru sebaiknya menguji kemampuan siswa dengan memberikan tes atau non tes atau penugasan berupa soal-soal yang tersedia pada uji kompetensi yang tersedia pada setiap bab buku ini. Untuk penentuan skor yang diperoleh siswa, guru harus mengembangkan pedoman penskoran atau rubrik penilaian. Sebagai contoh teknik tes untuk dipedomani guru, disajikan sebagai berikut.

Contoh Teknik Tes

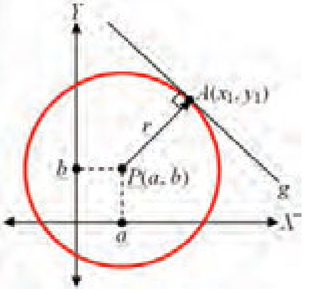
Satuan Pendidikan	:	SMA
Mata Pelajaran	:	Matematika
Kelas	:	XI
Kompetensi dasar	:	Merancang dan mengajukan masalah nyata terkait garis singgung lingkaran serta menyelesaikannya dengan melakukan manipulasi aljabar dan menerapkan berbagai konsep lingkaran.
Indikator	:	Siswa menemukan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik pada lingkaran yang berpusat di titik (a, b).
Materi	:	Lingkaran

Soal

Seorang anak tampak asyik bermain yoyo bersama teman-temannya yang lain. Mainan Yoyo tersebut dimainkan sambil sesekali berjalan dan bergesekan dengan lantai, kadang-kadang juga dengan lihainya anak-anak tersebut melemparkannya sambil sesekali berjalan dan bersinggungan dengan tembok.

Dari gambar di atas jelas terlihat bahwa dinding yang disinggung yoyo selalu menyinggung di titik $A(x_1, y_1)$. Garis di dinding yang dilalui yoyo dapat disebut garis singgung dan titik yang bersinggungan antara yoyo dan dinding disebut titik singgung. Perhatikan bahwa jari-jari yang melalui titik singgung $A(x_1, y_1)$ tegak lurus dengan dinding. Misalkan titik P adalah titik pusat lingkaran di (a, b). Berdasarkan keadaan di atas tentukanlah persamaan garis g tersebut!

Pedoman Penskoran

No	Kunci Jawaban	Skor
1.	Diketahui: titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Garis g melalui titik $A(x_1, y_1)$	1
2.	Ditanya: Persamaan garis g (garis singgung lingkaran)	1
3.	**Alternatif Penyelesaian** Mensketsa gambar permasalahan 	1
4.	Gradien garis PA adalah $m_{PA}=\dfrac{y_1-b}{x_1-a}$. Garis singgung g tegak lurus garis PA, sehingga gradien garis singgung g adalah $m_g=-\dfrac{1}{m_{PA}}=-\dfrac{x_1-a}{y_1-b}$	1 1

No	Kunci Jawaban	Skor
5.	Persamaan garis singgung g adalah $y - y_1 = m_g(x - x_1)$ $\Leftrightarrow\ y - y_1 = -\dfrac{x_1 - a}{y_1 - b}(x - x_1)$ $\Leftrightarrow\ (y - y_1)(y_1 - b) = -(x_1 - a)(x - x_1)$ $\Leftrightarrow\ yy_1 - yb - y_1^2 + y_1 b = -(x_1 x - x_1^2 - ax + ax_1)$ $\Leftrightarrow\ yy_1 - yb - y_1^2 + y_1 b = -x_1 x + x_1^2 + ax - ax_1$ $\Leftrightarrow\ xx_1 - xa + x_1 a + yy_1 - yb + y_1 b = x_1^2 + y_1^2$	1 1 1 1 1 1
6.	Karena $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, maka diperoleh $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$ $\Leftrightarrow\ x_1^2 - 2x_1 a + a^2 + y_1^2 - 2y_1 b + b^2 = r^2$ $\Leftrightarrow\ x_1^2 + y_1^2 = r^2 + 2x_1 a - a^2 + 2y_1 b - b^2$	1 1 1
7.	Substitusikan $x_1^2 + y_1^2 = r^2 + 2x_1 a - a^2 + 2y_1 b - b^2$ ke persamaan garis singgung di atas, diperoleh $xx_1 - xa + x_1 a + yy_1 - yb + y_1 b = r^2 + 2x_1 a - a^2 + 2y_1 b - b^2$ $\Leftrightarrow\ (xx_1 - xa - x_1 a + a^2) + (yy_1 - yb - y_1 b + b^2) = r^2$ $\Leftrightarrow\ (x-a)(x_1 - a) + (y-b)(y_1 - b) = r^2$	1 1 1

No	Kunci Jawaban	Skor
8.	**Kesimpulan:** Jadi, persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di titik $P(a, b)$ dan berjari-jari r yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ pada lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ adalah $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$	1
Skor maksimal		**18**

$$\text{Nilai} = \frac{\text{Skor Perolehan}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100$$

Contoh Penilaian Penugasan Produk

Satuan Pendidikan : SMA
Mata Pelajaran : Matematika
Kelas : XI
Kompetensi dasar : Menganalisis sifat-sifat transformasi geometri (translasi, refleksi garis, dilatasi dan rotasi) dengan pendekatan koordinat dan menerapkannya dalam menyelesaikan masalah.
Indikator : Siswa dapat membuat media sederhana untuk menjelaskan tentang sifat-sifat trnasformasi geometri.
Materi : Transformasi
Tugas

Rancanglah media dengan menggunakan bahan karton, benang, besi, atau tripleks, untuk menjelaskan tentang sifat-sifat transformasi geometri (translasi, rfleksi garis, dilatasi, dan rotasi) dengan pendekatan koordinat. kerjakan secara kelompok dengan waktu 2 minggu.

Rubrik Penilaian Produk

Kriteria	Skor
• Produk (hasil kerja) sesuai dengan konsep dan prinsip matematika; • Kerja kreatif; • Produk (hasil kerja) asli; • Diselesaikan tepat waktu; • Kerapian sangat baik.	4
• Produk (hasil kerja) sesuai dengan konsep dan prinsip matematika; • Kerja kurang kreatif; • Produk (hasil kerja) asli; • Diselesaikan tidak tepat waktu; • Kerapian cukup baik.	3
• Produk (hasil kerja) kurang sesuai dengan konsep dan prinsip matematika; • Kerja tidak kreatif; • Produk (hasil kerja) asli; • Diselesaikan tidak tepat waktu; • kerapian kurang baik.	2
• Produk (hasil kerja) sesuai dengan konsep dan prinsip matematika; • Kerja tidak kreatif; • Produk (hasil kerja) tidak asli; • Diselesaikan tidak tepat waktu; • Kerapian tidak baik, • Tidak ada laporan hasil kerja yang dapat disajikan di depan kelas.	1
Tidak melakukan tugas produk	0

Rubrik Tugas Produk

No.	Kriteria	Kelompok							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1.	Kesesuaian dengan konsep dan prinsip matematika								
2.	Kreatifitas								
3.	Keaslian produk								
4.	Ketepatan waktu								
5.	Kerapian								

2) Penilaian kompetensi keterampilan

Untuk mengetahui kompetensi keterampilan siswa, guru melakukan 3 teknik penilaian, yaitu: (1) tes unjuk kerja, (2) penilaian projek, (3) penilaian portofolio. Setiap akhir bab buku ini, guru harus melaksanaan salah satu dari tiga jenis penilaian tersebut untuk mengukur keterampilan matematik siswa. Di bagian ini diberi contoh penilaian unjuk kerja dan penilaian projek beserta rubrik penilaiannya yang dapat dipedomani guru.

Contoh Penilaian Unjuk Kerja

Satuan Pendidikan : SMA
Mata Pelajaran : Matematika
Kelas : X
Kompetensi dasar : 4.18 Menyajikan hasil penerapan konsep peluang untuk menjelaskan berbagai objek nyata melalui percobaan menggunakan frekuensi relatif.

Menyajikan objek kontekstual, menganalisis informasi terkait sifat-sifat objek dan menerapkan aturan transformasi geometri (refleksi, translasi, dilatasi, dan rotasi) dalam memecahkan masalah.

Indikator	:	Siswa dapat menentukan peluang kejadian dari berbagai situasi
Materi	:	Peluang

Tugas Unjuk Kerja

Rotasi Pusat $P(a, b)$
Perhatikan titik $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,3)$ dan $D(0,3)$ kemudian tentukan bayangannya jika dirotasikan sebesar –900 dengan pusat rotasi $P(7,3)$.

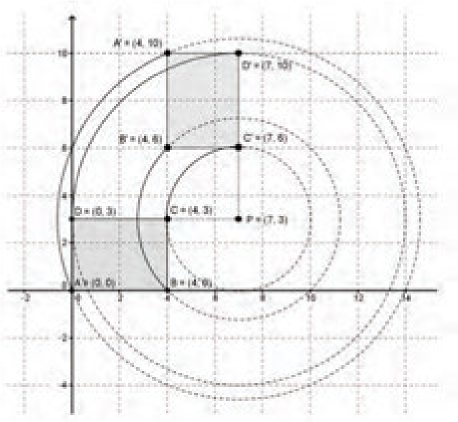
Rubrik Penilaian Unjuk kerja

Kriteria	Skor
Jawaban menunjukkan pengetahuan matematika mendasar yang berhubungan dengan tugas ini. Ciri-ciri: • Semua jawaban benar tetapi ada cara yang tidak sesuai atau ada satu jawaban salah. Sedikit kesalahan perhitungan dapat diterima	4
Jawaban menunjukkan pengetahuan matematika mendasar yang berhubungan dengan tugas ini. Ciri-ciri: • Semua jawaban benar tetapi ada cara yang tidak sesuai atau ada satu jawaban salah. Sedikit kesalahan perhitungan dapat diterima, atau • Salah satu bagian a atau kedua-duanya dijawab salah. Siswa tidak membuat diagram pohon tetapi jawaban lain benar. Sedikit kesalahan perhitungan dapat diterima, atau • Bagian a dijawab benar, tetapi bagian b atau c salah atau tidak dijawab tetapi metode yang digunakan sesuai.	3

Kriteria	Skor
Jawaban menunjukkan keterbatasan atau kurangnya pengetahuan matematika yang berhubungan dengan masalah ini. Ciri-ciri: • Dua bagian pertanyaan dijawab salah atau tidak selesai dikerjakan tetapi satu pertanyaan dijawab dengan tepat menggunakan prosedur yang benar • kerapian kurang baik.	2
Jawaban hanya menunjukkan sedikit atau sama sekali tidak ada pengetahuan matematika yang berhubungan dengan masalah ini. Ciri-ciri: • Semua jawaban salah, atau • Jawaban benar tetapi tidak ada bukti bahwa jawaban diperoleh melalui prosedur yang benar.	1
Tidak ada jawaban atau lembar kerja kosong	0

Unjuk Kerja Matematika

Siswa harus membuat gambar titik $A(0,0)$, $B(4,0)$, C(4,3) dan $D(0,3)$ kemudian dirotasikan sebesar –900 dengan pusat rotasi $P(7,3)$.



Siswa mungkin akan menyelesaikan permasalahan di atas dengan menggambarkannya atau menggunakan Dengan menggunakan konsep yang telah ditemukan. Misalkan titik $A(x,y)$ adalah sembarang titik yang dilalui oleh garis tersebut, sehingga:

$$A(x,y) \xrightarrow{R_{[P(a,b),\alpha^0]}} A'(x',y')$$

Sehingga

Untuk menentukan bayangan titik A Rotasi sejauh –900 dengan Pusat Rotasi P(7,3). Langkah-langkhanya adalah sebagai berikut.

Langkah 1. Translasi dengan T(–7, –3)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Langkah 2. Rotasi dengan sudut –900 dan pusat O(0,0)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Langkah 3. Translasi dengan P(1,-1)

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Jadi untuk titik A(0, 0) diperoleh bayangan A'(4, 10)

Dengan cara yang sama diperoleh bayangan dari titik B(4, 0), C(4, 3), dan D(0, 3) dan diperoleh tabel sebagai berikut.

Tabel 10.9 Koordinat titik dan bayangan titik oleh rotasi sejauh –900 dan pusat P(7,3)

Rotasi sejauh -900 dengan Pusat Rotasi P(7,3)			
Translasi P(7,3) = Titik Bayangan	**Rotasi –900 Pusat O(0,0)**	**Tranlasi T(-7,-3)**	**Titik Objek**
A(0,0)	A_1 (-7,-3)	A2 (-3,7)	(-3,7) + (7,3) = A’(4,10)
B(4,0)	B_1 (-3,-3)	B2 (-3,3)	(-3,3) + (7,3) = B’(4,6)
C(4,3)	C_1 (-3,0)	C2 (0,3)	(0,3) + (7,3) = C’(7,6)
D(0,3)	D_1 (-7,0)	D2 (0,7)	(0,7) + (7,3) = D’(7,10)

Berdasarkan rubrik yang sudah dibuat dapat dinilai tugas unjuk kerja yang dikerjakan siswa. Skor yang diperoleh masih harus diubah ke dalam skala angka yang ditetapkan. (Misal dalam bentuk 0 – 100).

Kriteria	**Skor Perolehan**					**Bobot**	**Nilai**
	0	**1**	**2**	**3**	**4**		
Pendekatan pemecahan masalah • Sistematika pemecahan masalah • Bentuk penyelesaian masalah					X X	4	16 16
Ketepatan Perhitungan • Ketepatan pengunaan rumus (prinsip translasi dan rotasi) • Kebenaran hasil yang diperoleh					X X	4	16 16
Gambar • Ketepatan gambar sebagai interpretasi masalah • Kesesuaian gambar dalam pemecahan masalah • Kerapian dan penyajian					X X X	2	8 8 8
Penjelasan • Kejelasan uraian jawaban • Pemahaman terhadap aspek hubungan					X X	1,5	6 6
Nilai yang diperoleh							100

Misalkan Siti memperoleh skor seperti pada kolom skor perolehan

Kriteria	**Skor Perolehan**					**Bobot**	**Nilai**
	0	**1**	**2**	**3**	**4**		
Pendekatan pemecahan masalah • Sistematika pemecahan masalah • Bentuk penyelesaian masalah			X		X	4	8 16

Kriteria	Skor Perolehan					Bobot	Nilai
	0	1	2	3	4		
Ketepatan Perhitungan • Ketepatan pengunaan rumus (prinsip translasi dan rotasi) • Kebenaran hasil yang diperoleh					X X	4	12 12
Gambar • Ketepatan gambar sebagai interpretasi masalah • Kesesuaian gambar dalam pemecahan masalah • Kerapian dan penyajian					X X X	2	8 8 8
Penjelasan • Kejelasan uraian jawaban • Pemahaman terhadap aspek hubungan					X X	1,5	6 6
Nilai yang diperoleh							84

Jadi nilai akhir siti adalah **84**

Contoh Penilaian Projek

Satuan Pendidikan : SMA
Mata Pelajaran : Matematika
Kelas : XI
Kompetensi dasar : Memadu berbagai konsep dan aturan operasi matriks dan menyajikan model matematika dari suatu masalah nyata dengan memanfaatkan nilai determinan atau invers matriks dalam pemecahannya.
Indikator : Siswa dapat menerapkan berbagai konsep dan aturan operasi matriks dan , membuat model dan penyelesaian projek matematika dalam bidang fisika, kimia, astronomi, dan ekonomi.
Materi : Eksponen

Tugas Projek

Rancang sebuah permasalahan terkait transportasi yang melibatkan determinan dan invers matriks. Beri bobot lintasan kenderaan dari sisi jarak atau biaya transportasi. Selesaikan tugas ini secara berkelompok. Buat laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

Rubrik Penilaian Projek

Kriteria	Skor
• Menunjukkan kreatifitas yang tinggi dalam pemecahan masalah; • Kejelasan atau keterangan jawaban sangat lengkap; • Kebenaran jawaban masalah sangat tepat; • Kerjasama kelompok sangat baik; • Interpretasi jawaban masalah/gambar sangat akurat; • Penggunaan strategi benar dan tepat; • Kerapian sangat baik. • Laporan disusun dengan baik dan lengkap • Kemampuan komunikasi dalam presentase hasil kerja baik	4
• Menunjukkan kreatifitas yang cukup dalam pemecahan masalah; • Kejelasan atau keterangan jawaban cukup lengkap; • Kebenaran jawaban masalah cukup tepat; • Kerjasama kelompok cukup baik; • Interpretasi jawaban masalah/gambar cukup akurat; • Penggunaan strategi benar dan tepat; • Kerapian cukup baik. • Laporan disusun dengan cukup dan kurang lengkap • Kemampuan komunikasi dalam presentase hasil kerja baik	3

Kriteria	Skor
• Menunjukkan kreatifitas yang rendah dalam pemecahan masalah, • kejelasan atau keterangan jawaban cukup lengkap, • kebenaran jawaban masalah cukup tepat, • kerjasama kelompok cukup baik, • interpretasi jawaban masalah/gambar kurang akurat, • penggunaan strategi benar dan tepat, • kerapian kurang baik.	2
• Menunjukkan kreatifitas yang rendah dalam pemecahan masalah, • Kejelasan atau keterangan jawaban tidak lengkap, • Kebenaran jawaban tidak tepat, kerjasama kelompok kurang baik, • Interpretasi jawaban masalah/gambar tidak akurat, • Penggunaan strategi benar dan tepat, • Kerapian tidak baik, • Tidak ada laporan hasil kerja yang dapat disajikan di depan kelas.	1
Tidak melakukan tugas proyek	0

Rubrik Tugas Otentik: Projek Matematika

No.	Kriteria	Kelompok							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1.	Kreativitas								
2.	Kejelasan atau keterangan jawaban lengkap								
3.	Kebenaran jawaban								
4.	Kerjasama dengan sesama anggota kelompok								
5.	Keakuratan interpretasi jawaban/gambar								
6.	Penggunaan strategi benar dan tepat								
7.	Kerapian								

3) Penilaian kompetensi sikap

Penilaian kompetensi sikap dilakukan pada saat berlangsungnya proses belajar mengajar. Instrumen penilaiannya dapat berupa:

a) Lembar observasi

b) Lembar penilaian diri (*self assessment*)

c) Angket untuk penilaian antar peserta didik (*peer assessment*)

d) Jurnal

Seluruh instrumen yang dibuat, harus dilengkapi dengan pedoman penskoran atau rubrik penilaian. Berikut berbagai contoh instrumen penilaian sikap.

Contoh Penilaian Sikap

KUESIONER SIKAP SISWA TERHADAP KOMPONEN DAN KEGIATAN PEMBELAJARAN

Nama Sekolah	: ………………….	Kelas/Semester	: ………………….
Mata Pelajaran	: ………………….	Hari/tanggal	: ………………….
Materi	: ………………….	Nama	: ………………….

A. TUJUAN

Tujuan penggunaan kuesioner ini adalah untuk menjaring data sikap siswa terhadap kegiatan dan komponen pembelajaran dalam pelaksanaan pembelajaran matematika.

B. PETUNJUK

Beri tanda cek (√) pada kolom yang sesuai menurut pendapatmu.

No	Aspek	Senang	Tidak Senang
I	Bagaimana sikapmu terhadap komponen berikut? a. Materi pelajaran b. Buku Siswa c. Lembar Kerja Siswa (LKS) d. Suasana belajar di kelas e. Cara guru mengajar	....	....
Berikan alasan secara singkat atas jawaban yang diberikan!			
		Baru	**Tidak Baru**
II	Bagaimana pendapatmu terhadap komponen berikut? a. Materi pelajaran b. Buku Siswa c. Lembar Kerja Siswa (LKS) d. Suasana belajar di kelas e. Cara guru mengajar	....	....
Berikan alasan secara singkat atas jawaban yang diberikan!			

		Berminat	Tidak Berminat
III	Apakah kamu berminat mengikuti kegiatan belajar selanjutnya seperti yang telah kamu ikuti sekarang?	....	....
Berikan alasan secara singkat atas jawaban yang diberikan!			
		Ya	**Tidak**
IV	Bagaimana pendapatmu terhadap aktivitas belajar matematika di kelas dan di luar kelas? a. Apakah Ananda merasa terbebani terhadap tugas matematika yang diberikan guru? b. Aktivitas belajar matematika menurut saya adalah menarik	....	....
Berikan alasan secara singkat atas jawaban yang diberikan!			

		Bermanfaat	Tidak Bermanfaat
V	Bagaimana menurut pendapatmu, apakah matematika bermanfaat dalam kehidupan?		
Berikan alasan secara singkat atas jawaban yang diberikan!			

Rubrik Penilaian Sikap

Kriteria	Skor
Jawaban menunjukkan pengetahuan matematika mendasar yang berhubungan dengan tugas (kerja) yang diberikan. Ciri-ciri: • Langkah-lagkah kerja pemecahan masalah dilakukan dengan sangat baik, cermat, dan penuh tanggungjawab. Semua jawaban benar tetapi ada cara yang tidak sesuai atau ada satu jawaban salah. Sedikit kesalahan perhitungan dapat diterima.	4

<table>
<tr><th>Kriteria</th><th>Skor</th></tr>
<tr><td>Jawaban menunjukkan pengetahuan matematika mendasar yang berhubungan dengan tugas (kerja) yang diberikan.
Ciri-ciri:
• Langkah-lagkah kerja pemecahan masalah dilakukan dengan baik, cermat, dan penuh tanggungjawab. Semua jawaban benar tetapi ada beberapa cara yang tidak sesuai atau ada beberapa pekerjaan yang salah. Sedikit kesalahan perhitungan dapat diterima.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Jawaban menunjukkan keterbatasan atau kurangnya pengetahuan matematika yang berhubungan dengan masalah ini.
Ciri-ciri:
• Langkah-lagkah kerja pemecahan masalah dilakukan dengan kurang baik, kurang cermat, dan penuh tanggungjawab. Beberapa langkah pekerjaan benar tetapi banyak prosedur pengerjaan yang tidak sesuai dengan prinsip matematika.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Jawaban hanya menunjukkan sedikit atau sama sekali tidak ada pengetahuan matematika yang berhubungan dengan masalah ini.

Ciri-ciri:
• Semua jawaban salah, atau
• Langkah pengerjaan tugas tidak tepat, tidak ada bukti bahwa jawaban diperoleh melalui prosedur kerja yang benar.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Tidak ada jawaban atau lembar kerja kosong</td><td>0</td></tr>
</table>

Contoh Penilaian Diri

PENILAIAN DIRI DALAM KELOMPOK (SELF-ASSESSMENT IN GROUP)

Nama : ……………………………….……….....
Anggota Kelompok : …………………………………………
Kegiatan Kelompok : ……………………………………...

Untuk pertanyaan 1 sampai dengan 5 tulis masing-masing huruf sesuai dengan pendapatmu

- A = Selalu
- B = Jarang
- C = Jarang Sekali
- D = Tidak pernah

1 _____ Selama diskusi saya memberikan saran kepada kelompok untuk didiskusikan
2 _____ Selama diskusi saya memberikan saran kepada kelompok untuk didiskusikan.
3 _____ Ketika Kami berdiskusi, setiap anggota memberikan masukan untuk didiskusikan
4 _____ Semua anggota kelompok harus melakukan sesuatu dalam kegiatan kelompok
5 _____ Setiap anggota kelompok mengerjakan kegiatannya sendiri dalam kegiatan kelompok

Selama kegiatan, saya ....

_____ Mendengarkan
_____ Bertanya
_____ Merancang gagasan
_____ Mengendalikan kelompok
_____ Mengganggu kelompok
_____ Tidur

6 Selama kegiatan kelompok, tugas apa yang kamu lakukan?

____

____

Contoh Penilaian Partisipasi Siswa

LEMBAR PENILAIAN PARTISIPASI

Nama : ____

Kelas : ____

Hari/Tanggal : ____

Kamu telah mengikuti pelajaran matematika hari ini. Ingatlah kembali bagaimana partisipasi kamu dalam kelas matematika hari ini.

Jawablah pertanyaan berikut sejujurnya:

- Apakah kamu berpartisipasi dalam diskusi?
- Apakah kamu telah mempersiapkan diri sebelum masuk kelas, atau telah mengerjakan PR, sehingga kamu dapat menjawab pertanyaan di kelas?
- Apakah kamu bertanya ketika kamu tidak paham?
- Jika ada teman bertanya (kepada guru/kepadamu/kepada teman lain), apakah kamu menyimaknya ?

Berikan skor atas partisipasi kamu, menurut ketentuan berikut ini.

- ☐ Jika kamu menjawab "**ya**" pada semua pertanyaan di atas, bagus …, kamu telah melakukan partisipasi yang sempurna. Berikan nilai untuk dirimu **5.**
- ☐ Jika kamu menjawab **"ya"** pada tiga pertanyaan di atas, berikan nilai untuk dirimu **4.**
- ☐ Jika kamu menjawab **"ya"** pada dua pertanyaan di atas, berikan nilai untuk dirimu **3.**
- ☐ Jika kamu hanya menjawab "ya" paling banyak pada satu pertanyaan di atas berikan nilai untuk dirimu 2, dan upayakan untuk meningkatkan partisipasimu dalam pelajaran matematika.

Nilai partisipasi saya hari ini adalah : ______________.

Tanda tangan____________________________.

LEMBAR PARTISIPASI

(Lembar ini diisi setiap jam belajar matematika)
Tulislah dengan jujur, partisipasi anda dalam belajar matematika di kelas hari ini.

Partisipasi yang dimaksud adalah:

- **Bertanya kepada teman di dalam kelas**
- **Bertanya kepada guru di dalam kelas**
- **Menyelesaikan tugas belajar dalam kelompok**
- **Mempresentasikan hasil kerja di depan kelas**
- **Menawarkan ide / menjawab pertanyaan teman di dalam kelas**
- **Menawarkan ide / menjawab pertanyaan guru di dalam kelas**
- **Membantu teman dalam belajar**

Pertanyaan utama yang harus dijawab pada tabel berikut adalah:
Partisipasi apa yang kamu lakukan dalam belajar Matematika hari ini?

Hari/Tanggal	Partisipasi apa yang kamu lakukan?

Contoh Pengolahan Laporan Pencapaian Kompetensi Matematika

a. Pengelolan Skor Kompetensi Pengetahuan

Setelah pelaksanaan uji kompetensi pengetahuan matematika melalui tes dan penugasan dengan contoh instrumen dan pedoman penskoran yang telah disajikan di atas maka diperoleh skor. Dari beberapa kali pemberian tes dan penugasan dalam mengukur kompetensi pengetahuan, perlu pengelolaan skor untuk laporan pencapaian kompetensi. Berikut contoh untuk dipedomani guru.

KD	Skor		Skor Akhir	
	Tes	Penugasan	Skala 1 – 100	Skala 1 - 4
3.1	84	90	86	3.44
3.2	76	84	79	3.16
3.3	80	70	77	3.08
3.4	84	87	85	3.40
Rata-Rata Skor Akhir				3.22

Cara konversi ke skala 1 – 4 adalah

$$\frac{\text{Skor diperoleh}}{\text{Skor maksimal}} \times 4 = \text{skor akhir}$$

b. Pengelolan Skor Kompetensi Keterampilan

Setelah pelaksanaan uji kompetensi keterampilan matematika melalui penilaian unjuk kerja, projek, dan portofolio dengan contoh instrumen dan rubrik yang telah disajikan di atas maka diperoleh skor. Dari beberapa kali pemberian tes dan penugasan dalam mengukur kompetensi pengetahuan, perlu pengelolaan skor untuk laporan pencapaian kompetensi. Berikut contoh untuk dipedomani guru.

KD	Skor			Skor Akhir	
	Tes Praktik	Projek	Portofolio	Skala 1 - 100	Skala 1 - 4
4.1	84	90	-	87	3.48
4.2	76	84	-	80	3.20
4.3	65	60	70	65	2.60
Rata-Rata Skor Akhir					3.09

Cara konversi ke skala 1 – 4 adalah

$$\frac{\text{Skor diperoleh}}{\text{Skor maksimal}} \times 4 = \text{skor akhir}$$

Petunjuk

1. Penilaian setiap mata pelajaran meliputi kompetensi pengetahuan, kompetensi keterampilan, dan kompetensi sikap. K
2. Kompetensi pengetahuan dan kompetensi keterampilan menggunakan skala 1–4 (kelipatan 0.33), sedangkan kompetensi sikap menggunakan skala Sangat Baik (SB), Baik (B), Cukup (C), dan Kurang (K), yang dapat dikonversi ke dalam predikat A - D seperti pada tabel di bawah ini.

Tabel : Konversi Kompetensi Pengetahuan, Keterampilan, dan Sikap

Predikat	Nilai Kompetensi		
	Pengetahuan	Keterampilan	Sikap
A	4	4	SB
A^-	3,66	3,66	
B^+	3,33	3,33	B
B	3	3	
B^-	2,66	2,66	
C^+	2,33	2,33	C
C	2	2	
C^-	1,66	1,66	
D^+	1,33	1,33	K
D^-	1	1	

3. Ketuntasan minimal untuk seluruh kompetensi dasar pada kompetensi pengetahuan dan kompetensi keterampilan yaitu 2.66 (B-)
4. Pencapaian minimal untuk kompetensi sikap adalah B. Untuk kompetensi yang belum tuntas, kompetensi tersebut dituntaskan melalui pembelajaran remedial sebelum melanjutkan pada kompetensi berikutnya. Untuk mata pelajaran yang belum tuntas pada semester berjalan, dituntaskan melalui pembelajaran remedial sebelum memasuki semester berikutnya.

B. Petunjuk Pelaksanaan Remedial dan Pengayaan

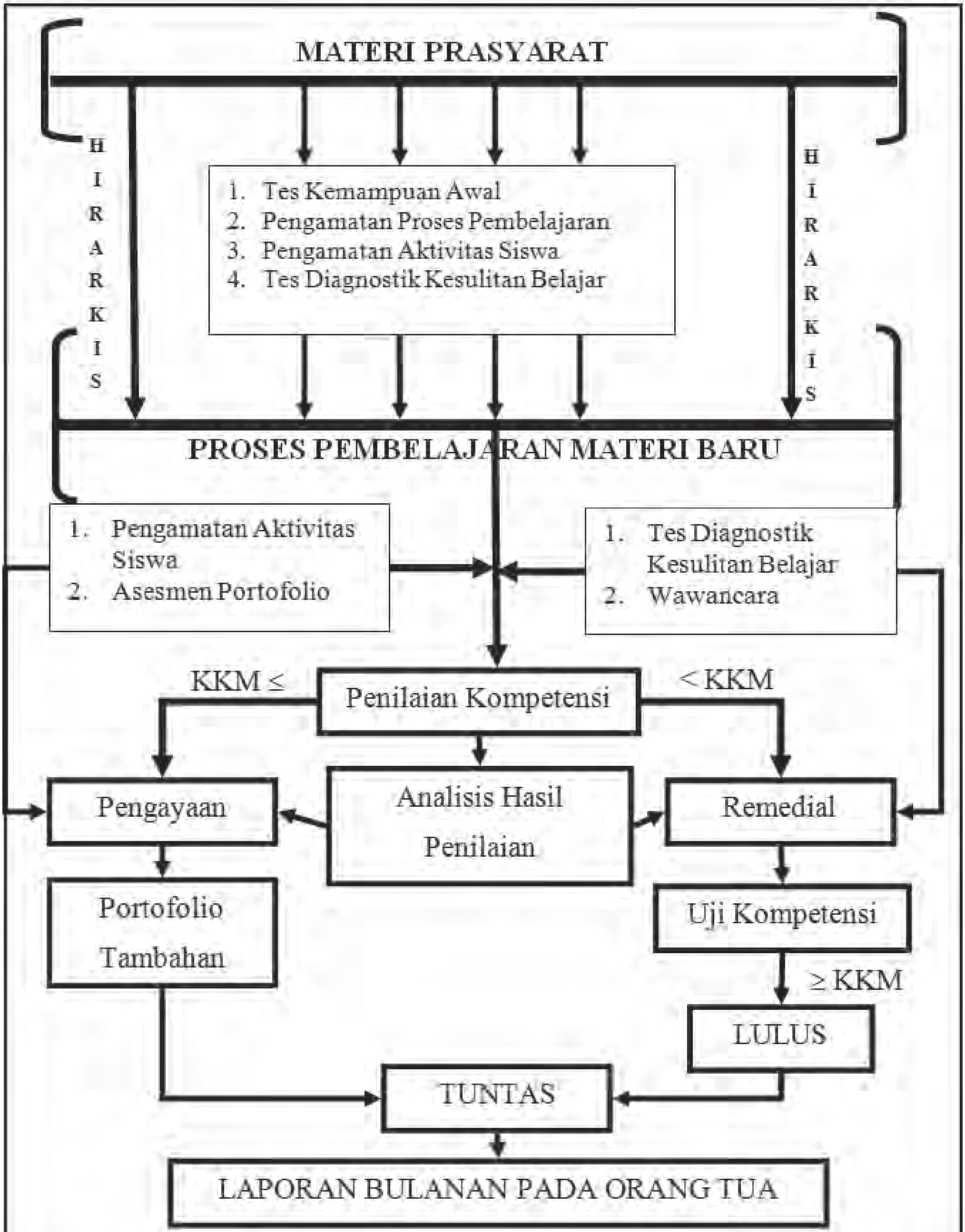
Kurikulum Matematika 2013 adalah kurikulum berbasis kompetensi dengan pendekatan pembelajaran tuntas. Pembelajaran tuntas (*mastery learning*) dalam proses pembelajaran berbasis kompetensi dimaksudkan adalah pendekatan dalam pembelajaran yang mempersyaratkan peserta didik menguasai secara tuntas seluruh kompetensi dasar pokok bahasan atau mata pelajaran tertentu. Peserta didik dikatakan menguasai secara tuntas seluruh kompetensi dasar pada pokok bahasan atau mata pelajaran matematika pada kelas tertentu, apabila peserta didik tersebut memperoleh hasil penilaian/uji kompetensi lebih besar atau sama dengan dari Kriteria Ketuntasan Minimum ($\geq$ KKM) yang ditetapkan dalam kurikulum. Sebaliknya peserta didik dikatakan tidak tuntas.

Bagi peserta didik yang memperoleh hasil penilaian/uji kompetensi pada pokok bahasan mata pelajaran matematika kurang dari KKM, wajib diberi pembelajaran remedial. Pembelajaran remedial pada hakikatnya adalah pemberian bantuan bagi peserta didik yang mengalami kesulitan atau kelambatan belajar. Bantuan dalam pembelajaran remedial mencakup (1) mengkaji ulang materi pada kompetensi dasar yang belum dicapai peserta didik, (2) pemberian tugas tersrtuktur yang dilakukan secara mandiri dan pemberian feetback atas hasil kerja peserta didik, (3) tutor sebaya dalam implementasi model pembelajaran koperatif tipe jigsaw, dan (4) kerjasaman sekolah dengan orang tua/ wali peserta didik mengatasi masalah belajar peserta didik. Pemberian pembelajaran remedial meliputi dua langkah pokok, yaitu pertama mendiagnosis kesulitan belajar dan kedua memberikan perlakuan (*treatment*) pembelajaran remedial.

Bagi peserta didik yang memperoleh hasil penilaian/uji kompetensi pada pokok bahasan mata pelajaran matematika kurang dari KKM, wajib diberi pembelajaran pengayaan. Pembelajaran pengayaan adalah pembelajaran yang memberikan pengalaman (membangun berpikir tingkat tinggi, yaitu berpikir kritis dan kreatif) lebih mendalami materi terkait kompetensi atau kegiatan peserta didik yang melampaui persyaratan minimal yang ditentukan oleh kurikulum dan tidak semua peserta didik dapat melakukannya. Pendekatan pembelajaran yang diterapkan dalam pelaksanaan pengayaan melalui (1) pembelajaran berbasis masalah dan proyek untuk melatih peserta didik berpikir kritis dan kreatif, ketangguhan diri beradaptasi dan memecahkan masalah, (2) pemberian asesmen portofolio tambahan berbasis masalah, proyek, keterampilan proses, chek up diri dan asesmen kerjasama kelompok, dan (3) pemanfaatan IT dan ICT dalam proses pembelajaran.

Seluruh hasil belajar siswa yang tampak pada hasil penilaian/uji kompetensi dan asesmen otentik/portofolio dijadikan bahan kajian guru, guru konseling, dan kepala sekolah. Hasil belajar tersebut dilaporkan kepada pemangku kepentingan (terutama pada orang tua) setiap bulannya.

Secara garis besar, alur utama pelaksanaan pembelajaran remedial dan pengayaan disajikan pada skema berikut.



Gambar: Alur Utama Pelaksanaan Remedial dan Pengayaan

Daftar Pustaka

Anton. Howard, Rorres. Chris. (2005). *Elementary Linear Algebra with Applications*. John Wiley & Sons, Inc

Ball, Deborah Loewenberg. (2003). *Mathematical Proficiency for All Students (Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education*). United States of America: RAND.

Checkley , Kathy (2006). *The Essentials of Mathematics, Grades 7 -12*. United States of America: The Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).

Chung, Kai Lai. (2001). *A Course in Probability Theory*, USA: Academic Press.

Committee on science and mathematics teacher preparation, center for education national research council (2001). *Educating Teachers of science, mathematics, and technology (new practice for new millennium*. United States of America: the national academy of sciences.

Douglas. M, Gauntlett. J, Gross. M. (2004). *Strings and Geometry*. United States of America: Clay Mathematics Institute.

Hefferon, Jim (2006). *Linear Algebra*. United States of America: Saint Michael's College Colchester.

Howard, dkk. (2008). *California Mathematics. Consepts, Skills, and Problem Solving 7*. Columbus-USA, The McGraw-Hill Companies, Inc.

Johnstone. P.T. (2002). *Notes on Logic and Set Theory*. New York: University of Cambridge.

Magurn A, Bruce. (2002). Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. United Kingdom: United Kingdom at the University Press, Cambridge.

Slavin, Robert, E. (1994). *Educational psychology, theories and practice*. Fourth Edition. Masschusetts: Allyn and Bacon Publishers.

Sinaga, Bornok. (2007). *Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Masalah Berbasis Budaya Batak*. Surabaya: Program Pascasarjana UNESA.

Tan, Oon Seng. (1995). *Mathematics. A Problem Solving Approach*. Singapore: Federal Publication (S) Pte Lsd.

Urban. P, Owen. J, Martin. D, Haese. R, Haese. S. Bruce. M. (2005). *Mathematics For Yhe International Student* (*International Baccalaureate Mathematics HL Course*). Australia: Haese & Harris Publication.

Van de Walle, John A. (1990). *Elementary school mathematics: teaching developmentally*. New York: Longman.

Van de Walle. Jhon, dkk. (2010). Elementary and Middle School Mathematics (teaching developmentally). United States of America: Allyn & Bacon.